E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de ... ehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - C... E
VYMENA - W... NA
TAUSCH - CMEHA

Anul VIII — ianuarie 1957

1

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, Nr. 1 — ianuarie 1957

SUMARUL:

Pag.

1. *Anul Geofizic Internaţional de prof. univ. Gh. Petrescu* 1
2. *Din istoria calculelor elementare de conf. univ. Al. Toth* 10
3. *Note matematice* 28
4. *Caleidoscop fizic* 30
5. *Aparat pentru producerea undelor staţionare pe cale electrică de prof. N. Rădulescu* 33
6. *Probleme rezolvate (1915; 1978; 1994 bis; 2000 bis; 2009; 2018; 2027; 2039; 2059; 2063; 2078; 2082; 2087; 2901; 2104; 2140: 2280)* 35
7. *Probleme propuse (2465—2493)* 45
8. *Chestiuni de examen (2494—2499)* 49
9. *Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani (E: 910—E: 919)* 50
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 51

ANUL VIII 1 IANUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolanglu A.**, asistentă univ., **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Könyvtár
TULAJDONA

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VIII * Nr. 1 Ianuarie 1957

ANUL GEOFIZIC INTERNAŢIONAL

PARTICIPAREA OBSERVATORULUI DIN BUCUREŞTI

Prof. univ. GH. PETRESCU

De mai multă vreme se vorbeşte şi se scrie foarte mult în ţara noastră şi pretutindeni în lume, despre Anul Geofizic Internaţional.

În cele ce urmează vom arăta ce este Anul Geofizic Internaţional, în ce constau lucrările ce vor fi efectuate în cursul acestui An şi în ce mod va putea participa Observatorul din Bucureşti la aceste lucrări.

S-a dat numele de « An Geofizic Internaţional » unei mari campanii ştiinţifice, unei mari acţiuni de colaborare ştiinţifică internaţională, întinsă pe o durată de timp de 18 luni şi avînd ca scop studiul fenomenelor geofizice şi meteorologice de pe întreaga noastră planetă, studiul stabilirii legilor după care se conduc fenomenele geofizice pe Pămînt.

Lucrările Anului Geofizic Internaţional vor începe la 1 iulie 1957 şi se vor termina la 31 decembrie 1958.

Problemele care vor interesa Anul Geofizic Internaţional, 1957—1958, sînt de ordin planetar. Fie că este vorba de geodezie, de gravimetrie, de seismologie, de meteorologie, de magnetism, de oceanografie, de vulcanologie sau de hidrologie, totdeauna planeta întreagă, Pămîntul, este interesată şi nici una din miile de probleme particulare, pe care fiecare din aceste specialităţi le-ar putea pune, nu este independentă: toate sînt strîns legate, dincolo de frontierele care despart lumea în diferite state.

Fiecare din aceste domenii specializate este susceptibil de nenumărate aplicaţii la viaţa materială a comunităţii umane şi tocmai acesta este factorul, care explică şi determină amploarea cercetărilor pe care ele le suscită.

Ideia organizării unei asemenea campanii ştiinţifice este veche; ea a fost emisă în 1873, însă proiectul unei cooperări internaţionale a fost elaborat abia în 1881, la Petersburg.

Încă de pe atunci se accentuase lipsa observaţiilor şi măsurătorilor geofizice făcute mai ales în regiunile polare ale Pămîntului.

În 1882, sub conducerea savantului G. I. Vild, membru activ al Academiei de ştiinţe din Petersburg, un grup de cercetători ruşi au organizat primul « An Polar Internaţional », adică un an de observaţii polare, care a durat din august 1882 pînă în august 1883 şi la care s-au alăturat încă alte 12 state. Scopul acestei acţiuni a fost acela de a instala o serie de staţii în regiunea Arcticii unde în mod simultan şi cu metode de observaţie şi instrumente simi-

lare, timp de un an întreg, specialişti ai diferitelor naţiuni aveau să facă observaţii şi cercetări geofizice de tot felul.

Date fiind posibilităţile tehnice şi ştiinţifice reduse — de acum 75 de ani — se înţelege că volumul lucrărilor din acest An Polar a fost foarte limitat. Totuşi, ansamblul rezultatelor date de staţiile arctice internaţionale a fost remarcabil.

Proiectul organizării unui al doilea An Polar Internaţional a fost emis în 1932—1933, după 50 de ani de la primul An Polar. Planul de lucru a fost primit cu mult entuziasm de oamenii de ştiinţă din lumea întreagă, pentru că, dată fiind experienţa cîştigată în primul An Polar, precum şi progresul metodelor, aparatelor şi teoriilor în cursul acestei jumătăţi de veac, s-a sperat că observaţii geofizice făcute simultan în condiţii analoage şi cu aparate identice pe toată faţa Pămîntului, după programe şi metode coordonate, vor contribui la rezolvarea din punct de vedere ştiinţific şi practic, a numeroaselor probleme capitale ale geofizicii.

Lucrările celui de-al doilea An Polar s-au desfăşurat după un program mult mai vast decît primul, cuprinzînd în afară de observaţii meteorologice şi de studiul magnetismului terestru, şi observaţii şi studii asupra aurorelor polare, asupra curenţilor telurici, asupra propagării undelor radiofonice, asupra electricităţii atmosferice, asupra atmosferei înalte, asupra radiaţiei solare şi razelor cosmice, asupra variaţiei longitudinilor, precum şi studii geografice, geologice, oceanografice, biologice etc.

Tot atunci, cercetările au fost completate cu lucrări referitoare la revizuirea longitudinilor pe întreg globul.

S-au adunat în această campanie de lucru — mai ales din regiunile polare — o serie de observaţii şi informaţii sistematice privind fenomenele meteorologice şi geofizice, care au îmbogăţit în mod considerabil cunoştinţele noastre în acest domeniu. Arhivele acestei campanii ştiinţifice vor rămîne o adevărată mină pentru cercetările şi lucrările generale de geofizică în viitor.

Experienţa acestui al doilea An Polar Internaţional a dovedit în mod neîndoielnic, cît de mare este importanţa colaborării internaţionale în organizarea cercetărilor geofizice executate sincron, după un program unic şi cu instrumente standardizate.

★

Evident, de atunci, unele ţări au început să-şi înzestreze staţiile existente cu aparate moderne de înaltă precizie pentru astfel de observaţii sau să-şi instaleze altele noi.

S-au creat cu timpul, în scopul continuării şi coordonării permanente a lucrărilor, organizaţii ştiinţifice naţionale şi internaţionale.

În ziua de azi, forul superior internaţional este Consiliul Internaţional al Uniunilor Ştiinţifice — prescurtat C.I.U.S. — care a luat fiinţă în anul 1931, ca o Federaţie a uniunilor ştiinţifice internaţionale, cu scopul de a coordona lucrările acestor Uniuni.

Iniţiativa organizării viitorului An Internaţional, 1957—1958, de data aceasta nu « Polar » ci « Geofizic », a fost luată de acest Consiliu care aparţine sistemului O.N.U.

În sesiunea sa din octombrie 1951, Consiliul internaţional al uniunilor ştiinţifice a constituit un Comitet special pentru lucrările viitorului An Geofizic Internaţional intitulat Comitetul special al Anului Geofizic Internaţional

(C.S.A.G.I.), din care fac parte 35 de state printre care aproape toate țările mari. Președintele Comitetului special pentru organizarea Anului geofizic internațional (A.G.I), este savantul S. Chapman, unul dintre cei mai mari geofizicieni, iar secretarul general al Comitetului este savantul M. Nicolet. La invitația Comitetului special, în foarte multe țări, inclusiv în Uniunea Sovietică, s-au format comitete naționale pentru coordonarea și participarea la lucrările A.G.I. În Uniunea Sovietică președintele Comitetului Sovietic pentru organizarea A.G.I. este academicianul I. P. Bardin, vicepreședinte al Academiei de Științe din U.R.S.S. Din C.I.U.S. fac parte mai multe uniuni internaționale și specializate, dintre care citâm: Uniunea Internațională de Astronomie (U.A.I.), Uniunea Internațională de Geodezie și Geofizică (U.G.G.I.), Uniunea Științifică Internațională de Radio (U.R.S.I.) etc.

Uniunea Internațională de Geodezie și Geofizică (U.G.G.I.) este aceea care tutelează și coordonează lucrările de geodezie și geofizică din lumea întreagă. În momentul de față U.G.G.I. numără 47 de state membre.

Și în țara noastră sub auspiciile Academiei R.P.R. s-a constituit un Comitet Național de Geodezie și Geofizică, al cărui președinte este acad. prof. G. Demetrescu, directorul Observatorului din București, avînd următoarele secții: Geodezie, Seismologie, Meteorologie, Magnetism și Electricitate terestră.

În ceea ce ne privește, Academia R.P.R. a obținut înscrierea oficială în U.G.G.I., astfel încît, de la 5 ianuarie 1956, Republica Populară Romînă este a 47-a printre statele membre ale U.G.G.I.

*

Comitetul Special A.G.I. a adresat o serie de scrisori Uniunilor Internaționale de Geodezie și Geofizică, de Astronomie, de Radio, Știință, precum și Organizației Meteorologice Mondiale, cerînd să stabilească proiectul unui program pentru lucrările celui de-al treilea An Geofizic, ținînd seamă:

1. că observațiile trebuie extinse și în regiunile ecuatoriale și în regiunile temperate, la nevoie întărindu-se stațiile slab echipate din acele regiuni (faptul acesta explică și schimbarea numelui de An Polar în An Geofizic), și

2. de posibilitatea refacerii Operației Mondiale de Longitudini (a treia de data aceasta, prima fiind executată în 1926, iar a doua în 1933), care ar urma să fie efectuată tot în timpul Anului Geofizic.

La reuniunea din septembrie 1955 de la Bruxelles, s-au definitivat punctele principale ale programului A.G.I, 1957—1958, și între multe altele s-a mai hotărît constituirea unui număr de grupuri de lucru care se vor referi la 11 domenii mai importante legate de Geofizică.

Iată, în foarte puține cuvinte, care sînt acele grupuri de lucru și preocupările lor esențiale:

Grupul de meteorologie, al cărui program urmărește cunoașterea atmosferei terestre și a fenomenelor ce au loc în ea, pentru prevederea timpului, atît de necesară în agricultură, în problema transporturilor aeriene și navale etc.

Grupul de geomagnetism, care se va ocupa cu studiul variației cîmpului magnetic terestru, cu schimbările de formă ale perturbațiilor magnetice, atît de strîns legate de activitatea solară, cu studiul variației diurne a elementelor magnetice în vecinătatea ecuatoarelor magnetic și geografic etc.

Grupul studiului luminii nopții și al aurorelor polare, care va face, în cooperare internațională, studii ale marilor manifestări aurorale pentru dezlegarea problemei relațiilor dintre furtunile geomagnetice și caracterele tipice ale

aurorelor, precum şi studiul variaţiilor de intensitate ale principalelor radiaţii ale cerului nocturn din anumite staţii stabilite pe toată faţa globului.

Grupul ionosferei, pentru studiul regiunilor înalte ale atmosferei în legătură cu structura ionosferei, stratificaţia ionosferei, mişcările din înalta atmosferă, furtunile magnetice.

Grupul studiului activităţii solare, care-şi va îndrepta atenţia în mod deosebit, asupra observaţiilor de pete solare, erupţiilor cromosferice, faculelor, folosindu-se aceleaşi spectroheliosco ape, aceleaşi filtre monocromatice.

Grupul radiaţiei cosmice, care se va ocupa cu studiul relaţiilor dintre intensitatea razelor cosmice, activitatea solară şi magnetismul terestru.

Grupul longitudinilor şi latitudinilor are ca scop organizarea lucrărilor pentru determinarea cît mai precisă a coordonatelor geografice ale Observatoarelor participante la Anul geofizic, precum şi studiul variaţiilor acestor coordonate. Rezultatele acestui studiu vor conduce în viitor, la ameliorarea determinării timpului terestru, la determinarea mai precisă a neregularităţilor rotaţiei terestre, la ameliorarea cataloagelor stelare, etc.

Grupul pentru studii de glaciologie, care-şi propune să facă observaţii asupra gheţarilor şi stratului de zăpadă în regiunile polare şi pe munţii înalţi ai continentelor, în legătură cu condiţiile meteorologice.

Grupul de oceanografie, care va organiza un plan comun de expediţii pe nave oceanice.

Grupul zilelor internaţionale, care va programa în cursul celor 18 luni, anumite zile de observaţii zise *mondiale regulate* (două zile la lună nouă şi o zi la lună plină) şi altele zise *mondiale speciale*, cam două pe lună, care vor fi alese cu ocazia unor fenomene previzibile importante, cum ar fi activităţile magnetice, ionosferice sau aurorale excepţionale, lansări de rachete, eclipse de Soare, roiuri excepţionale de stele căzătoare etc.

Grupul rachetelor şi sateliţilor artificiali va programa pentru A.G.I. lansarea la mari înălţimi a unor rachete prevăzute cu instrumente speciale, care vor face posibilă observarea directă a multora din fenomenele geofizice sau solare, care nu pot fi observate de la suprafaţa Pămîntului sau din baloane.

Astfel, se vor lansa din avioane sau baloane speciale, rachete încărcate cu 15 kg echipament instrumental şi putînd urca pînă la înălţimea de 100 km. Alte rachete vor putea transporta în stratosferă, 50—70 kg. Cu ajutorul lor pot fi făcute observaţii asupra radiaţiei solare, naturii ionilor din atmosferă, naturii moleculelor şi atomilor atmosferici, presiunii, densităţii şi temperaturii ozonului din atmosferă etc.

Uniunea Sovietică şi Statele Unite ale Americii au anunţat lansarea a 6—10 sateliţi prevăzuţi cu aparate de măsurat, care transmit în mod automat măsurătorile şi observaţiile lor pe Pămînt.

Sateliţii artificiali vor fi sfere mici cu diametrul de 50 cm şi cu greutatea de aproape 50 kg, avînd proprietăţi reflexive, sau fiind eventual luminaţi spre a fi observaţi în condiţii favorabile de pe Pămînt. Ei vor circula cu viteze enorme, făcînd în 24 ore ocolul Pămîntului de 16 ori.

Sateliţii artificiali rămînînd pe orbitele lor, la cîteva sute de km deasupra atmosferei mai mult timp, vor permite efectuarea de observaţii asupra condiţiilor din mediul de deasupra atmosferei.

În fine, unii sateliţi vor putea fi « pasivi », adică nu vor fi dotaţi cu instrumente de măsurat şi vor servi ca şi Luna, numai pentru măsurătorile geodezice.

Grupul de seismologie, condus de savantul sovietic Belousov, se va ocupa cu studiul seismicității regiunilor greu accesibile, cu studiul agitației microseismice în legătură cu fenomenele meteorologice, cu studiul interiorului globului și structurii scoarței terestre.

Grupul de gravimetrie, care își propune să lărgească rețeaua existentă de stații gravimetrice în vederea studiului variațiilor accelerației gravitației. Măsurile gravimetrice în Antarctica vor contribui la rezolvarea problemei stabilirii figurii exacte a Pămîntului, ceea ce va aduce o foarte importantă contribuție la problema întocmirii hărților.

În fine, un ultim *Grup de lucru* se va ocupa de problema publicațiilor relative la lucrările A.G.I.

Se înțelege că realizarea unui atît de vast program de lucru cere eforturi considerabile și coordonate din partea tuturor țărilor din lume. Observațiile vor fi efectuate de aproape 3500 stații meteorologice, de 860 stații complexe și de numeroase expediții speciale. Uniunea Sovietică va participa în mod masiv la lucrările A.G.I. cu aproape 250 stații și observatoare speciale, precum și cu numeroase expediții în regiunile polare.

Este logic să ne întrebăm: cum va participa țara noastră la lucrările A.G.I.?

Țara noastră este membră a Uniunii Internaționale Astronomice din 1928 și membră a Uniunii Internaționale de Geodezie și Geofizică din ianuarie 1956. În campania științifică din 1932—1933, țara noastră a adus o contribuție științifică foarte importantă, prin participarea Observatorului Astronomic din București și a Institutului Geografic al Armatei, alături de alte 69 observatoare de pe tot globul, la Operația Mondială de Longitudini, și lucrările românești efectuate atunci, au fost foarte mult apreciate și au apărut în întregime, în publicațiile Uniunii Internaționale Astronomice. U.A.I. a cerut încă din 1951, țării noastre să participe în 1957—1958 la lucrările Operației Mondiale de Longitudini și la Cercetările Solare. Dar, programul A.G.I. prevede cercetări și în alte domenii ale științei geofizicii, cum sînt: meteorologia, magnetismul terestru, ionosfera, seismologia etc. Țara noastră dispune astăzi de personalul de cercetare științifică necesar. Îi trebuie însă, acea aparatură modernă perfecționată, precisă, standardizată. Uniunea Sovietică, țările de democrație populară, vecinele și prietenele noastre R. P. Polonă, Republica Cehoslovacă și R. P. Ungaria și-au procurat materialul și au început lucrările pregătitoare de multă vreme. Nici țara noastră nu trebuie să rămînă în urmă sau să lipsească de pe lista țărilor participante.

Iată acum, schițate pe scurt, cîteva din actualele mari probleme de Astronomie și Seismologie cuprinse în programa A.G.I. la care Observatorul din București și-ar putea aduce contribuția.

Să înfățișăm mai întîi, problema măsurării precise a timpului, de o importanță covîrșitoare pentru știința întreagă și pentru nevoile practice ale vieții de fiecare zi.

Se știe că Pămîntul se rotește în jurul axei polare de la vest la est. Impresia noastră este însă, că Pămîntul stă pe loc și că sfera cerească împreună cu stelele care par a fi *fixate* pe ea, se rotește în jurul nostru de la est la vest, în jurul unei axe, care este prelungirea în spațiu a axei polilor terestri. Acesta este fenomenul astronomic cel mai banal, cunoscut sub numele de *mișcarea aparentă diurnă a sferei cerești* Astronomia secolelor trecute ne-a învățat că această mișcare de rotație se execută în mod uniform, iar intervalul de timp necesar unei rotații complete de 360° a primit numele de zi și este considerat *invariabil.*

În ziua de azi însă, aceste două principii fundamentale ale Astronomiei: *uniformitatea rotației terestre* și *imobilitatea stelelor* nu mai sînt valabile. Metodele noi și perfecționate de lucru și precizia înaltă pe care o dă aparatura astronomică actuală au dovedit că nici durata zilei definită după rotația Pămîntului, nu este constantă și că nici stelele nu sînt fixe, ci au și ele unele mișcări proprii, ce-i drept, foarte mici.

Dar, cum se explică faptul că mișcarea de rotație a Pămîntului nu este uniformă? După cum se știe, acțiunea fenomenului cunoscut al mareelor întîmpină rezistențe produse de frecarea apelor oceanelor cu uscatul și, mai ales, cu coastele continentale. Aceste rezistențe se opun rotației terestre provocînd o frînare, o încetinire a acestei mișcări, cam de cîteva secunde pe secol. Consecința acestei frînări este o lungire a duratei zilei, foarte mică evident, dar care cu timpul poate deveni sensibilă.

În afară de aceasta, Pămîntul nefiind un corp solid indeformabil, atracția luni-solară produce maree în însăși scoarța sa, maree mult mai mici în amplitudine decît cele ale apelor oceanelor, dar care pot modifica distribuția materiei în jurul axei Pămîntului și pot produce variații în mișcarea sa diurnă. Tot astfel, mișcările de mase mari pe suprafața Pămîntului, de exemplu, ghețurile polare purtate spre ecuator, marile cantități de aluviuni cărate de rîuri și fluvii, marele mase de aer care circulă dintr-o emisferă într-alta, modifică direcția axei polilor.

Iată deci, o serie de cauze care fac ca viteza rotației terestre să nu fie constantă, ci să sufere unele variații cu caracter periodic, pe lîngă alte mici fluctuații neregulate, de care nu mai amintim.

Aceasta înseamnă că timpul măsurat după rotația terestră nu poate avea o scurgere uniformă, iar mișcarea de rotație a Pămîntului nu mai poate servi în ziua de azi, la definirea timpului.

Problema instituirii timpului cu scurgere uniformă este problema capitală a Astronomiei actuale și a întregii științe. Astronomia, folosind azi cele mai perfecționate instrumente de observații și acele minunate orologii de cuarț, care dau o precizie de o secundă în 32 de ani sau orologiile atomice, de la care se poate obține o precizie de 100 de ori mai mare, caută să determine acele variații sau inegalități ale rotației terestre diurne prin observații asupra Lunii, Soarelui sau planetelor inferioare.

Spuneam că reperele considerate fixe pînă acum, stelele Galaxiei noastre, nu sînt fixe, cu alte cuvinte, nu dispunem în Galaxie de rpeere fixe la care să raportăm studiul mișcărilor aștrilor, adică studiul mișcărilor proprii ale stelelor sau studiul mișcării Pămîntului, de exemplu. Căutarea de repere fixe constituie de asemenea, una din marile probleme ale Astronomiei contemporane. Astronomii caută azi repere « fixe » în afara lumii noastre stelare, în afara Galaxiei, la depărtări pe care lumina cu viteza ei de 300.000 km/s le parcurge în durate de peste 10 milioane de ani, adică acolo unde se găsesc alte sisteme stelare, nebuloasele extragalactice compuse ca și Galaxia noastră, din zeci și sute de milioane de stele.

Am scris mai sus cuvîntul fixe între ghilimele, spre a arăta că nici acele extrem de îndepărtate repere nu sînt absolut fixe. Mișcările lor sînt însă, neînchipuit de mici, sînt de ordinul unei sutimi de secundă de arc pe secol, ceea ce echivalează cu unghiul sub care s-ar vedea 1 milimetru la depărtarea de 21 km. Iată precizia la care a ajuns Astronomia !

Această vastă lucrare, a unei noi așezări a Astronomiei în raport cu noile repere fixe, se execută în zilele noastre sub directivele Academiei de științe

din U.R.S.S., iar secţia de Astronomie a Observatorului din Bucureşti şi-a asumat aproape un sfert din lucrările repartizate celor 10 observatoare participante. Primele rezultate ale acestei imense lucrări sînt de aşteptat abia peste 15—20 ani!

Problema studiului deformărilor Pămîntului prezintă, de asemenea, o foarte mare importanţă. Se cunoaşte ipoteza emisă de savantul geolog Wegener,

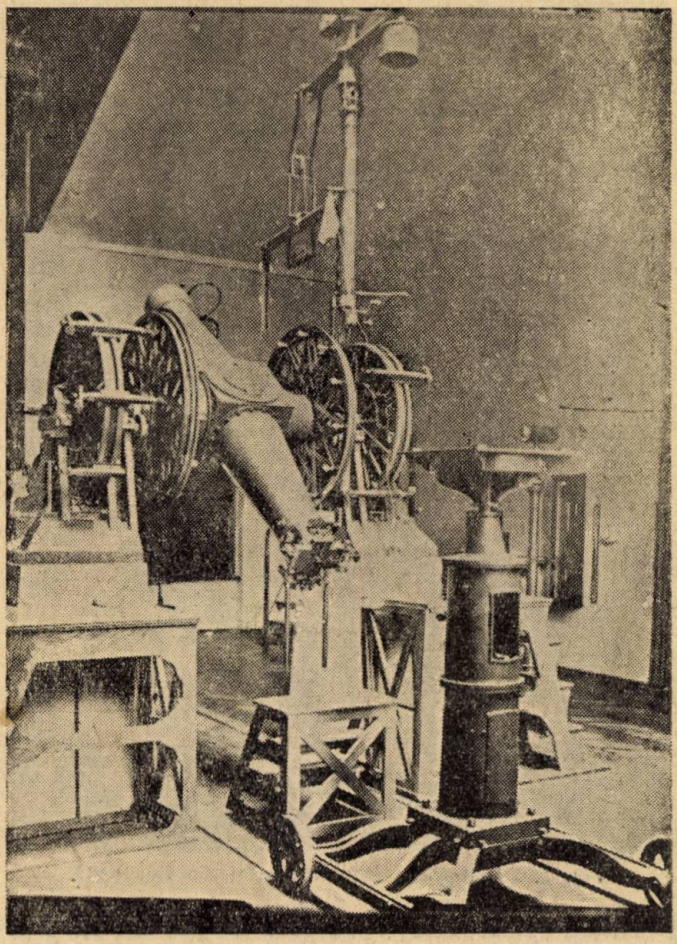


Fig. 1. Cercul meridian al Observatorului din Bucureşti.

la începutul acestui secol, cu privire la depărtarea continentului american de cel european, african şi asiatic. Operaţia de longitudini din 1933, părea că a ajuns la concluzia că distanţa dintre cele două blocuri continentale ar suferi o variaţie de aproape un centimetru pe secol. Iată o ipoteză care trebuie să fie verificată, confirmată sau infirmată. Pentru aceasta se cere determinarea coordonatelor geografice, ale unui număr cît mai mare de puncte de pe ambele blocuri continentale, şi de aici, nevoia reluării acelei Operaţii Mondiale de Longitudini.

Repetăm că, în 1933, ţara noastră a adus un aport considerabil la rezolvarea acestei probleme. Observatorul din Bucureşti posedă unul dintre cele mai mari şi perfecţionate Cercuri meridiane din lume, precum şi o lunetă reversibilă de treceri. Se impun unele completări ale aparaturii şi mai ales, procurarea a trei orologii de cuarţ şi a unui echipament complet de precisă înregistrare a timpului. Pendulele fundamentale şi cronografele existente ale Obser-

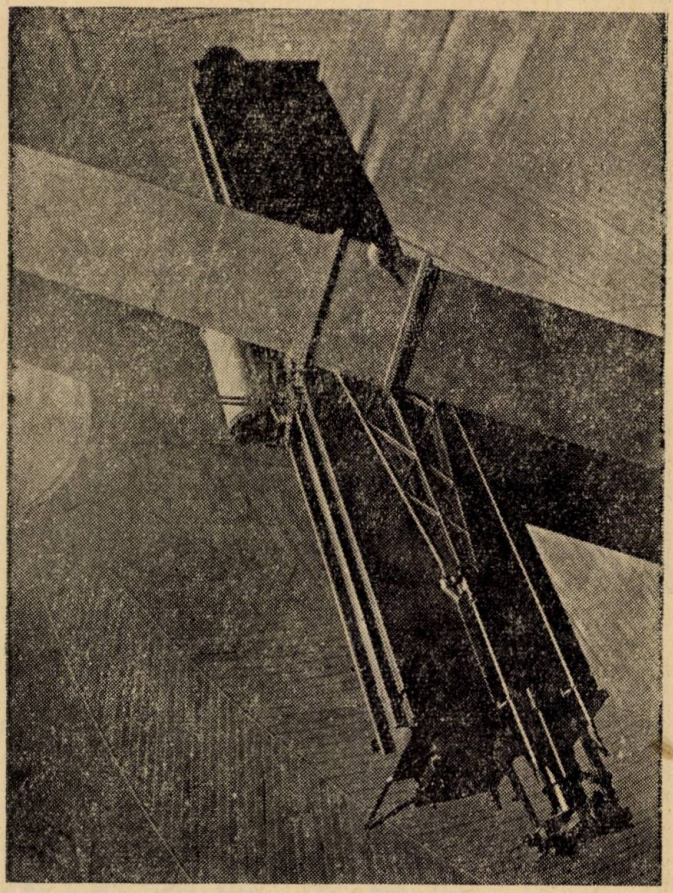


Fig. 2. Ecuatorialul Observatorului din Bucureşti.

vatorului nu mai corespund cerinţelor actuale de precizie ale tehnicii; în 1923 se cerea în observaţii, precizia unei sutimi de secundă de timp, astăzi se cere zecimea de miime de secundă, deci o precizie de 100 de ori mai mare.

O altă problemă esenţială este aceea a geoidului, problema studiului formei globului terestru. Pînă acum, geoidul a fost determinat cu precizie, numai pe uscat, pe întinderile marilor continente, America, de o parte, Europa, Africa şi Asia, pe de alta, nu însă şi pe oceane. Este deci normal ca cei doi geoizi să prezinte unele diferenţe între ei: problema racordării lor pentru obţinerea unui geoid unic, valabil pentru tot Pămîntul, este încă nesoluţionată. Determinări neîntrerupte de longitudini şi latitudini, în cît mai multe puncte, pot contribui la soluţionarea acestei probleme.

În problema determinării geoidului se propune aplicarea unei metode noi în cursul A.G.I., o metodă care foloseşte observaţiile Lunii sau ale sateliţilor artificiali, făcute în mai multe puncte diferite de pe Pământ, metoda triangulaţiilor în spaţiul extraterestru. Aceste observaţii se fac cu un instrument special numit camera lunară, care se adaptează la o lunetă fotografică de lungime focală mai mare.

Observatorul din Bucureşti, dispunînd de o lunetă ecuatorială de 6 m lungime focală, ar putea participa cu mare folos şi la aceste noi cercetări, dacă i s-ar procura acea cameră lunară, standardizată de U.A.I. şi acele orologii de cuarţ pentru măsurarea timpului.

Încă o problemă de mare însemnătate este aceea a emiterii şi înregistrării semnalelor orare ştiinţifice de cea mai înaltă precizie, cu scopul de a se determina viteza de propagare a undelor radioelectrice, precum şi înălţimea ionosferei, pe care se fac reflexiile undelor.

Observatorul din Bucureşti ar putea de asemenea participa cu ecuatorialul său de 6 m, la cercetările legate de observaţiile sateliţilor artificiali, la măsurările de densităţi ale aerului, la studiul ciocnirilor sateliţilor artificiali cu micrometeoriţii ce vor întîlni pe orbitele lor.

În fine, pentru participarea la cercetările solare este necesară înzestrarea serviciului solar al Observatorului din Bucureşti cu un spectrohelioscop sau filtru monocromatic.

În ceea ce priveşte lucrările de Seismologie, vom arăta că Secţia de seismologie a Observatorului din Bucureşti colaborează de 22 de ani, în mod neîntrerupt, cu Asociaţia Internaţională de Seismologie şi Fizica Interiorului Globului.

Numeroase şi prieteneşti sînt invitaţiile de colaborare din partea U.G.G.I., a Asociaţiei Internaţionale de Seismologie şi a Comisiei europene de seismologie, şi iată de ce: în ţara noastră există unul din cele mai interesante focare de cutremure adînci din lume, acela din munţii Vrancei, la cotitura Carpaţilor, caracterizat prin proprietăţile sale de persistenţă şi izolare. Epicentrul acestui focar, adînc de aproape 150 km, rămîne necontenit cam în acelaşi punct, iar în vecinătatea sa nu se mai produc alte cutremure adînci. Al doilea focar din lume, cam de acelaşi gen, este cel din munţii Hindu-Kush, într-o regiune încă inaccesibilă în Afganistan.

Pe baza datelor de înregistrare a cutremurelor din Vrancea, se pot face cele mai frumoase studii cu privire la structura interiorului Pământului şi a scoarţei sale, subsolul ţării noastre. Dar pentru aceasta este necesar să se instaleze un număr suficient de staţii seismografice în regiunea din jurul epicentrului.

După marele cutremur din 1940 din Vrancea, secţia de seismologie obţinînd unele fonduri băneşti, a reuşit să înfiinţeze treptat, în provincie, 5 staţii seismografice, în afară de staţia centrală din Bucureşti, înzestrate cu puţine seismografe, construite în atelierul Observatorului, destul de bune, dar prea puţin sensibile pentru a putea înregistra şi cutremure mai slabe.

Am arătat lucrările generale programate de Grupul de lucru de seismologie pentru A.G.I.

Secţia de seismologie a Observatorului din Bucureşti ar putea participa la cea mai mare parte din ele, dacă i s-ar procura o serie de penduli seismici de cea mai mare sensibilitate, cel puţin trei echipamente, de penduli seismici cu perioade scurte, dacă i s-ar înmulţi staţiile seismografice din provincie, în jurul epicentrului din Vrancea. Este de asemenea imperios necesar să se construiască o staţie centrală la cîmp deschis.

Cercetările de seismologie din cursul A.G.I. vor urmări studiul constituției scoarței terestre sub teritoriul țării noastre, studiul seismicității țării noastre, pentru rezolvarea problemei de mare importanță practică, a raionării seismice, în vederea avizelor seismice ce urmează a fi date la amplasarea marilor clădiri industriale, a podurilor, viaductelor etc.

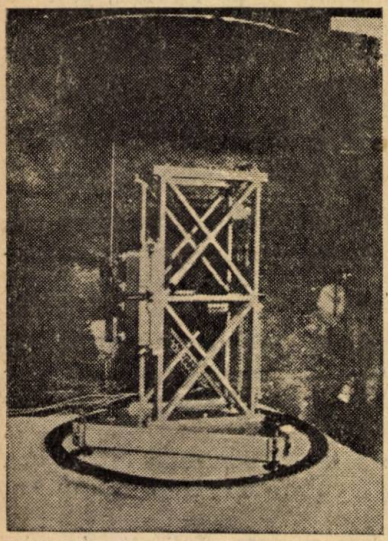


Fig. 3. Pendulul seismic Galițin.

Din cele expuse pînă acum, rezultă că Observatorul din București poate aduce o contribuție substanțială la succesul A.G.I. S-a dovedit acest fapt și în 1932 și de atunci încoace.

Guvernul țării noastre a afectat, pentru anul 1956 și cei următori, fondurile necesare utilării Institutelor participante la lucrările A.G.I., cu cele mai moderne instrumente.

Instrumentele noi cu care va fi înzestrat Observatorul, vor funcționa nu numai în timpul celor 18 luni ale A.G.I., ci și după încheerea Anului Geofizic, și vor ajuta în viitor la dezvoltarea unor observații geofizice largi și planificate, la dezvoltarea științei despre Pămînt.

Măsurile pregătitoare întreprinse pînă acum de cele mai mari țări din lume, pot fi considerate ca o garanție a succesului viitorului An Geofizic Internațional, a succesului acestui minunat exemplu de colaborare internațională permanentă, de deosebită însemnătate practică pentru binele întregii comunități umane.

DIN ISTORIA CALCULELOR ELEMENTARE

ALEXANDRU TOTH

OMUL de azi trăiește în lumea calculelor și a cifrelor. Problemele construirii socialismului se lovesc la fiecare pas de calcule. Planificarea producției, tehnica modernă, științele, contabilitatea întreprinderilor ca și a familiilor cer calcule și iar calcule. Aceste calcule cu procedeele actuale, moderne, se efectuează cu destulă ușurință.

Dar oare cînd și unde au apărut calculele și cum s-a ajuns la tehnica lor atît de practică și comodă de azi? Cum calculau anticii?

Odată cu apariția diviziunii muncii în societatea omenească, creșterea productivității și apariția schimbului, a apărut și necesitatea calculelor. A apărut o contabilitate primitivă și în baza experienței reunite a multor generații, s-a elaborat o tehnică elementară de calcul. Dar despre aceste dibuiri, experimente, socoteli începătoare nu s-a păstrat nici o mărturie.

Cele mai vechi documente scrise cu privire la istoria calculelor provin din Mesopotamia și datează din mileniul al treilea î.e.n. În văile fertile ale Tigrului și Eufratului, au apărut primele state sclavagiste la începutul mileniului al

patrulea î.e.n. şi aici s-a înfiripat cea mai veche civilizaţie cunoscută, civilizaţia sumerienilor şi apoi a cuceritorilor mai noi, akadieni, asirieni, etc. Această cultură este bine cunoscută din miile de tăbliţe de argilă acoperite cu o scriere specială, caracteristică, scrierea cuneiformă. Săpături sistematice au adus la suprafaţă zeci de mii de astfel de tăbliţe. Astfel, la Ninive a fost dezgropată biblioteca regelui Assurbanipal, cca. 22 000 tăbliţe.

A fost dezgropată biblioteca templului de la Nippur, centrul cultural al Babiloniei, care cuprindea aproximativ 23 000 tăbliţe, etc. Totuşi nu s-a păstrat nici un manual didactic tratînd despre ştiinţa calculelor. S-a păstrat un mare număr de rezultate disparate. Din tăbliţele ajunse la suprafaţă se constată că popoarele din Mesopotamia au creat încă de la începutul mileniului al treilea î.e.n., o numeraţie perfecţionată pentru acea vreme, un sistem de numeraţie poziţional, cu baza 60, fapt care uşura mult calculele. Pentru scrierea numerelor se întrebuinţau nişte semne cuneiforme. Tot atunci se folosea un sistem dezvoltat de măsuri, foarte practic, adaptat acestei numeraţii. Cunoştinţele matematice s-au dezvoltat în mod uimitor. Se puteau rezolva probleme complicate, care duc la ecuaţii liniare cu 5—10 necunoscute, la ecuaţii patratice sau cubice. Ştiinţa era cu totul în slujba tehnicii şi a aplicaţiilor.

În acelaş timp în care se dezvolta civilizaţia sumeriană, înflorea o civilizaţie străveche şi în Egipt. Viaţa economică dezvoltată, bine organizată, a Egiptului a pregătit dezvoltarea calculelor. Ştiinţa dispune de un număr relativ mic de documente matematice egiptene. Singurele documente scrise referitoare la calcule egiptene sînt relativ recente şi datează din Imperiul mijlociu. Cel mai vechi document este aşa numitul «Papirusul de la Moscva», datînd aproximativ din anul 1850 î.e.n. Papirusul cel mai mare (20 m/30 cm) numit «Manualul lui Ahmes», datează din jurul anului 1700 î.e.n. În aceste papirusuri sînt date exemple concrete de rezolvări de probleme din domeniul aritmeticii, geometriei şi algebrei. În ele apare o tehnică remarcabilă, abilă totodată, care pare rezultatul unei tradiţii îndelungate, dar nici o preocupare teoretică, nici o tendinţă de generalizare. Egiptenii foloseau numeraţia decimală şi cunoşteau calculele cu fracţii. Pentru redarea numerelor în scrierea străveche, ieroglifică, se întrebuinţau anumite semne ieroglifice, scrise după principiul primitiv, aditiv şi iarăşi alte semne, scrise după un alt principiu, în scrierile lor mai noi, numite ieratice sau demotice.

În India dezvoltarea matematicii s-a desfăşurat paralel cu cea din Egipt şi Babilon. În vechile cărţi hinduse, numite Vede, compuse cu 1—2000 ani î.e.n. şi prelucrările lor, aşa numitele Sutre, găsim o numeraţie zecimală foarte dezvoltată, care presupune şi un calcul dezvoltat. În limba sanscrită sînt termeni speciali pentru puteri neînchipuit de mari ale lui 10, pînă la 10^{17}. Aportul cel mai preţios al hinduşilor la clădirea matematicii este elaborarea sistemului poziţional absolut, zecimal, sistem folosit şi astăzi pentru scrierea numerelor cu ajutorul a zece semne, care au devenit cifrele noastre. Perioada de înflorire a matematicii indiene este recentă, este perioada cuprinsă între secolele V—XII e.n.

Alte civilizaţii, care joacă un rol în dezvoltarea numeraţiei, a calculelor, au înflorit în mileniul I î.e.n., în Fenicia şi ţările înconjurătoare, dar despre calculele lor nu s-au păstrat documente.

China, de asemenea, are o cultură străveche, unde a apărut o scriere originală, şi un sistem de numeraţie zecimal dezvoltat. În China începînd din secolul al II-lea î.e.n. apar lucrări matematice originale, care sintetizează rezultatele

secolelor precedente. Din aceste lucrări se observă că chinezii antici au elaborat o tehnică calculatoare avansată. Deja în aceste lucrări timpurii apar extrageri de rădăcini pătrate şi cubice.

Cam prin secolul al XII-lea î.e.n., grecii s-au stabilit în insulele mării Egee şi pe cele două coaste ale acestei mări. Ei duceau o viaţă maritimă. Oraşele lor s-au îmbogăţit şi au devenit centre culturale, cu un rol însemnat în istoria matematicii. Au fost în contact strîns cu Orientul şi astfel ştiinţa lor la început, a fost influenţată de ştiinţa babiloniană şi egipteană, deşi aceste influenţe nu pot fi precizate. În scurt timp însă, crează o ştiinţă cu totul originală. Împrumută scrierea feniciană. Literele alfabetului împrumutat au fost întrebuinţate şi pentru scrierea numerelor (literele greceşti).

În vehicularea cunoştinţelor antice au un rol important matematicienii Asiei Centrale, ai Orientului Apropiat şi arabii aşezaţi în peninsula Iberică. Aceşti matematicieni sînt amintiţi des sub numele colectiv de « arabi », fiindcă scriau în limba arabă. Cultura arabă a înflorit în secolele IX—XV ale e.n. Operele clasice greceşti şi indiene au fost cunoscute în Europa prin mijlocire arabă. Aceşti matematicieni au perfecţionat scrierea numerelor, introducînd fracţiile zecimale precum şi tehnica calculului moştenit de la indieni.

În secolele XII—XV cunoştinţele antice şi orientale se răspîndesc şi în Europa. Ajunse în Europa, calculele primesc formele lor definitive pe care le au azi.

Tehnica calculului numeric

Există un anumit paralelism între evoluţia numeraţiei şi perfecţionarea calculului numeric. Totodată, atît dezvoltarea numeraţiei cît şi aceea a calculului, are istoria sa proprie.

Calculul mintal. La toate popoarele, în etapele lor culturale mai inferioare, calculul mintal a jucat un rol mult mai însemnat decît calculul scris. La început era singurul mod de calcul şi numai în etapele culturale următoare i s-a adăugat întrebuinţarea unor semne. Dar chiar şi mai tîrziu, timp îndelungat, exerciţiul calculului scris a fost rezervat unei minorităţi instruite, ceilalţi mărginindu-se la utilizarea numeraţiei mintale şi la calculul concret.

Calculul mintal a fost mult preţuit de popoarele din antichitate. Într-un text din Egiptul dinastiei a XIX-a (din jurul anului 1300 î.e.n.) citim următorul avertisment adresat elevilor. « Cînd calculezi în cap, nu scoate nici un cuvînt ». Aristotel vorbeşte despre marea valoare a calculelor mintale. În şcolile romane, elevii memorizau, scandau tabele de adunare şi înmulţire: « Unus et unus duo, duo et duo quator, bis bina quator », . . .

După adoptarea sistemului numeric cu bază, numeraţia orală şi calculele mintale, ajung foarte repede la o formă aproape modernă. Astfel, la vechii indieni, s-a format un calcul pur mintal bine cristalizat, căruia îi datorăm şi metodele de calcul subtile, de azi.

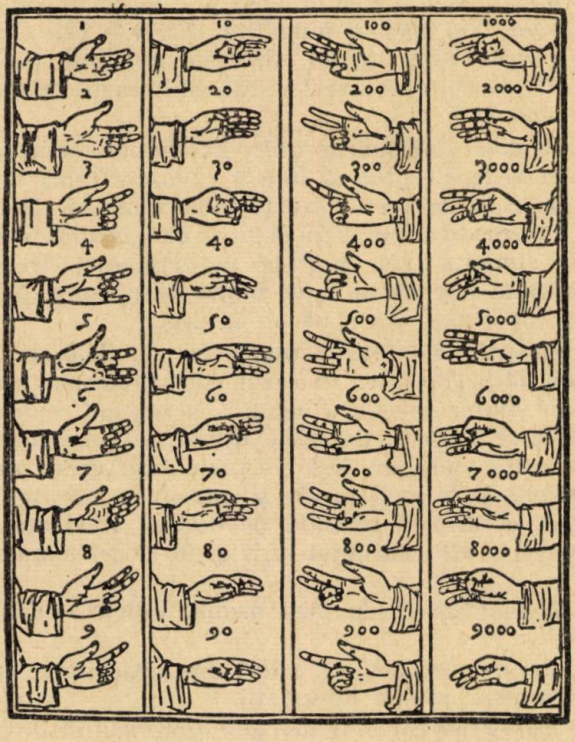
Îmboldit de acest progres, s-a dezvoltat rapid şi calculul concret: calculul pe degete şi pe alte mulţimi concrete. S-au ivit instrumente de calcul, care numai în mici detalii, fără importanţă, se deosebeau de aparatele cu bile (numărătoarele) pe care calculează copiii noştri în şcolile elementare.

Dimpotrivă, calculul scris rezervat pentru operaţii savante, a urmat evoluţia sistemului numeric.

Calculul concret. Calculul pe degete (o mulţime concretă permanent la îndemîna calculatorului) este de origină foarte veche. Numărarea pe degete

este foarte naturală şi expresivă, ea putînd fi pricepută chiar de popoare de diferite limbi. Ea a fost utilizată de popoarele vechi ale Orientului, de babilonieni, egipteni, de greci ş romanii antici. Ne întîlnim cu aceste calcule la multe popoare şi triburi de azi.

Romanii au perfecţionat sistemul de a reprezenta numerele cu ajutorul degetelor. Ei ştiau să reprezinte cu ajutorul îndoiturilor degetelor celor două



mîna stîngă mîna dreaptă

Fig. 1. Reproducţie din cartea lui Luca Paciuoli, Summa..., 1494.

mîini, numerele pînă la 10.000 sau chiar mai departe. Acest sistem se învăţa probabil în şcoli. Mai mulţi scriitori romani vorbesc despre acest sistem. Astfel, Macrobius vorbeşte despre statuia zeului cu două feţe, Janus, ale cărui degete reprezintă numărul 365, etc.

De la romani acest sistem a trecut la popoarele europene unde s-a menţinut pînă la răspîndirea calculelor arabe. Găsim descris acest sistem în opera călugărului scoţian Beda (672—735 e.n.), într-un capitol din cartea sa «De temporum ratione» (fig. 1).

Calculele pe degete au jucat un rol important atît la popoarele din antichitate, cît şi la europenii şi arabii din evul mediu.

Degetele pot fi întrebuinţate ca instrument de calcul. Se reprezintă pe degete numerele în chestiune şi după calcule uşoare de legătură, se citeşte de pe ele rezultatul. Fie de exemplu, de calculat 6×8. Se îndoaie la cele două mîini, atîtea degete cu cît factorii depăşesc numărul cinci ($6 = 5 + 1$; $8 = 5 + 3$). Adică la mîna stîngă 1 deget, iar la mîna dreaptă 3 degete.

Numărînd degetele îndoite, $3 + 1 = 4$, obținem zecile din rezultat: 40. Înmulțind între ele numărul degetelor rămase întinse: $4 \times 2 = 8$. obținem unitățile. Deci rezultatul este 48. La aceste calcule se cere cunoașterea tablei înmulțirii pînă la 5×5, nimic mai mult.

Pentru a efectua o înmulțire de felul 13×14, se procedează în modul următor: se îndoaie la cele două mîini atîtea degete cu cît factorii întrec numărul 10. Adică la mîna stîngă 3 și la dreapta 4. Acestea împreună fac 7. Cifra 7 este numărul zecilor, 70. Făcînd înmulțira $3 \times 4 = 12$, obținem unitățile. În total deci: $70 + 12 = 82$. Astfel obținem numărul cu care rezultatul întrece numărul 100. Rezultatul este deci 182. Și în cazul acestor calcule ajunge tabla înmulțirii pînă la 5×5.

Calculele pe degete sînt foarte utile, în special oamenilor simpli, fără carte. Să avem în vedere faptul că fără a cunoaște tabla înmulțirii nici noi n-am putea face calcule. Astăzi se învață tabla înmuțirii la o vîrstă fragedă. Dar mai demult era socotit ca un lucru greu. În evul mediu, rezultatul înmulțirii 6×8 se lua din anumite table (mensae pythagoricae). Deci ne putem da seama cu cîtă bucurie era primit orice mijloc care ușura calculele. Astfel se explică și marea importanță a calculelor pe degete.

Adunările, scăderile, înmulțirile numerelor de două cifre se făceau cu ajutorul degetelor, fără greutate. În cazul operațiilor mai complexe, această figurație servea de ajutor calculelor mintale, permițînd reprezentarea rezultatelor pe măsură ce se formau. Calculele destul de complicate, referitoare la calendare sau la astronomie, au fost efectuate prin acest procedeu. Această tradiție s-a menținut și în evul mediu și numai cu apariția calculului scris, modern, a început să dispară calculul pe degete. Influența sa se regăsește în unele practici vechi ale calculului scris și în alegerea unor forme de cifre primitive.

Este locul să amintim că în evul mediu, «digiti» însemna unitățile și «articuli», zecile.

Din păcate, despre metodele de calcul din antichitate, cu ajutorul degetelor, s-au păstrat prea puține informații.

Ca urme de aritmetică concretă mai amintim nodurile de pe fire sau funii, corzile cu noduri pe care le făceau în deosebi, chinezii antici și peruvienii (fig. 2). În vechile cărți chineze sînt pomenite aceste «noduri» «cu ajutorul cărora se guverna în antichitate». Și Lao-țe (secolul al VI-lea î.e.n.) vorbește de ele.

Originea instrumentelor de calcul se află de asemenea, în antichitate. Caldeenii, egiptenii, grecii și romanii, mai puțin inițiați în calculul scris, utilizau niște planșe de calcul. Grecii le numeau αβαξ, iar romanii, *abacus*. Din unele relatări ale scriitorilor din antichitate, se poate afirma că aceste table aveau o întrebuințare foarte largă. Aceste abacusuri erau niște planșe, pe care erau desenate sau crestate, niște coloane paralele, pe care se mutau niște jetoane, de obicei, pietre. De aici se explică și numele de φηφοφορια sau «calculi» (pietre), dat calculelor și tot de aici provine termenul nostru de «calcul».

S-au păstrat prea puține documente referitoare la aceste instrumente. Săpăturile n-au adus la suprafață nici un instrument de acest fel din vremea babilonienilor sau egiptenilor. S-au păstrat în total, o tablă de marmură, găsită în insula Salamis, tablă întrebuințată de greci (fig. 3) și două exemplare originale de abacus romane (fig. 4). Comparîndu-le cu abacus-urile din

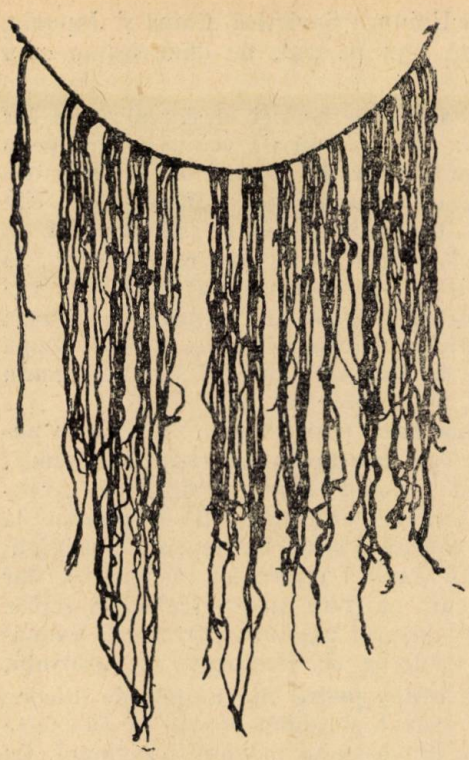


Fig. 2. Quipu din Peru. Unităţile de diferite ordine sînt exprimate prin noduri. Se observă că nodurile sînt aşezate pe fire la anumite înălţimi. După locul pe care ocupă, nodurile primesc valori poziţionale. Capetele firelor sînt rupte.

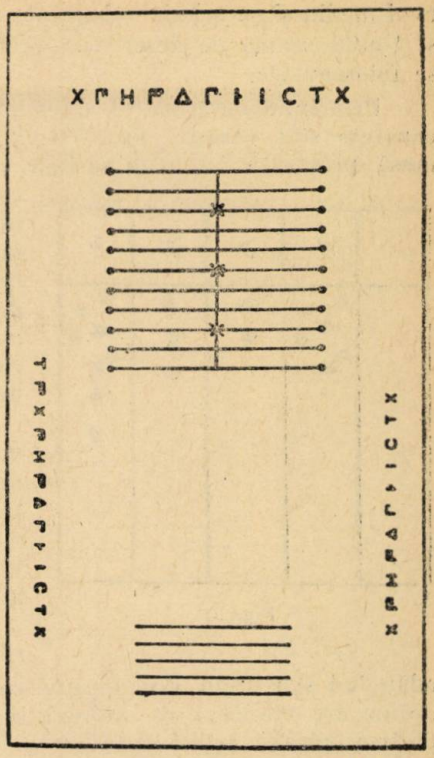


Fig. 3. Tabla de calcul de la **Salamis.** M: 149 × 75 × 4,5 cm.

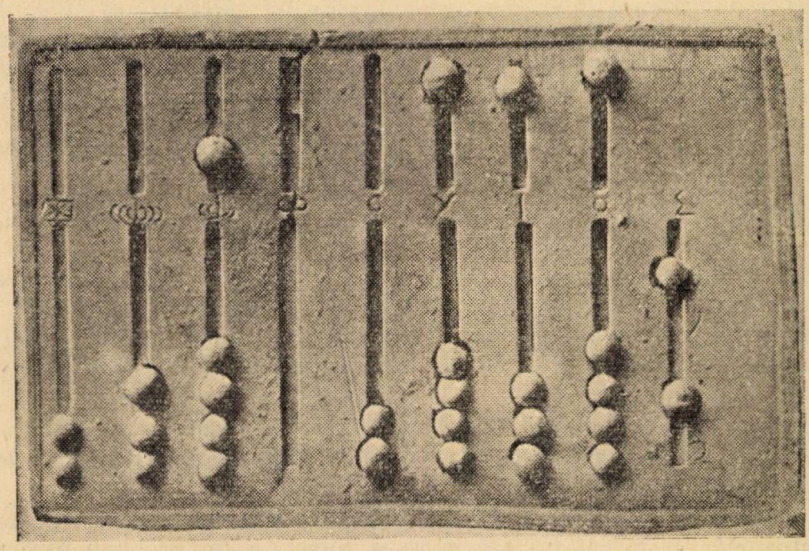


Fig. 4. Abacus roman.

evul mediu şi cu cele întrebuinţate azi în Uniunea Sovietică, China şi Japonia, şi ţinînd seama de descrierile vechi care s-au păstrat, ne dăm seama cum se foloseau ele.

Principiul de bază al diferitelor abace este acelaşi, deşi realizările lor concrete sînt variate. Iată un exemplu: pe o planşă de scîndură sau pe o masă presărată cu nisip se face schema riglată din figura 5. În diferitele coloane obţinute se pun atîtea pietre cîte unităţi de diferite ordine se cuprind în numărul pe care vrem să-l reprezentăm. În fig. 5 este reprezentat numărul 6238. Aici deci, pietrele au valori definite de poziţia lor; adică, valorile pietrelor variază după coloana în care sînt puse şi pot reprezenta unităţi, zeci, sute, mii, etc.

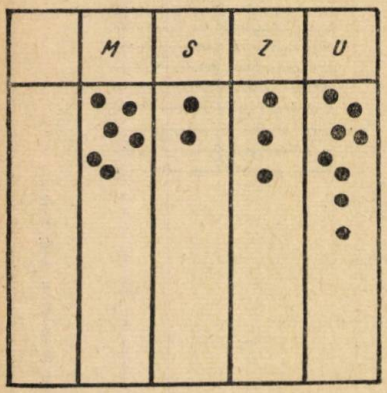


Fig. 5.

Chiar acele popoare care în scrierea numerelor nu cunoşteau scrierea poziţională, utilizînd astfel de abace profitau de avantajele scrierii poziţionale. Să ne gîndim la cifrele romane, cifre foarte simple (simplitatea lor explică marea lor răspîndire), dar nici decum potrivite pentru calculele scrise.

Cu ajutorul acestui instrument, adunările şi scăderile se efectuează cu uşurinţă, adăugînd sau luînd din fiecare coloană atîtea pietre cîte unităţi de diferite ordine are numărul de adunat sau de scăzut şi ţinînd seamă că 10 pietre dintr-o coloană echivalează cu o piatră din coloana imediat superioară. Cu acest abac se pot efectua numai adunări şi scăderi. În cazul înmulţirilor, produsele parţiale se efectuau mintal sau se luau din tabele ajutătoare şi pe abac se efectua numai adunarea lor.

Pe abacul de la Salamis (fig. 3) găsim o diviziune întrucîtva diferită, cifrele corespunzătoare diferitelor coloane indicînd subdiviziuni în pentade şi nu numai în decade. Astfel şi valorile jetoanelor capătă valori corespunzătoare. În partea dreaptă are rezervate patru coloane pentru calculele cu fracţii (fracţiuni de drahma, unitatea lor monetară). Cifrele care indică valorile pietrelor aşezate în coloanele de la dreapta tablei sînt: $\frac{1}{48}$ (X, chalcus), $\frac{1}{24}$ (T, tetartemorion), $\frac{1}{12}$ (C, hemiobolion) şi $\frac{1}{6}$ (I, obolos). Cifrele din stînga coloanelor fracţionare se referă la numere întregi (drachme): unitatea (⊢ semnul attic al drachmei), încincitul ei (Γ pentru πεντε), apoi zecile (Δ, δέκα şi ⌈Δ pentru 50), sutele (H, ἑκατον şi ⌈H pentru 500) şi miile (X, χίλιοι şi ⌈χ pentru 5000). Ultimul semn la stînga, T, indică talantul (=6000 drachme).

Nu vom intra în detalii. Menţionăm doar că grecii utilizau abace mari de marmură, iar romanii, planşete portative mai mici, adaptate calculelor cu fracţii duodecimale (fig. 4).

În secolul al X-lea, în Europa medievală, apar nişte abace pe care, în locul jetoanelor vechi (pietre sau cuie) se pune un singur jeton care poartă

o cifră (apices). În secolul al XIII-lea, aceste abace vor suferi încă alte modificări.

Înlocuind coloanele de pe abace prin corzi, de-alungul cărora lunecă bile, se obţine bulierul (numărătoarea) de azi (fig. 6).

Este de notat că în unele ţări, aceste buliere sînt foarte răspîndite şi azi. Astfel, în Uniunea Sovietică se întrebuinţează bulierul obişnuit, numit

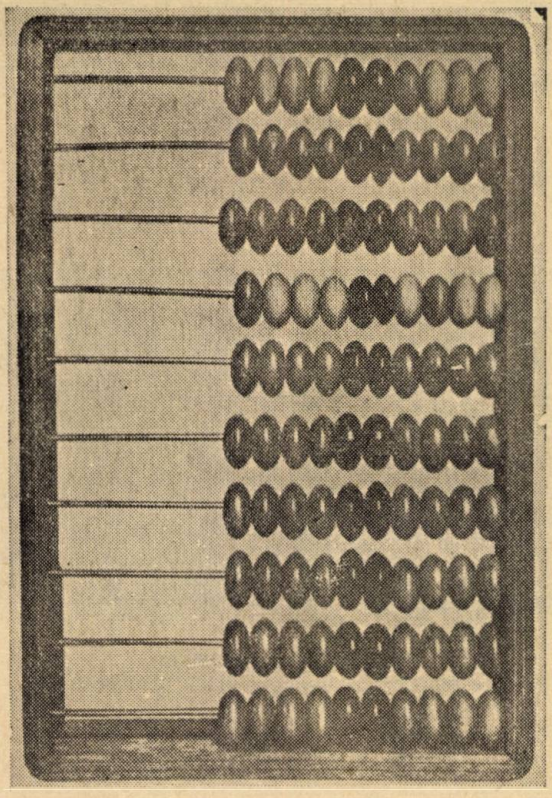


Fig. 6. Şcioti rusesc, M: 26×43 cm.

în rusește «şcioti» (fig. 6), pe care turcii îl numesc «coulba», iar armenii «choreb». În Japonia se întrebuinţează sorobanul (fig. 7) construit după modelul abacului roman, iar în China, începînd din sec. XII, se întrebuinţează suan-pan-ul (fig. 8) construit după un principiu analog. Sorobanul derivă de la suan-pan şi a fost introdus în Japonia în secolul XVI. În Orient, oamenii se servesc de acest instrument cu o dexteritate şi rapiditate uimitoare.

Este locul să pomenim încă de bastonaşele de calcul ale chinezilor antici (cheau), cu ajutorul cărora se efectuau calculele cu mult înainte de apariţia suan-pan-ului (fig. 9). În jurul anului 600 e.n. aceste bastonaşe au fost preluate şi de japonezi sub numele de sangi şi întrebuinţate pînă în timpurile cele mai noi, ele servind nu numai pentru efectuarea calculelor, ci şi pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice.

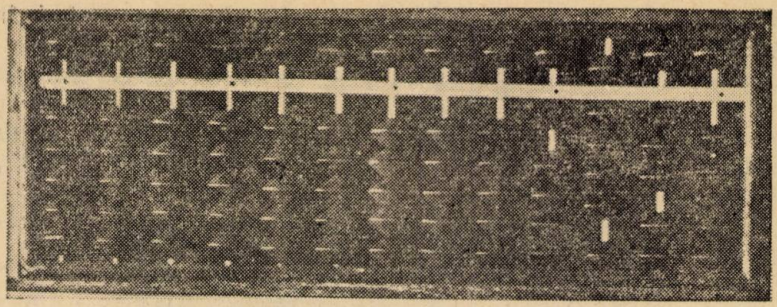


Fig. 7. Sorobanul japonez.
Este reprezentat numărul 1930. M: 18×17 cm.

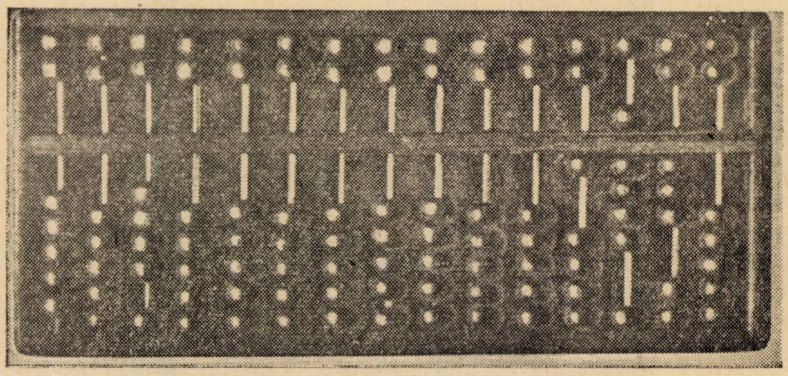


Fig. 8. Suan-pan chinez.
Este reprezentat numărul 1930. M: 22×10 cm.

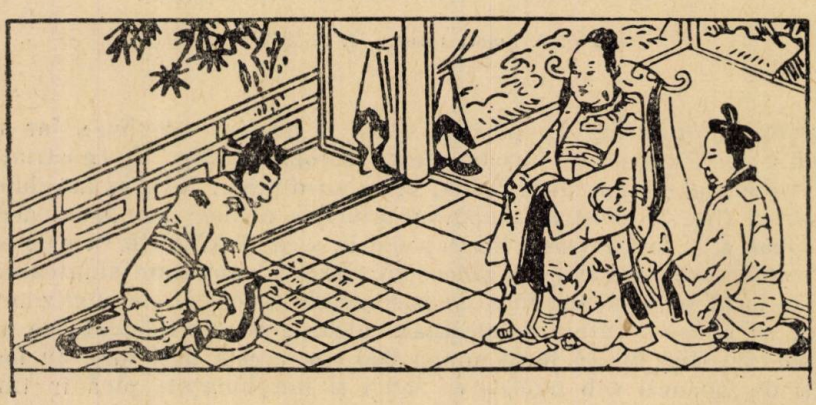


Fig. 9. Calculatorul în fața tablei de calcul cu bastonașe.
Reproducție dintr-un manual japonez din secolul XVIII.

Calculele făcute în scris

Studiind dezvoltarea calculului scris, vom constata tendința continuă de simplificare și mecanizare a calculelor, precum și tendința de a face scrierea cît mai comodă. Deci, dezvoltarea calculului scris este condiționată atît de simplificarea adusă calculelor, cît și de comoditatea pe care o aduce scrierii.

Calculele egiptene. Vom începe cu numerațiile cele mai simple, mai primitive, cu acele care sînt construite conform unui principiu aditiv, cum este numerația egipteană. În sistemul de numerație egiptean există semne distincte pentru unitățile de diferite ordine: unități, zeci, sute, etc. Numerele se scriu repetînd și juxtapunînd aceste semne. Juxtapunerea semnelor indică adunarea lor.

În acest sistem, adunările și scăderile se fac ușor, operînd succesiv pe semnele de diferite ordine, adăugînd sau suprimînd un număr oarecare de semne.

Pe un text egiptean apare și un semn special de adunare, două picioare îndreptate înainte. Tot acolo, picioarele îndreptate în sens contrar erau semnele scăderii. Ei aveau și un semn de egalitate, litera *m*.

În concepția egiptenilor, adunarea și scăderea nu sînt două operații distincte. Scăderea era considerată tot un fel de adunare, calcul de « sekem » (skm), întregire. Legătura dintre operațiile inverse încă era foarte strînsă.

Înmulțirea se făcea prin duplicările succesive ale deînmulțitului și adunarea produselor astfel obținute. Să copiem cîteva exemple din manualul lui Ahmes:

(15.13)

/ 1	15
2	30
/ 4	60
/ 8	120
total	195

(19:8)

1	8
/ $\bar{2}$	16
$\bar{2}$	4
/ $\bar{4}$	2
/ $\bar{8}$	1

adică: $19:8 = 2 + \bar{4} + \bar{8}$

($\bar{n}$ înseamnă $\frac{1}{n}$).

Metoda dublării este un procedeu caracteristic egiptean. Dublările, respectiv înjumătățirile, joacă un rol fundamental în tehnica calculelor la egipteni. Ne putem da seama de un astfel de artificiu, observînd că orice număr întreg n se poate scrie sub forma $n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + \ldots$, unde $\alpha > \beta > \ldots$. Pentru a calcula produsul lui n cu un alt număr întreg m se pot efectua mai întîi α dublări ale lui n, apoi β etc. și la urmă se pot aduna rezultatele.

La fel se poate face și împărțirea, scăzînd din deîmpărțit atîtea produse de forma $2^{\alpha}m$, $2^{\beta}m, \ldots$ pînă ce se obține zero sau un număr inferior lui m.

Împărțirile sînt considerate ca înmulțiri cu înmulțitorul necunoscut. Astfel, pentru a cere să se împartă 77 prin 7, manualul spune: « calculează cu 7 pentru a obține 77 »

În înmulțirea de mai sus, factorul 13 este înlocuit cu o sumă de puteri ale numărului 2, $(1 + 4 + 8)$. Produsul se calculează adunînd produsele parțiale corespunzătoare obținute de calculator.

Înmulțirea cu 10 nu întîmpină nici o greutate, fiindcă pentru executarea ei era de ajuns să se înlocuiască în simbolurile deînmulțitului 10^n cu 10^{n+1}.

La împărțiri avem de a face cu o metodă care corespunde exact metodei dublării. În exemplul al doilea, de mai sus, la împărțirea 19:8 observăm că

prin dublarea lui 8 se ajunge la 16. Apoi, prin înjumătăţiri succesive, se obţin unităţile necesare pentru a-l completa pînă la 19 (16 + 2 + 1 = 19).

Este de remarcat că calculele care se bazează pe aceste dublări dau un caracter primitiv matematicii egiptene.

În matematica egipteană apare şi noţiunea de număr patratic. Cu ajutorul lor puteau calcula ariile patratelor în funcţie de laturi. Egiptenii au şi un termen pentru ridicarea la patrat. Ei puteau rezolva şi problema inversă: să găsească rădăcina patrată dintr-un număr dat. În « Papirusul din Moscva » apare şi un termen special pentru rădăcina patrată şi chiar un simbol al extragerii rădăcinii patrate.

Calculele babiloniene. Matematica babiloniană se caracterizează prin larga întrebuinţare a tablelor de numere şi amploarea calculelor numerice. Joacă un rol deosebit diferitele lor tabele, pe care le-au aplicat cu mare măestrie. Tabele de numere reciproce, tabele de înmulţire, tabele cu pătratele numerelor, tabele cu rădăcini patrate, tabele cu rădăcini cubice, tabele de sume de patrate şi cuburi ($n^2 + n^3$), etc. Cu ajutorul lor au rezolvat probleme surprinzător de grele, pentru rezolvarea cărora matematica modernă recurge la sisteme de ecuaţii de grade superioare.

Pentru operaţiile cele mai simple — adunarea şi scăderea — s-au păstrat puţine tabele. Pentru efectuarea lor, probabil, întrebuinţau abace. De altfel, într-un sistem de scriere în care numerele se scriu juxtapunînd atîtea simboluri ale unităţii şi ale zecilor, cîte se cuprind în numerele pe care vrem să le scriem (între 1 şi 59), aceste operaţii se reduc la adăugarea sau suprimarea unui număr corespunzător de simboluri. Această metodă se poate extinde şi la numerele care conţin unităţi sexagesimale de ordine superioare.

Pentru înmulţiri întrebuinţau tabele calculate odată pentru totdeauna; tabele asemănătoare tablei noastre de înmulţire, dar care să se extindă pînă la 59×59.

Pentru efectuarea împărţirilor recurgeau la tabele de numere reciproce. Pentru a împărţi pe b cu a se înmulţeşte b cu reciproca lui a (să o notăm $\bar{a}$). Acest $\bar{a}$ se ia dintr-o tabelă. Deci tabelele cu numere reciproce permit transformarea unei împărţiri într-o operaţie mai uşoară, într-o înmulţire.

Este de observat că valorile poziţionale ale numerelor nu sînt fixate în scrierea babiloniană. Deci, în aritmetica babiloniană, produsul unui număr prin reciproca lui nu este egal numai cu unitatea simplă, ci şi cu orice număr de forma 60^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Numerele 7, 11, etc., care n-au numere reciproce regulate (fracţie finită) în sistemul sexagesimal, în cele mai multe tabele cu numere reciproce sînt omise. În sistemele de unităţi metrologice babiloniene, care de cele mai multe ori au baza sexagesimală, numerele 7, 11, etc. sînt rar întîlnite, deci astfel de numere apar rar şi în calculele babiloniene.

Cu ajutorul tabelelor, babilonienii puteau să obţină patratele, precum şi rădăcinile patrate ale numerelor. Dar se pune întrebarea, cum au calculat rădăcinile acelor numere care nu sînt patrate perfecte. Astfel de numere nu figurează în tabelele lor. Problema care se pune este o problemă de interpolare. În textele cu probleme apar rar extrageri de rădăcini patrate din numere care nu sînt patratice. Totuşi, într-un text vestit se calculează diagonala unui dreptunghi în funcţie de laturi. În text se vorbeşte despre o poartă, d spre lăţimea şi lungimea ei. Se calculează diagonala fără a explica, sau motiva, metoda de rezolvare. De altfel, regulile de calcul nu sînt nicăeri

interpretate, nici în textele egiptene, nici în textele babiloniene. S-a discutat mult procedeul aplicat în textul în chestiune. În orice caz, avem de a face cu o metodă de aproximaţie. Textul ne dă şi două rezultate obţinute:

$$d = i + \frac{l^2}{2i} \quad \text{şi} \quad d = i + 2\,l^2 i$$

în care se notează diagonala cu d, înălţimea cu i şi lungimea cu l.

Tot cu ajutorul tabelelor ei puteau efectua ridicări la cub şi extrageri de rădăcini cubice. Cu ajutorul tabelelor se rezolvau şi unele tipuri de ecuaţii cubice. Nu intrăm în detalii.

Calcule greceşti. Grecii ne-au lăsat puţine documente referitoare la tehnica lor de calcul. Totuşi este sigur că au făcut calcule aritmetice destul de complexe. La prima vedere, sistemul lor de notare pare puţin potrivit pentru astfel de operaţii, dar matematicianul P. Tannery, care s-a ocupat de această numeraţie, ne spune că a refăcut o serie de calcule destul de complexe şi calculele făcute cu ajutorul cifrelor (literelor) greceşti nu i-au luat mai mult timp decît cele făcute cu cifrele noastre.

Adunările şi scăderile se făceau cu ajutorul abacelor sau cu ajutorul tabelelor numerice. Dar le puteau efectua şi în scris, punînd numerele unul sub altul, cum le scriem şi astăzi. Iată un exemplu dintr-un comentar al lui Eutokios:

θ·γχλζ	93636
β·γυ θ	— 23409
ξσχ ξ	70227

Înmulţirile se făceau literă cu literă, începînd cu unităţile de ordinul cel mai înalt. Produsele succesive erau formate direct cu ajutorul tabelelor. Iată schema lui Eutokios:

φοα	571
φοα	· 571
χεγ·εφ	25....
MM′	35...
γεδλοζι	5..
M″	35...
φοα	49...
λβ·ςμα	7.
M′	571
	32^m6041

Tabele speciale uşurau şi împărţirea. Dar această operaţie a fost totuşi complicată, încît numai matematicienii versaţi puteau să le efectueze. Aceste calcule se făceau pe planşe acoperite cu nisip, pe abace. Nu s-a păstrat nici o împărţire de la greci, doar împărţiri cu fracţii sexagesimale. După adoptarea măsurilor sexagesimale în astronomie, toate calculele referitoare la această ştiinţă au fost făcute după metoda babiloniană.

Grecii au găsit procedee de calcul numeric şi pentru determinarea cu aproximaţie a rădăcinilor patrate şi cubice. Sîntem slab informaţi despre aceste procedee. Matematicienii greci se fereau să redea în operele lor, latura prac-

c. 1458

tică, calculatoare. Nu cunoaştem nici un tratat care să cuprindă calculele elementare şi ca urmare, sîntem nevoiţi să recurgem la ipoteze. Nu intrăm nici aici, în detalii. Amintim numai, metoda lui Arhimede, care permite o apreciere rapidă asupra rădăcinii patrate, chiar prin calcul mintal.

Fie a_1 o primă aproximare a rădăcinii lui A. Ca nouă aproximare luăm a_2, dat de formula $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$. Repetînd procedeul, se obţine foarte rapid, o valoare aproximativă, satisfăcătoare. Este o metodă chiar mai uşoară decît metoda noastră de calcul şi poate că e regretabil că a dispărut din învăţămîntul nostru.

Calculele romane. Cifrele romane nu sînt potrivite nici pentru cele mai simple calcule. Însăşi citirea lor cere anumite calcule mintale. Diferitele complicaţii pe care romanii le-au introdus în sistemul lor de numere au făcut imposibile în practică, calculele scrise. Ei utilizau aproape exclusiv, calculele pe degete şi calculele pe abace. Dar şi acestea din urmă au fost destul de dificile cu sistemul lor fracţionar duodecimal. Maeştri speciali iniţiau pe tineri în această tehnică, care constituia o disciplină importantă a învăţămîntului.

Calculele indiene. Metodele de calcul ale indienilor sînt foarte clar expuse în cartea lui Muhamed ibn Musa Alhwarasmi (astronom din Bagdad, originar din Horezm, care a trăit în sec. IX).

Calculele elementare moderne sînt de origină indiană. Foarte experţi în arta calculului, indienii căutau să o perfecţioneze mereu. Probabil că din acest motiv au adoptat principiul poziţional babilonian, adaptîndu-l numeraţiei zecimale şi creînd astfel, numeraţia modernă.

Ei operau pe table cu nisip, unde numerele se şterg şi se corectează uşor, ceea ce înlesneşte mult calculele.

Adunarea o efectuau ca şi astăzi, cu deosebirea că adunau începînd de la stînga spre dreapta şi scriau rezultatul deasupra numerelor de adunat. În cazul cînd prin adunarea cifrelor dintr-o coloană, obţineau zeci, se modifica uşor cifra deasupra coloanei vecine, de ordin imediat superior.

Scăderea modernă este de asemenea, de origină indiană.

Pentru efectuarea înmulţirii indienii au elaborat procedee practice, scurte, procedee legate de structura poziţională a numerelor. Produsele parţiale erau aşezate unul sub celălalt, fără a le scrie treptat mai spre stînga sau dreapta, iar cifrele le adunau în direcţie oblică spre a obţine rezultatul final.

O altă metodă, numită « fulger », întrebuinţată şi astăzi de către virtuoşii calculelor, permitea scrierea dintr-odată a rezultatului sub factorii în chestiune. Exemplul următor ne va lămuri:

$$\begin{array}{r} 9576 \\ \cdot\ 4213 \\ \hline 40343688 \end{array}$$

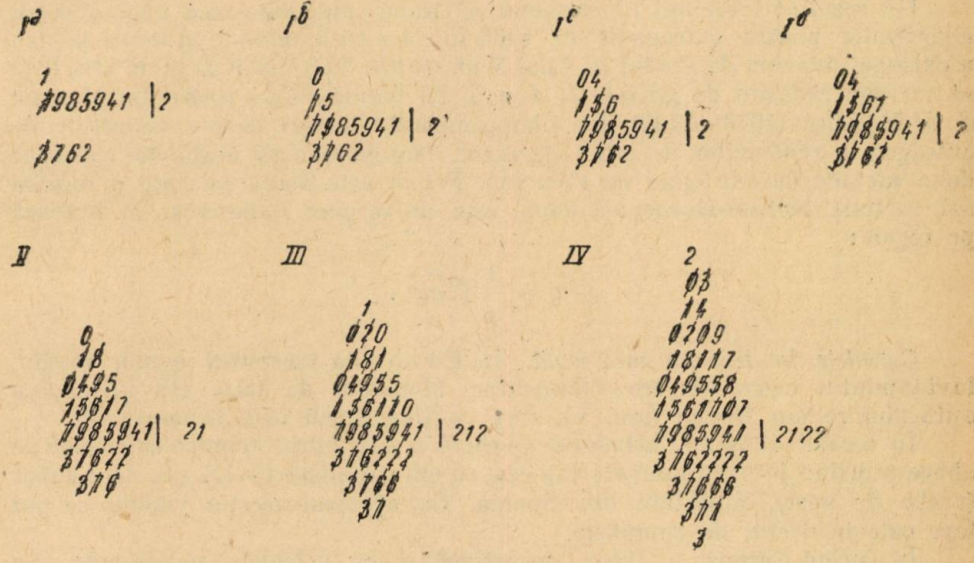
$$\begin{aligned} 3.6 &= 18 \\ 1 + 7.3 + 6.1 &= 28 \\ 2 + 5.3 + 7.1 + 6.2 &= 36 \\ 3 + 9.3 + 5.1 + 7.2 + 6.4 &= 73 \\ 7 + 9.1 + 5.2 + 7.4 &= 54 \\ 5 + 9.2 + 5.4 &= 43 \\ 4 + 9.4 &= 40 \end{aligned}$$

Cifrele tipărite mai gros dau rezultatul.

Este de origină indiană şi metoda descompunerii multiplicatorilor în factori, pentru uşurarea înmulţirii.

Pentru efectuarea împărţirii indienii au creat o tehnică mai comodă, în strînsă legătură cu sistemul poziţional. Această metodă a fost întrebuinţată pînă în secolul al XVII-lea, cînd a fost înlocuită cu metoda modernă. Tradiţiile indiene referitoare la împărţire sînt incomplete. Pentru lămurirea lor recurgem la metodele arabe, care probabil, coincideau cu cele indiene, cu deosebirea că arabii nu scriau în nisip, ci pe materii durabile. În consecinţă, nu puteau şterge şi reface cifrele cu uşurinţă, de aceea trăgeau cu o liniuţă peste cifră şi scriau deasupra ei cifra dorită. Urmărind o împărţire arabă în cartea lui Muhamed ibn Musa, ne putem da seama de felul cum rezolvau indienii împărţirile. Această împărţire este emfatică şi neclară, încît nu este de mirare că era considerat bun calculator cel care o cunoştea. Împărţitorul se scria sub deîmpărţit şi la fiecare nouă împărţire parţială a fost scris din nou, dar cu cîte o cifră mai la dreapta. Produsele parţiale începeau de la cifrele de ordinele cele mai superioare. Cifrele nevalabile ale deîmpărţitului, ca şi cifrele uzate ale împărţitorului au fost tăiate cu o linie. Iată treptele prin care se rezolva împărţirea:

7985941 : 3762 = 2122, cu restul 2977.



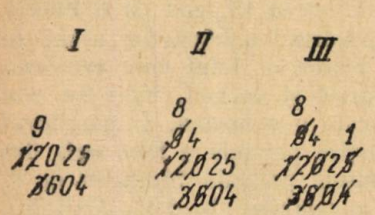
Numeroasele cifre grupate separat îngreunau mult calculul şi nu permiteau verificarea rezultatului. Schema IV este greu de cuprins cu vederea. În schimb, indienii, prin ştergerea cifrelor necorespunzătoare, făceau mare economie de spaţiu. La ei, din toată această operaţie nu se păstra decît rezultatul final: 2977/2122, încît dispărea atît deîmpărţitul cît şi împărţitorul.

Această ştergere necesită o mare abilitate, căci ea împiedică controlarea greşelilor survenite.

Indienii făceau ridicări la puteri şi extrageri de rădăcini. Ei au elaborat metode de extrageri de rădăcini mai perfecţionate decît ale grecilor, metode care se bazează pe regula generală $(a + b)^n$ şi se leagă strîns de structura poziţională a numerelor.

Calculele arabe. Arabii au preluat împreună cu cifrele indiene, şi metodele de calcul ale acestora şi le-au transmis europenilor.

Adunarea şi scăderea lor nu se deosebeau de cele ale indienilor decît prin procedee formale. Cum am mai spus, ei nu ştergeau cifrele necorespunzătoare, ci trăgeau o liniuţă peste ele.



În exemplul de mai jos, arătăm diferitele trepte prin care se rezolva o scădere: În schema finală apare rezultatul 8421, deasupra descăzutului.

Mai tîrziu, arabii de vest au început să facă operaţiile de adunare şi scădere de la dreapta.

Înmulţirea şi împărţirea le efectuau ca şi indienii, aşa cum s-a arătat în capitolul precedent.

În cartea lui Muhammed ibn Alhwarasmi apar încă două operaţii neîntîlnite la indieni: dublarea şi injumătăţirea. Probabil că este o moştenire egipteană, ajunsă la ei prin intermediul grecilor.

Un rezultat însemnat al matematicii arabe este elaborarea unor operaţii algoritmice pentru extragerile de rădăcini. Au găsit metode generale pentru a extrage rădăcina de gradul *n*. Abul Wafa (940—997) din Kuhistan, ştia deja să extragă rădăcini de gradele 3, 4 şi 5. Al Biruni (973—1048) din Horezm şi Al-Hajjami (1048—1122) din Chorasan scriu lucrări despre operaţiile de extragere a rădăcinilor de ordin oarecare. Matematicienii arabi au cunoscut două metode de extragere de rădăcină. Prima este aceea pe care o numim azi, metoda Ruffini-Horner; a doua este de origină indiană şi se bazează pe regula:

$$\sqrt[n]{q} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{qz^n}\ .$$

Calculele în Europa medievală. În Europa, la începutul evului mediu, învăţămîntul calculelor era rudimentar. Manualul de bază era aritmetica autorului roman Boetiu (sec. V), care conţine reguli fără demonstraţii.

În secolul al X-lea, călugărul Gerbert a simplificat tehnica calculelor pe abace utilizînd jetoane marcate (apices) cu cifre romane I—IX sau cifre gobar (arabe de vest), importate din Spania. Cu ajutorul acestor jetoane se pot face calcule destul de complexe.

În curînd Europa a făcut cunoştinţă şi cu calculele poziţionale. La începutul secolului al XIII-lea, Leonardo da Pisa, după ce a vizitat Orientul mijlociu şi a studiat ştiinţa arabă, a publicat « Liber abbaci » (1202), lucrarea în care tratează prin numeroase exemple şi cu mare dibăcie, « algoritmul », adică, totalitatea regulilor de calcul ale numeraţiei poziţionale. Algoritmus este forma latinizată a lui Alhwarasmi. Cu timpul chiar şi calculele noi au primit numele de algoritm. Ulterior, sensul termenului de algoritm s-a modificat.

Încetul cu încetul, calculele pe abace au fost înlocuite prin calculele cu pana (în scris). Edictul din Florenţa din 1299, a interzis întrebuinţarea cifrelor

arabe. Dar răspîndirea noilor calcule, mai practice, mai corespunzătoare necesităţilor producţiei n-a mai putut fi oprită. În şcoli au început să fie studiate mici tratate de algoritme. Cei care nu posedau această instrucţie continuau să calculeze cu jetoane. Ştim între altele, şi din cîteva opere literare (Don Quichotte şi Le malade imaginaire), că în secolul al XVII-lea calculele cu jetoane erau încă răspîndite.

Pentru a înţelege revoluţia produsă de noile calcule ar trebui să comparăm regulile de calcul ale abaciştilor şi ale algoritmicienilor.

« Logistica » abacistă studia 6 operaţii fundamentale: adunarea, scăderea, dublarea, înjumătăţirea, înmulţirea, împărţirea. Adunarea şi scăderea se făceau cu metoda romană. Întrebuinţarea apices-urilor permitea să se reducă numărul jetoanelor utilizate. Dublarea este o simplă adunare a două numere egale şi se făcea pe coloane, începînd de la dreapta. Observînd că mutarea unui jeton cu un rang mai spre stînga multiplică valoarea sa prin 10, se vede uşor că orice înmulţire poate fi redusă la dublări, la înmulţiri prin 10, 100, ... şi adunări, operaţii uşor de efectuat pe abac. Deci, înmulţirea 24×34 se efectua în modul următor: avem $24 = 2.10 + 4$; $34 = 3.10 + 4$. Se aşezau cei doi factori în coloane, unul sub altul. Se formau produsele parţiale $4.4 = 16 = 1.10 + 6$; $4.3.10 = 12.10 = 1.100 + 2.10$; $2.10.4 = 8.10$; $2.10.3.10 = 6.100$. În coloana marcată cu I se găseşte deci, numai 6; în coloana X se găsesc 1, 2 şi 8; în coloana C se găsesc 1 şi 2. Adunînd numerele din coloane obţinem: $7.100 + 11.10 + 6 = 8.100 + 1.10 + 6 = 816$.

Pentru împărţire existau două metode: cea directă sau de aur şi cea complementară sau de fier (divisio aurea şi divisio ferrea). Ambele erau complicate. Prima era mai uşoară. În fig. 10 prezentăm schema operaţiei 5069:4. Deîmpărţitul este trecut în primele 4 coloane. Coloana *C* — fiindcă semnul 0 nu este încă cunoscut — era lăsată goală. Deasupra cifrei 9 este trecut împărţitorul 4 şi deasupra lui, complementul decadic (10—4) 6. (În evul mediu erau favorizate metodele numite complementare). Mai jos se succed etapele rezolvării:

$10-4=6$; $\frac{5000}{10} \cdot 6=3000$; $\left(\frac{3000}{10}=300\right) \cdot 6=1800$; $\left(\frac{1000}{10}=100\right) \cdot 6=600$; $600+800=1400$. În continuare avem iarăşi: $\left(\frac{1000}{10}=100\right) \cdot 6=600$; $\left(\frac{600}{10}=60\right) \cdot 6=360$; $\left(\frac{300}{10}=30\right) \cdot 6=180$; $\left(\frac{100}{10}=10\right) \cdot 60$. Din adunarea lor rezultă: $60+80+60+60=260$. Atunci $\left(\frac{200}{10}=20\right) \cdot 6=120$; $\left(\frac{100}{10}=10\right) \cdot 6=60$ şi $60+20+60=140$; $\left(\frac{100}{10}=10\right) \cdot 6=60$; $\frac{60}{10} \cdot 6=36$; $\left(\frac{30}{10}=3\right) \cdot 6=18$; $\left(\frac{10}{10}=1\right) \cdot 6=6$ şi $6+8+6+9=29$. În încheiere găsim: $\left(\frac{20}{10}=2\right) \cdot 6=12$; $\left(\frac{10}{10}=1\right) \cdot 6=6$; $6+2+9=17$; $\left(\frac{10}{10}=1\right) \cdot 6=6$; $7+6=13$; $\left(\frac{10}{10}=1\right) \cdot 6=6$; $3+6=9$. Ultima sumă este de o singură cifră, număr digital cum

era divizorul şi restul împărţirii, se găseşte $= 9 - 1 \cdot 8 = 1$. Partea întreagă a cîtului, numită «numerus divisorum» este

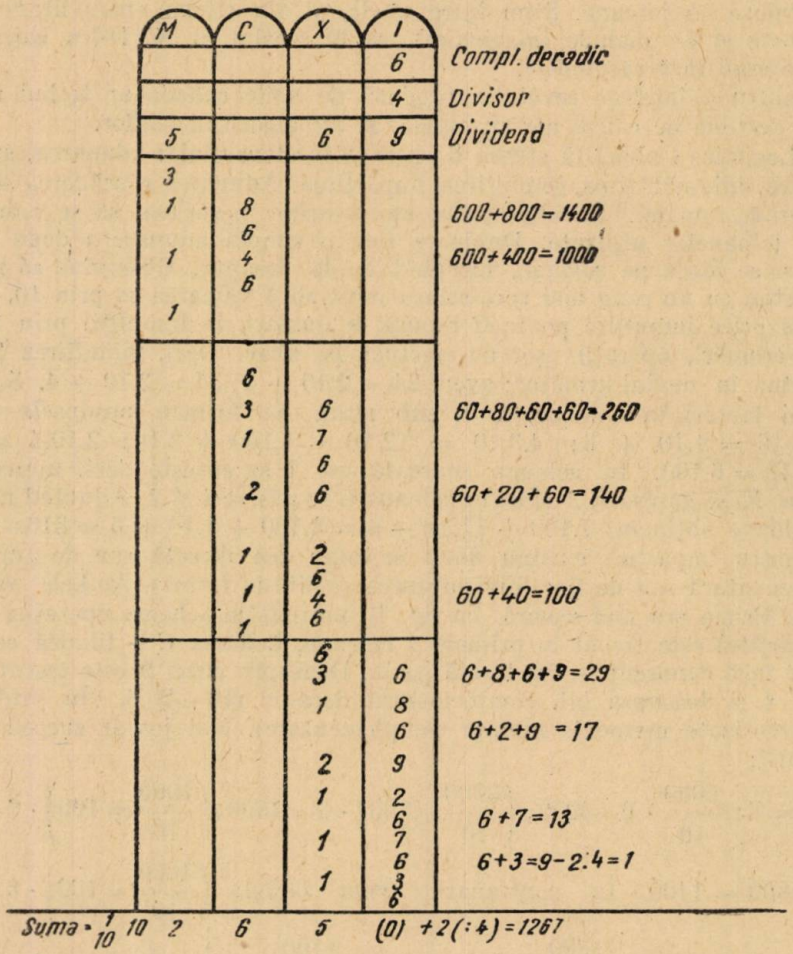


Fig. 10.

$$\frac{1}{10}(5000 + 3000 + 1000 + 1000 + 1000)$$

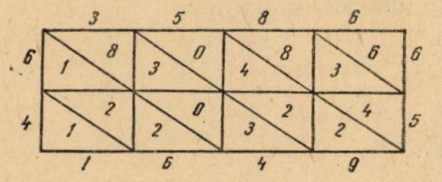
$$+\frac{1}{10}(600 + 300 + 100 + 200 + 100 + 100 + 100)$$

$$+\frac{1}{10}(60 + 30 + 10 + 20 + 10 + 10 + 10 + 10) + 1 = 1267$$

Cîtul exact este $1267 + \frac{1}{4}$.

Se poate concepe că aceste operaţii erau lungi şi anevoioase şi că introducerea algoritmului a adus un mare progres. Dar să continuăm.

În metoda algoritmică calculatorul aduna şi scădea după procedeul actual. Dublarea şi înjumătăţirea s-a păstrat prin tradiţie însă, multă vreme, şi în manualele de algoritme. Înmulţirile semănau cu înmulţirea numită «fulger» a arabilor. Procedeele de înmulţire au variat mult înainte de a ajunge la forma actuală. Astfel se utiliza între altele, şi procedeul zis «per gelosia», care are la bază o metodă indiană. Prezentăm o astfel de înmulţire:



3586
46
21516
14344
164956

Rezultatul se citeşte în exteriorul dreptunghiului.

Forma modernă a înmulţirii apare mai tîrziu. În manualul din Bamberg (Bamberger Rechenbuch, 1485) găsim operaţia înmulţirii în forma modernă, cu produsele parţiale ordonate oblic spre stînga, fiindu-le ataşate cifrele corespunzătoare ale înmulţitorului. Aceste cifre indicatoare, în manualul lui J. Widmann din Eger (1489) sînt deja înlăturate.

Pentru împărţire aveau o metodă complicată, totuşi întrucîtva superioară calculelor cu abace. Să considerăm exemplul 76468: 857. Notăm cu $E\left(\frac{m}{n}\right)$ partea întreagă a împărţirii $m:n$. Indicăm prin sublinieri, ordinul cifrei. Astfel $\underline{2} = 2 \cdot 10$; $\underline{\underline{2}} = 2 \cdot 100$; etc.

2 764 :257	68 $E\left(\frac{764}{257}\right) = \underline{2}$	$2 \cdot 2 = 4$; $7 - 4 = 3$; $3 \cdot 10 + 6 = 36$; $2 \cdot 5 = 10$; $36 - 10 = 26$; $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 = 264$; $2 \cdot 7 = 14$; $264 - 14 = 250$.
9 2506 :257	8 $E\left(\frac{2506}{257}\right) = \underline{9}$	$9 \cdot 2 = 18$; $25 - 18 = 7$; $7 \cdot 10 + 0 = 70$; $9 \cdot 5 = 45$; $70 - 45 = 25$; $2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = 256$; $9 \cdot 7 = 63$; $256 - 63 = 193$.
7 1938 :257	7 $E\left(\frac{1938}{257}\right) = \underline{7}$	$7 \cdot 2 = 14$; $19 - 14 = 5$; $5 \cdot 10 + 3 = 53$; $7 \cdot 5 = 35$; $53 - 35 = 18$; $1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 8 = 188$; $7 \cdot 7 = 49$; $188 - 49 = 139$.

Deci putem scrie: $76468 : 257 = (2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7) = 297 + (139 : 257)$.

Algoritmicienii din secolele XII şi XIII calculau după regula aceasta şi verificau rezultatele prin proba cu 9 şi 11. Împărţirea noastră modernă apare prima dată într-un manuscris italian din 1460. Aici sînt calculate produsele parţiale şi scrise sub deîmpărţit, cîte trei rînduri între liniile scăderii, restul fiind scris de două ori, a doua oară fiind completat cu cifra următoare a deîmpărţitului. Împărţirea este efectuată cu totul modern în manualul Calandri, tipărit în 1491 la Florenţa.

Numeraţia de poziţie permite de asemenea, extragerea rădăcinii patrate şi cubice într-o formă condensată, sub forma algoritmică modernă. În evul

mediu, extragerile de rădăcini au fost socotite ca făcînd parte din categoria operațiilor elementare (species). Manualele din evul mediu tratează aceste operații și le aduc diferite modificări pînă ce ajung la forma de azi.

Caracterizînd tehnica calculatoare din evul mediu se poate spune că au fost imaginate diverse metode, au fost inventate mici aparate pentru a ușura calculele și că spre sfîrșitul secolului al XVI-lea, procedeele actuale s-au generalizat. Aceste metode reclamă un efort mintal destul de considerabil, dar permit să operăm totuși, cu destulă rapiditate.

NOTE MATEMATICE

1. Asupra teoremei lui Ptolemeu

1. Fie patru puncte coplanare A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 1). Există următoarea relație vectorială

$$(1) \qquad \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_2A_4} = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} + \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_1A_4}.$$

În adevăr, dacă punem: $\overline{A_1A_2} = \bar{a}_1$; $\overline{A_2A_3} = a_2$; $\overline{A_3A_4} = \bar{a}_3$, atunci rezultă

$$\overline{A_1A_3} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \; ; \; \overline{A_1A_4} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 ; \; \overline{A_2A_4} = \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

și (1) devine: $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_2 + \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_2(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3)$

care este o identitate ușor de verificat.

Un caz particular. Considerăm o axă și pe ea punctele A_1, A_2, A_3, A_4, așezate în această ordine (fig. 1). În acest caz relația (1) poate fi scrisă între valorile absolute ale vectorilor, adică:

$$(2) \qquad |\overline{A_1A_3}| \cdot |\overline{A_2A_4}| = |\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_3A_4}| + |\overline{A_2A_3}| \cdot |\overline{A_1A_4}|$$

sau

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) = a_1a_3 + a_2(a_1 + a_2 + a_3).$$

2. Dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater inscriptibil atunci se știe că avem (teorema lui Ptolemeu)

$$|\overline{A_1A_3}| \cdot |\overline{A_2A_4}| = |\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_3A_4}| + |\overline{A_2A_3}| \cdot |\overline{A_1A_4}|.$$

Așa dar, trecînd de la un patrulater convex oarecare la unul inscriptibil, vectorii din relația (1) pot fi înlocuiți prin valorile lor absolute.

Această proprietate a fost observată de către matematicianul romîn *D. Pompei*, iar profesorul *V. Alaci* a dat o explicație acestei curioase proprietăți, folosindu-se de reprezentarea complexă a vectorilor (R.M.T., vol. XXII, p. 67, 72—74).

3. În cele ce urmează vom da o nouă demonstrație teoremei lui *Ptolemeu*, care va fi în același timp, și o nouă explicație a proprietății de la punctul 2.

Am văzut la punctul 1, că atunci cînd cele patru puncte se găsesc pe o axă (ca în fig. 1), în relația vectorială (1) putem înlocui vectorii prin valorile lor absolute și relația se menține.

Am văzut iarăşi la punctul 2 că acelaşi lucru se întîmplă în cazul patrulaterului inscriptibil. De unde dar, această asemănare între o axă şi un patrulater inscriptibil?

Pentru a găsi o legătură între acestea, să considerăm un patrulater inscriptibil $A_1A_2A_3A_4$ şi I un punct pe cercul lui circumscris, anume pe arcul A_1A_4 (fig. 2). Cercul $A_1A_2A_3A_4$ se transformă prin inversiune, într-o dreaptă $A_1'A_2'A_3'A_4'$; centrul de inversiune fiind I şi puterea de inversiune $K > 0$.

A_1' este inversul lui A_1, ...

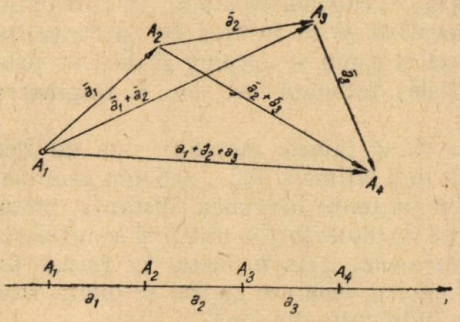


Fig. 1

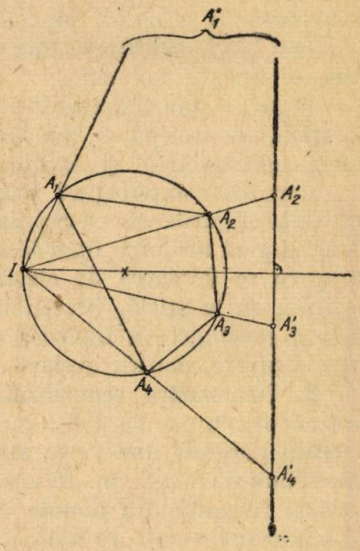


Fig. 2

Se vede acum de ce am ales centrul de inversiune I pe arcul A_1A_4; pentru a avea aşezate punctele A_1', A_2', A_3', A_4' în această ordine pe dreapta ce ele o determină, adică pentru a avea o asemănare cu figura 1. Deci putem scrie, ca şi în cazul figurii 2:

$$|\overline{A_1'A_3'}| \cdot |\overline{A_2'A_4'}| = |\overline{A_1'A_2'}| \cdot |\overline{A_3'A_4'}| + |\overline{A_2'A_3'}| |\overline{A_1'A_4'}|.$$

Dar se ştie că avem:

$$|\overline{A_1'A_3'}| = |\overline{A_1A_3}| \frac{K}{|\overline{IA_1}| \cdot |\overline{IA_3}|} \quad ; \quad |\overline{A_2'A_4'}| = |\overline{A_2A_4}| \frac{K}{|\overline{IA_2}| \cdot |\overline{IA_4}|} \; ; \; \ldots$$

Înlocuind aceste valori în relaţia de mai sus şi simplificînd cu:

$$\frac{K^2}{|\overline{IA_1}| \cdot |\overline{IA_2}| \cdot |\overline{IA_3}| \cdot |\overline{IA_4}|},$$

obţinem tocmai pe (2), adică teorema lui *Ptolemeu*.

Gh. I. Bercea, student Timişoara

CALEIDOSCOP FIZIC

1. Atracție și respingere electrică. Se ia o cutie plată de lemn sau de carton, de orice mărime, înaltă de 4-5 cm. Se căptușește toată suprafața ei interioară cu o foiță de staniol. Capacul cutiei se face din sticlă sau dintr-o masă plastică transparentă: celuloid, plexiglas etc.

Din hîrtie subțire se taie cîteva figurine care se colorează și se pun în cutie; apoi se lipește capacul.

Figurile stau liniștite în fundul cutiei. De îndată însă ce se freacă capacul de sticlă cu o cîrpă de lînă sau de mătase, figurinele se ridică și încep să se miște învîrtindu-se și sărind prin cutie (fig. 1).

Care este explicația? Prin frecare sticla se electrizează pozitiv, iar prin influență figurile se electrizează negativ. Electricitățile de semn contrar se atrag și prin urmare, figurile se ridică atingînd capacul de sticlă. În momentul atingerii se descarcă de electricitatea negativă și se încarcă cu electricitate pozitivă de la sticlă. Electricitățile de același semn se resping și deci se produce o respingere a figurilor de către sticlă; totodată are loc o respingere între figurine, pentru același motiv.

2. Termometru semnalizator. Se iau două lamele metalice, una de fier cealaltă de cupru, de 250 mm lungime, 10 mm lățime și 0,3. . .0,6 mm grosime. Așezăm lamelele una peste alta, le găurim pe toată lungimea, distanța dintre găuri fiind de 3. . .4 cm. În aceste găurele se introduc forțat nituri și se nituiesc. Lamela formată din metale diferite se încovoaie prin încălzire în formă de arc; fața încovoiată în afară este cea de cupru, deoarece cuprul se dilată mai mult decît fierul. Prin răcire lamela se îndreaptă din nou.

Unul din capetele lamelei se fixează pe un postament, cu lama de fier în sus (fig. 2). În dreptul celuilalt capăt, care stă liber în aer, se montează un

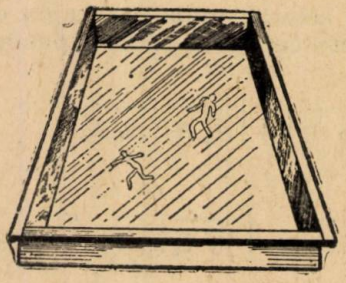


Fig. 1

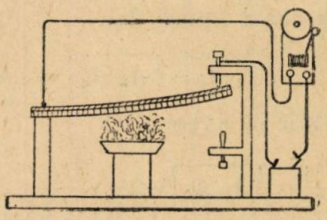


Fig. 2

suport cu două console: o consolă trebuie să se găsească deasupra lamelei, iar cealaltă dedesupt. În console se fixează două șuruburi în așa fel încît capetele lor, care ies în partea dinspre lamelă, să se găsească la o mică distanță de ea.

Dacă se încălzește lamela, ea se încovoaie în sus și atinge capătul șurubului de deasupra. Cînd se răcește, lamela se încovoaie în jos și atinge șurubul de dedesupt. Se leagă un fir al unei baterii electrice la un capăt al lamelei, iar celălalt, prin intermediul unui bec sau al unei sonerii, cu șurubul de sus sau cu cel de jos. Cînd lamela se încovoaie, ea atinge șurubul, închide circuitul și dă semnalul că temperatura a crescut sau a scăzut.

Se pot « lega » în circuit ambele şuruburi. Atunci semnalul se va da cînd temperatura se va schimba în orice situaţie. Învîrtind şuruburile se poate regla momentul închiderii circuitului pentru orice temperatură a lamelei.

De capătul liber al lamelei se poate fixa un ac indicator lung, care se va mişca în faţa unei scale cu diviziuni, gradată după indicaţiile unui termometru.

Astfel de termometre metalice se întrebuinţează pentru măsurarea temperaturilor înalte, pentru darea semnalelor automate, pentru anunţarea variaţiei temperaturii în uscătorii şi pentru semnalarea incendiilor.

Fig. 3

3. Submarinul. Pentru confecţionarea unui « submarin » de amator avem nevoie de o sticluţă mică de tuş. În jurul acestei sticluţe se modelează din ceară un corp, dîndu-i forma de submarin. Lîngă gîtul sticlei, care trebuie să fie întors în jos, se îngroapă în ceară de ambele părţi, nişte greutăţi de plumb (fig. 3). Acestea sînt astfel alese încît vasul să plutească întodeauna în aceeaşi poziţie, adică cu gura sticluţei în jos, şi la cea mai mică izbitură să se poată cufunda în apă.

Pentru efectuarea experienţei cu « submarinul » astfel construit, avem nevoie de un borcan înalt de sticlă şi de o bucată subţire de cauciuc, care să poate acoperi gura borcanului.

Se pune apă în borcan pînă aproape de gură, se introduce « submarinul » care va pluti la suprafaţa apei fiind cu foarte puţin mai uşor decît greutatea volumului de apă dislocuit. Este deajuns să se mărească puţin greutatea lui şi se va lăsa imediat la fund. Se leagă bine gura borcanului cu bucata de cauciuc. Dacă se va apăsa cu degetul pe membrana de cauciuc « submarinul » se va lăsa încet la fund. Indată ce se ia degetul, « submarinul » iese la suprafaţă. Cum se explică aceasta?

Prin apăsarea membranei presiunea aerului asupra apei se măreşte; apa va intra parţial în sticluţă şi va mări astfel greutatea vasului comprimînd aerul închis înăuntru, iar « submarinul » se scufundă. Cînd se ia degetul presiunea se micşorează, apa intrată în sticluţă se retrage, « submarinul » devine mai uşor şi se ridică la suprafaţă.

4. Stroboscopul. Pentru a ne explica principiul cinematografului ne putem folosi de un aparat numit stroboscop. Acest aparat serveşte în general pentru cercetarea mişcărilor periodice.

Construcţia şi funcţionarea lui este foarte simplă. Se taie din placaj sau carton, un disc cu diametrul de 30. . .40 cm şi se împarte prin raze în 20 de părţi. Pe aceste raze, lăsînd la marginea discului un spaţiu de 2. . .3 cm, se taie 20 de ferestruici de 0,5 mm lăţime şi 4 cm lungime. Pe spatele discului, în dreptul ferestruicilor, se lipesc 20 figuri desenate pe bucăţele identice de hîrtie tare.

Toate pozele trebuie să fie de aceiaşi mărime, să reprezinte aceiaşi figură însă în diferite poziţii, şi să fie la aceiaşi distanţă de centrul discului. Desenul poate reprezenta de exemplu, un om care ţine în mînă un topor sprijinit de un lemn. Poza următoare reprezintă acelaşi om, numai că mîna şi toporul sînt ceva mai ridicate, fiind deasupra lemnului. Astfel pe 13-14 poze mîna cu toporul se va ridica din ce în ce mai sus, iar pe restul de 6-7 poze mîna cu toporul se lasă din ce în ce mai jos, pînă atinge lemnul.

Se montează apoi discul stroboscopului pe un ax făcut din sîrmă groasă, folosind ca bucşă cele două jumătăţi rezultate prin tăierea unui mosorel de-a curmezişul (fig. 4)

Cînd discul se învîrteşte, imaginile se contopesc, formînd un cerc continuu cenuşiu. Ne aşezăm cu stroboscopul în mînă în faţa unei oglinzi întorcînd discul pe care se găsesc pozele cu spatele spre noi, şi-l punem din nou în mişcare. Privind prin ferestruicile înguste imaginea discului reflectată pe oglindă, vom observa că tăietorul de lemne devine « viu ». El ridică toporul şi loveşte în lemn, toporul ridicîndu-se încet dar căzînd repede. Tăietorul de lemne « capătă viaţă», deoarece prin ferestruici se văd imaginile în unul şi acelaşi loc. Ferestruicile acopăr şi descopăr alternativ reflexia discului. Deplasarea imaginilor nu se vede, le descoperim numai atunci cînd în faţa ochiului se găseşte ferestruica următoare şi imaginea următoare. Viteza maschează apariţia şi dispariţia repetată şi astfel obţinem impresia unei imagini mişcătoare. Toporul se ridică mai încet, dar coboară mai repede, deoarece ridicarea e reprezentată prin mai multe poze, iar coborîrea printr-un număr de două ori mai mic.

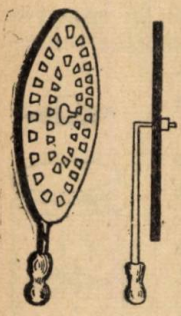


Fig. 4

5. Desenul şi reflexia. O figură simplă, oarecare, de exemplu un pătrăţel, este foarte greu de executat prin oglindă; creionul nu ascultă, mîna îl conduce greşit şi va ieşi un desen diform.

Dar să vedem cum procedăm. Se fixează o oglindă mică, cu dimensiunile de circa 20 × 15 cm, într-o ramă sau pe o bucată de placaj. În spatele ei se pune un picior proptea. Cu ajutorul acestui picior, pe un mic postament pătrat (fig. 5), confecţionat tot din placaj, se montează oglinda în poziţie verticală. Pe acelaşi postament, în faţa oglinzii, se aşază în poziţie orizontală o bucată de carton sau placaj. Acest carton este aşezat pe nişte picioruşe la o înălţime de cel puţin 10 cm deasupra postamentului, adică la jumătatea înălţimii oglinzii. Aceasta bucată de carton (placaj) lasă între ea şi oglindă un interval de 5 cm.

Cînd construcţia este gata, sub bucata de carton orizontală, pe postament, se aşază o foaie de hîrtie şi se încearcă să se deseneze pe ea, privind în oglindă (deoarece cartonul împiedică să se vadă direct hîrtia), o figură simplă (pătrat dreptunghi, triunghi etc); figura va ieşi diformă.

Care este explicaţia? Se ştie că imaginea dată de o oglindă plană prin reflexie se caracterizează printre altele, prin aceea că dreapta obiectului este stînga imaginii. Deci, imaginea obţinută prin reflexie este o copie inversată a obiectului. Acest fenomen « încurcă mîna » strică orientarea obişnuită şi desenul cel mai simplu apare diform, deşi el ar putea fi executat corect chiar cu ochi închişi.

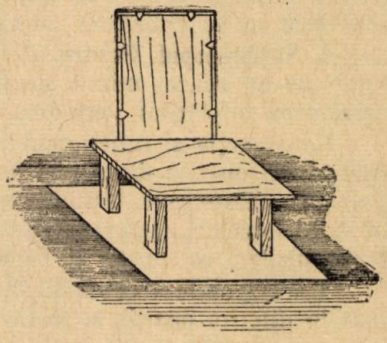


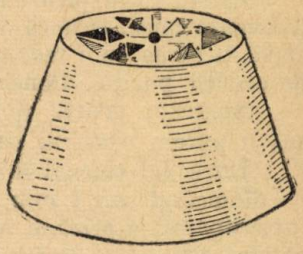
Fig. 5

6. Principiul turbinei. Un abajur de lampă poate fi confecţionat astfel, încît el să se învîrtească atunci cînd lampa este aprinsă.

Vom face acest abajur dintr-o hîrtie groasă, lipită în formă de trunchi de con. În centrul fundului său plan se fixează pe dinăuntru un mic dreptunghi de tinichea cu o adîncitură la mijloc. Această adîncitură se face cu ajutorul unui cui bont. Gropiţa se face exact în centrul lui şi este îndreptată spre interiorul abajurului. Capetele tinichelii se îndoaie în sus, trecîndu-se prin nişte cres-

tături făcute în hîrtie. Apoi aceste capete se îndoaie din nou, în aşa fel, că tinicheaua să rămînă prinsă de hîrtie.

În fundul abajurului se fac opt tăieturi aşezate după razele cercului. Tăieturile încep aproape de centru şi se termină aproape de marginea fundului. Marginile tăieturilor se îndoaie în sus şi în jos şi se fixează în această poziţie cu ajutorul unor bucăţele de chibrit, ascuţite la ambele capete şi înfipte puţin în marginile hîrtiei (fig. 6). Fundul abajurului se transformă astfel într-un fel de roată de ventilator cu aripioare. După ce s-a fixat deasupra unei lămpi electrice sau cu petrol o vergea de sîrmă verticală, care are un capăt ascuţit, se pune abajurul în aşa fel, încît capătul să intre în gropiţa dreptunghiului de tinichea. Abajurul va începe să se învîrtească încet.



Fig, 6

Care este explicaţia? Curentul de aer cald, care se ridică deasupra lămpii aprinse, trece prin aripioarele micii turbine şi le învîrteşte aşa după cum vîntul învîrteşte aripile unei mori de vînt.

APARAT PENTRU PRODUCEREA UNDELOR STAŢIONARE PE CALE ELECTRICĂ

SE ştie că o undă sonoră întîlnind un paravan se reflectă fie pe acelaşi drum cu unda incidentă, dacă direcţia de propagare a undei este perpendiculară pe paravan, fie pe alt drum şi fără a-şi modifica perioada şi amplitudinea de vibraţie.

Dacă mediul pe care se face reflexia este mai rigid decît mediul de propagare al undei incidente, atunci întoarcerea undei necesită un timp egal cu $T/2$, astfel că pe paravanul de reflexie apare un nod; unda ulterior reflectată, suprapunîndu-se peste cea incidentă, rezultă unda caracteristică numită undă staţionară, formată din noduri şi ventre (fig. 1).

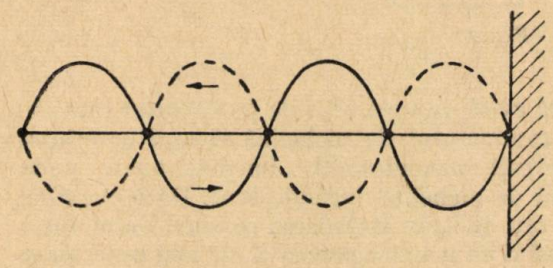


Fig. 1

Nodurile sînt particule solicitate de două forţe pe aceiaşi direcţie, egale şi de sens opus; ele rămîn mereu în aceleaşi plane perpendiculare pe direcţia de propagare a undei.

Unda staţionară poate fi obţinută şi pe cale electrică folosind acţiunea magnetului fix asupra conductorului electric mobil.

Astfel, se ştie că dacă între ramurile unui magnet se găseşte un conductor electric mobil, acesta, după sensul curentului şi după sensul cîmpului magnetic fix (sensul liniilor de forţă magnetică), poate să fie, sau respins în afara ramurilor, sau atras între ramurile sale.

Dacă prin conductor curentul va trece cînd într-un sens cînd într-altul (adică curentul va schimba de sens), conductorul va fi pus în mişcare de oscilaţie. Acest fenomen îl vom folosi pentru obţinerea pe cale electrică a undelor staţionare.

Astfel, dacă prin conductor vom face să treacă un curent alternativ cu frecvenţă mică, şi dacă acesta se va găsi între ramurile unui magnet puternic, el va fi atras apoi respins după sensul curentului electric, păstrînd magnetul în aceiaşi poziţie. Conductorul astfel situat va oscila.

Aparatul pentru obţinerea undei staţionare prin procedeul arătat mai sus îl putem construi singuri astfel:

Între doi suporţi întindem un fir de nichelină sau alt material rezistent, cu diametrul sub 1 mm, lung de 1/4—1/2 m. Punem acest fir în serie cu un întrerupător, o priză, o siguranţă fuzibilă şi un reostat cu apă (sau alt gen de reostat care să nu se încălzească) (fig. 2). În apa din reostat adăugăm treptat sare de bucătărie dizolvînd-o pînă ce firul de nichelină devine incandescent. Sarea pusă în apă micşorează rezistenţa apei. Oprim dizolvarea sării în momentul constatării eventualei «arderi» a conductorului de nichelină. Siguranţa fuzibilă este un simplu fir de liţă prins între două cuie *a* şi *b*, înfipte într-o

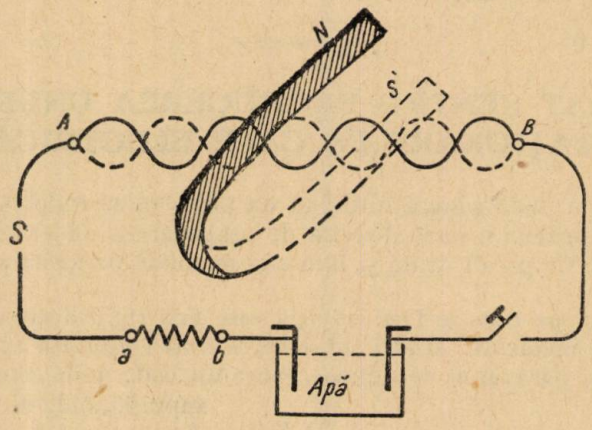


Fig. 2

plăcuţă de lemn. Această siguranţă evită arderea celei de pe circuitul camerii. Introducem magnetul astfel încît conductorul de nichelină să se situeze între ramurile magnetului, în timp ce este incandescent. Imediat apare unda staţionară de-a lungul conductorului de nichelină incandescent. Dacă eventual nu apare unda staţionară slăbim sau întărim întinderea conductorului între punctele de întindere *A* şi *B*, şi folosim un magnet potcoavă cît mai puternic şi cu ramurile cît mai apropiate. În locul magnetului permanent putem folosi un electromagnet bară sau potcoavă.

Apariţia undei staţionare trădează de fapt şi existenţa curentului alternativ (caracter oscilatoriu).

Prof. Nicolae D. Rădulescu
Şcoala medie de băieţi «N. Bălcescu»,
Bucureşti

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1915.

Să se formeze ecuația de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$; $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$, unde x_1 și x_2 *sînt rădăcinile ecuației* $x^2 + px + q = 0$.

* * *

Soluție. — $X_1 = x_1^3 + \frac{1}{x_2}$; $X_2 = x_2^3 + \frac{1}{x_1}$. Trebuie să calculăm suma și produsul rădăcinilor noii ecuații:

$$X_1 + X_2 = x_1^3 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\ ;\ X_1 + X_2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2\ (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

Dar x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$, avem între ele, conform relațiilor lui Viete,

$$x_1 + x_2 = -p;\ x_1x_2 = q.$$

Înlocuind avem:

$$X_1 + X_2 = -p^3 + 3pq - \frac{p}{q};\ X_1 + X_2 = \frac{-p^3q + 3pq^2 - p}{q};\ X_1X_1 = \frac{q^4 + p^2q - 2q^2 + 1}{q}.$$

Ecuația va fi

$$X^2 - \frac{p}{q}(3q^2 - qp^2 - 1)\,X + \frac{q^4 + p^2q - 2q^2 + 1}{q} = 0$$

sau

$$qX^2 - p(3q^2 - qp^2 - 1)\,X + q^4 + p^2q - 2q^2 + 1 = 0.$$

Problema 1978

Să se arate că

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} + 2 \cdot \frac{a-1}{a+1} + 2^2 \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1} + \ldots + 2^{2^n} \cdot \frac{a^{2^n}-1}{a^{2^n}+1} = 2^{2^{n+1}} \cdot \frac{a^{2^{n+1}}+1}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Avem: $S_1 = \frac{a+1}{a-1}$; $S_2 = S_1 + \frac{a-1}{a+1} = 2\frac{a^2+1}{a^2-1}$;

$S_3 = 2\frac{a^2+1}{a^2-1} + 2\frac{a^2-1}{a^2+1} = 2^2\frac{a^{2^2}+1}{a^{2^2}-1}$. Aplicăm metoda inducției matematice și presupunem că:

$$S_{n+1} = 2^{2^n}\frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}-1}.$$

Să arătăm că în acest caz:

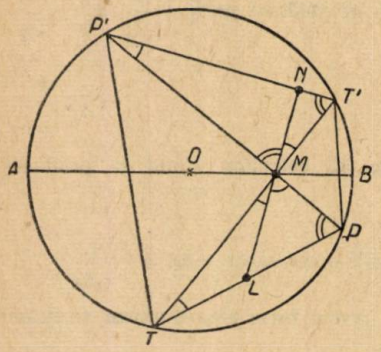
$$S_{n+1} + 2^{2^n}\frac{a^{2^n}-1}{a^{2^n}+1} = 2^{2^{n+1}}\frac{a^{2^{n+1}}+1}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Într-adevăr,

$$2^{2^n}\frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}-1} + 2^{2^n}\frac{a^{2^n}-1}{a^{2^n}+1} = 2^{2^{n+1}} \cdot \frac{a^{2^{n+1}}+1}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Problema 1994 bis

Se dă un cerc cu centrul în O şi cu raza R şi un punct M la distanţa d de centrul cercului pe diametrul AMB. În jurul punctului M se rotesc cele două laturi $P'MP$ şi $T'MT$ ale unui unghi drept. Notăm cu S suprafaţa triunghiului PMT, cu S' suprafaţa triunghiului $P'M'T'$.



1. *Să se calculeze în funcţie de R şi d produsul SS'.*

2. *Cercul circumscris triunghiului PMT poate fi tangent la AB? În caz afirmativ să se arate că $T'P'$ este paralel cu AB.*

Soluţie. — 1) $SS' = \dfrac{MP' \cdot MT' \cdot MP \cdot MT}{4}$,

dar:

$$PM \cdot MP' = MT' \cdot MT = (R + d)(R - d),$$

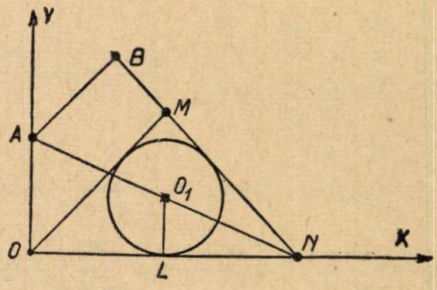
deci:

$$SS' = \frac{(R^2 - d^2)^2}{4}.$$

2) Cercul circumscris triunghiului PMT are centrul în punctul $L\left(\dfrac{PT}{2}\right)$, el poate fi tangent la AB cînd $ML \perp AB$. În acest caz, din asemănarea triunghiului $P'NM$ şi PMT şi a triunghiurilor $T'NM$ şi PMT reiese că $\sphericalangle P'NM = \sphericalangle T'NM = 90°$, dar NL este perpendiculară şi pe AB, deci $AB \parallel T'P'$.

Problema 2000 bis

Se dă un unghi drept XOY. Un triunghi isoscel variabil $MON (MO = MN)$ este situat în acest unghi cu vîrful O fix şi baza ON dirijată după Ox. În plus, raza cercului înscris în triunghi are o valoare constantă r. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului ONM trece printr-un punct fix situat pe OY şi că dreapta MN rămîne tangentă unui cerc fix.



Soluţie. — Fie O_1 centrul cercului înscris triunghiului OMN şi L punctul de tangenţă cu dreapta ON. Cercul O_1 avînd rază fixă $O_1L = r$, triunghiurile NO_1L şi NOA sînt asemenea, iar $AO = 2r$ deci, bisectoarea OA trece prin punctul fix A situat pe OY. Fie AB perpendiculară pe MN; rezultă $AB = AO = 2r$, iar MN rămîne tangentă cercului fix cu centrul în A şi de rază $2r$.

Problema 2009

Fie ecuaţia $x^2 - (1 + p)x + p^2 = 0$ în care p este un parametru, iar x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ei.

a) *Fără a se rezolva ecuaţia, să se formeze ecuaţia de gradul II în y care admite ca rădăcini $y_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$ şi $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$.*

b) *Pentru ce valori ale lui p ecuaţia în y are rădăcini reale?*

c) *Pentru ce valori ale lui p ecuația în y are rădăcină egală cu* $\frac{1}{4}$; *care sînt în acest caz, rădăcinile exuației în x?*

* * *

Soluție. — a) Scriem relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2},$$

dar $x_1 + x_2 = 1 + p$; $x_1 x_2 = p^2$; $y_1 y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$, deci:

$$y^2 - \frac{(1+p)^2 - 2p^2}{p^2} y + 1 = 0,$$

sau

$$p^2 y^2 - (1 + 2p - p^2) y + p^2 = 0.$$

b) Trebuie ca discriminantul să fie pozitiv:

$$\Delta = (1 + 2p - p^2)^2 - 4p^4 = 1 + 4p^2 + p^4 + 4p - 2p^2 - 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 - 4p^3 + 2p^2 + 4p + 1 > 0.$$

Descompunem în factori și avem:

$$-3\left(p + \frac{1}{3}\right)(p-1)(p+1)^2 > 0;$$

$$\left(p + \frac{1}{3}\right)(p-1)(p+1)^2 < 0;$$

sau

$$\left(p + \frac{1}{3}\right)(p-1) < 0,$$

de unde rezultă: $-\frac{1}{3} < p < 1$.

c) Dacă $\frac{1}{4}$ este rădăcină, trebuie să verifice ecuația:

$$\frac{1}{16} p^2 - (1 + 2p - p^2)\frac{1}{4} + p^2 = 0;$$

$$p^2 - 4 - 8p + 4p^2 + 16p^2 = 0;$$

$$21p^2 - 8p - 4 = 0$$

de unde:

$$p_1 = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}; \quad p_2 = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}.$$

Astfel avem:

$$x^2 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) x + \frac{4}{9} = 0, \qquad \left(x_1 = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}; \; x_2 = \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 - \left(1 - \frac{2}{7}\right) x + \frac{4}{49} = 0, \qquad \left(x_1 = \frac{4}{7}; \; x_2 = \frac{1}{7}\right),$$

Prblema 2018

Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare avem relaţia

$$(2r_br_c - bc)\sin A \cos B = (2r_cr_a - ca)\sin B \cos A$$

şi încă două relaţii analoge. Notaţiile sînt cele obişnuite.

Ilie N. Constantinescu

Soluţie. — Se ştie că:

$$r_a\,(p-a) = r_b\,(p-b) = r_c\,(p-c) = S.$$

Avem:

$$2r_br_c - bc = 2\,\frac{S^2}{(p-b)(p-c)} - bc = 2\cdot\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{(p-b)\,(p-c)} - bc =$$

$$2p\,(p-a) - bc = \frac{1}{2}\left[(b+c)^2 - a^2 - 2bc\right] = \frac{1}{2}\,(b^2 + c^2 - a^2) = bc\cos A.$$

Analog rezultă:

$$2r_cr_a - ca = ca\cos B,$$

$$2r_ar_b - ab = ab\cos C.$$

Prin urmare, avem de arătat că,

$$bc\sin A\cos A\cos B = ca\sin B\cos B\cos A$$

sau $b\sin A = a\sin B$, ceea ce este evident.

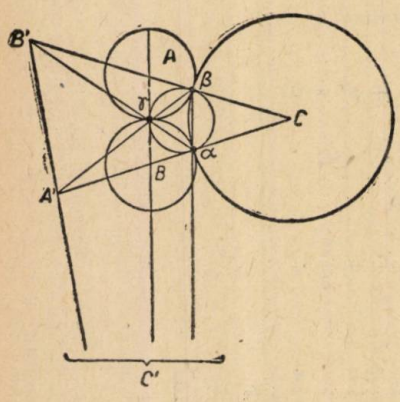
În mod analog se stabilesc relaţiile:

$$(2r_ar_b - ab)\sin C\cos A = (2r_b\,r_c - bc)\sin A\cos C,$$

$$(2r_c\,r_a - ca)\sin B\cos C = (2r_a\,r_b - ab)\sin C\cos B.$$

Problema 2027

Se consideră trei cercuri tangente exterioare. Fie A, B, C centrele acestor cercuri, α punctul de tangenţă al cercurilor cu centrele în B şi C, iar β şi γ punctele de tangenţă analoge. Să se demonstreze că punctele A′(BC, βγ), B′ (AC, αγ) şi C′(AB, αβ) sînt colineare).



Gh. Dobrotescu, Predeal

Soluţia I. — Conform teoremei lui Menelaus, în triunghiul ABC, cu transversala $B'\gamma\alpha$, cu transversala $A'\gamma\beta$ şi cu transversala $C'\alpha\beta$:

$$\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{\alpha B}{\alpha C} = 1,$$

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{\beta C}{\beta A} = 1,$$

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A} = 1.$$

Înmulţind aceste trei relaţii obţinem:

$$\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A} = \left(\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{\beta A}{\beta C}\cdot\frac{\gamma B}{\gamma A}\right)^2.$$

Cum însă: $A\gamma = A\beta$; $B\gamma = B\alpha$ și $C\alpha = C\beta$, rezultă:

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1.$$

Deci $A'B'$, C' sînt colineare.

Soluția II-a dată de Paul Popescu (s.m.11 București). — Considerăm punctele α', β' și γ', punctele care coincid cu α, β și γ. Exagonul $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ este înscris într-un cerc, deci conform teoremei lui Pascal, laturile opuse se taie în trei puncte colineare, adică: A' $(\alpha\alpha', \beta\gamma)$, B' $(\beta\beta', \alpha\gamma)$ și C' $(\gamma\gamma', \alpha\beta)$. Însă cum BC, AC și AB sînt tangente în punctele α, β, γ (respectiv α', β', γ') la cerc, rezultă că A' $(BC, \beta\gamma)$, B' $(AC, \alpha\gamma)$ și C' $(AB, \alpha\beta)$ sînt colineare.

Observare. — În orice triunghi înscris într-o conică tangentele duse în vîrfurile triunghiului taie laturile opuse în trei puncte colineare.

Problema 2039

Ce volum ocupă la temperatura de 20° C *și la* 750 mm col. Hg, *gazele obținute prin electroliza unui kilogram de apă?*

Cercul de fizică din Capitală, 1956

Soluție dată de **Al. Ivănică** (s.m. 4 București). — Scriem ecuația reacției:

$$2\ H_2O = 2\ H_2 + O_2\ .$$

Prin electroliza a 36 g H_2O rezultă 4 g H_2.

Prin electroliza a 1000 g H_2O rezultă x g H_2:

$$x = \frac{4000}{36} = 111.111\ \text{g}\ H_2\ .$$

În condiții normale ($p = 760$ mm Hg; $t = 0$°C), 2 grame de hidrogen (o moleculă-gram) ocupă un volum de 22,4 l; 111,111 g H_2 vor ocupa un volum de 1244,432 l. La fel găsim că oxigenul ocupă un volum de 622, 204 l.

La temperatura de 20°C și presiunea de 750 mm Hg, hidrogenul ocupă un volum

$$V = \frac{V_0 P_0}{P}(1 + \beta t),$$

$$V_H = \frac{1244,432 \cdot 760}{750}\left(1 + \frac{20}{273}\right),$$

$$V_H = 1352,7 \text{ litri.}$$

La fel:

$$V_0 = \frac{622,204 \cdot 760}{750}\left(1 + \frac{20}{273}\right);\ V_0 \approx 676,35 \text{ litri.}$$

Problema 2059

Să se rezolve ecuația $6^x + 4^x = 9^x$.

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa IX, 1955)

Soluție. — Notăm: $6^x = u$; $4^x = v$; $9^x = w$. Se mai observă că $u = w - v$, deci $u^2 = v^2 + w^2 - 2vw$.

Mai ţinînd seamă că: $u^2 = v.w$ obţinem:

$$v^2 - 3\,vw + w^2 = 0$$

sau:

$$\left(\frac{v}{w}\right)^2 + \left(\frac{w}{v}\right)^2 - 3 = 0.$$

Fie $\frac{v}{w} = z$; avem: $z^2 - 3z + 1 = 0$, deci $z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Prin urmare,

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

de unde $x = \frac{\log (3 \pm \sqrt{5}) - \log 2}{2 (\log 2 - \log 3)}$.

Problema 2063

Să se găsească cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei $y = \cos 2x - 4 \sin x$.

(Olimpiada matematică din Ordjonichidze, cl. IX, 1955)

Soluţie. — Avem: $y = 1 - 2 \sin^2 x - 4 \sin x = 3 - 2 (1 + \sin x)^2$. Cea mai mare valoare a lui y este cînd $\sin x = -1$ şi este egală cu 3.

Cea mai mică valoare a lui y se obţine pentru $\sin x = 1$ şi este egală cu -5.

Problema 2065

Să se demonstreze că dacă $0° < 2\alpha < 180°$ *atunci este adevărată inegalitatea*

$$\operatorname{ctg} \alpha \geqslant 1 + \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, clasa X, 1955)

Soluţie. — Inegalitatea dată se mai poate scrie:

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha \geqslant 1$$

sau:

$$\frac{\cos \alpha \sin 2\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} \geqslant 1$$

sau:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} \geqslant 1,$$

inegalitate evidentă, deoarece sinusul variază numai între -1 şi $+1$ şi totodată el este pozitiv în primul şi al doilea cadran, ceeace corespunde enunţului.

Problema 2078

Să se determine p *şi* q *astfel ca trinomul* $x^4 + px^2 + q$ *să fie divizibil prin trinomul dat* $x^2 + ax + b$.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

Soluţie. — Fie: $x^4 + px^2 + q = (x^2 + ax + b)\ (x^2 + \alpha x + \beta)$. Dezvoltînd parantezele şi identificînd obţinem sistemul:

$$a + \alpha = 0; \quad b + \beta + a\alpha = p; \quad \alpha b + a\beta = 0; \quad b\beta = q.$$

Rezolvînd găsim: $p = 2b - a^2$; $q = b^2$.

Problema 2082

a) *Un vagon de* 10 *tone se mişcă uniform cu viteza de* 36 *km/oră. Care este energia cinetică şi ce forţă de frînare necesită pentru a se opri pe o distanţă de* 20 m.

b) *Un corp cu masa de* 1 kg *aflat iniţial în repaus, străbate cu o mişcare uniform accelerată un spaţiu de* 1800 m *în timp de* 1 *minut. Să se calculeze mărimea forţei şi lucrul mecanic efectuat.*

* * *

Soluţie. — a) Energia cinetică este $E_c = \frac{mv^2}{2}$ unde $m = 10$ t $= 10\,000$ kg, $v = 36$ km/oră $= \frac{36000}{3600}$ m/s $= 10$ m/s.

Deci, $E_c = \frac{10.000 \cdot 10^2}{2} = 500.000$ J $= 500$ kJ.

Forţa de frînare este: $F = ma$. Însă din formulele $S = \frac{at^2}{2}$ şi $v = at$ rezultă:

$$a = \frac{v^2}{2S}.$$

Deci:

$$F = \frac{mv^2}{2S} = \frac{10\,000 \cdot 100}{40} = 25\,000 \text{ newtoni.}$$

b) Forţa este $F = ma$. Însă cum $S = \frac{at^2}{2}$, rezultă $a = \frac{2S}{t^2}$. Deci:

$$F = \frac{2mS}{t^2} = \frac{2 \times 1 \times 1800}{60^2} = \frac{3\,600}{3\,600} = 1 \text{ newton.}$$

Lucrul mecanic efectuat este:

$$L = FS = 1.\ 1900 = 1800 \text{ jouli.}$$

S-au primit soluţii bune de la **Paul Popescu** (s.m. 11 Bucureşti), **C. Draica** (s.m. 4 Bucureşti).

Problema 2087

Trei prisme cu secţiunea pătrată, turnate dintr-un aliaj cu densitatea d_1, *sînt introduse într-un lichid cu densitatea* d_2, — *prima pînă la* 9 cm *din înălţimea ei, iar a treia pînă la* 4 cm *din înălţime. Latura secţiunii celei dintîi este cu* 2 cm *mai mică, iar a celei de-a treia cu* 2 cm *mai mare decît latura secţiunii celei de-a doua.*

Ştiind că prismele au aceiaşi greutate şi că presiunea de jos în sus exercitată de lichid asupra fiecărei prisme este egală în acest caz cu greutatea fiecăreia, să se determine înălţimile celor trei prisme şi raportul densităţilor pentru ca problema să fie posibilă.

N. C. Ciomu

Soluţie. — Din enunţ rezultă că presiunile de jos în sus exercitate de lichid asupra prismelor sînt egale între ele; aceste presiuni sînt egale cu greutăţile volumelor de lichid deslocuite de fiecare prismă; deci volumele scufundate în lichid, ale celor trei prisme, sînt egale între ele.

Notăm cu x latura secțiunii prismei a doua și cu h porțiunea din înălțimea pînă la care e scufundată; latura secțiunii celei dintîi va fi $(x - 2)$, iar a celei de-a treia va fi $(x + 2)$. Avem:

$$9\,(x-2)^2 = hx^2 = 4\,(x+2)^2.$$

De unde:

$$9\,(x-2)^2 = 4\,(x+2)^2 \quad ; \quad 5x^2 - 52x + 20 = 0$$

și deci:

$$x = \frac{26 \pm 24}{5}.$$

Soluția $x_1 = \frac{2}{5}$ e inacceptabilă (latura primei prisme ar rezulta negativă); rămîne soluția $x_2 = 10$.

Latura secțiunii celei dintîi este: $x - 2 = 8$, iar a celei de-a treia: $x + 2 = 12$.

Mai avem: $hx^2 = 4\,(x+2)^2$, deci $h = 5{,}76$ cm.

A doua prismă e scufundată pînă la 5,76 cm din înălțime.

Fiecare prismă are introdusă în lichid cîte o porțiune din volumul ei egală cu a celorlalte și anume:

$$V' = 9\,(x-2)^2 = 5{,}76\,x^2 = 4\,(x+2)^2 = 576 \text{ cm}^2.$$

Părțile scufundate deslocuiesc un volum de lichid a cărui greutate este:

$$G' = V'\,d_2 = 576\,d_2.$$

Prin enunț, această greutate este egală și cu greutatea comună a prismelor G; volumul unei prisme va fi:

$$V = \frac{G}{d_1} = \frac{G'}{d_1} = \frac{576\,d_2}{d_1},$$

același pentru toate prismele. Volumele fiind egale, înălțimile prismelor sînt invers proporționale cu ariile secțiunilor; prin urmare:

$$H_1 = \frac{V}{(x-2)^2} = \frac{576\,d_2}{64\,d_1} = \frac{9\,d_2}{d_1},$$

$$H_2 = \frac{V}{x^2} = \frac{576\,d_2}{100\,d_1} = \frac{5{,}76\,d_2}{d_1},$$

$$H_3 = \frac{V}{(x+2)^2} = \frac{576\,d_2}{144\,d_1} = \frac{4\,d_2}{d_1}.$$

Pentru ca problema să aibă un sens trebuie ca înălțimile prismelor să fie mai mari sau cel puțin egale cu porțiunea din înălțime introdusă în lichid, adică $\frac{4\,d_2}{d_1} \geqslant 4$, deci $d_2 \geqslant d_1$, ceea ce înseamnă că lichidul trebuie să aibă greutate specifică d_1 mai mare decît aliajul (cazul unor prisme de bronz introduse în mercur).

Problema 2091

Să se construiască triunghiul ABC în care

$$b + c = a + h_a,$$

cunoscînd latura a și raza r a cercului înscris. Se va demonstra întîi, că cercul de diametru BC este tangent cercului înscris.

Gh. Buicliu

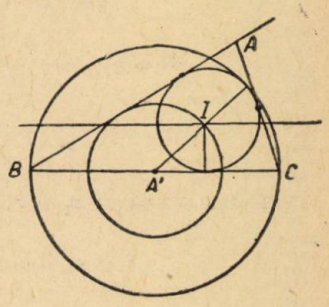
Soluție. — Trebuie căutată o proprietate particulară a triunghiului special din enunț. Relația de condiție se scrie:

$$a = b + c - h_a = 2p - a - \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= 2p - a - \frac{2(p-a)}{a}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \quad \therefore \quad a = p - \frac{(p-a)}{a} r_a \quad \therefore \quad r_a = a.$$

care este proprietatea particulară a triunghiului căutat. Se mai găsește la fel:

$$r = \frac{a(p-a)}{p} = \frac{(p-b)(p-c)}{a}. \qquad (1)$$



Din relația $a^2 = r_a^2 = \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}$ se deduc:

$$p(p-b)(p-c) = a^2(p-a) = a(p-a)r = apr.$$

Din (1) rezultă:

$$(p-b)(p-c) = ar$$

și atunci:

$$(a+c-b)(a-c+b) = 4ar \quad \text{și} \quad a^2 - 4ar = (b-c)^2,$$

$$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{a^2}{4} - ar + r^2 = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2. \qquad (2)$$

Fie A' mijlocul lui BC și D proiecția lui I pe BC. Deoarece în orice triunghi avem $A'D = \frac{b-c}{2}$, relația (2) arată că

$$A'I = \frac{a}{2} - r,$$

adică cercul I este tangent cercului de diametru BC, de unde urmează construcția. Se construiește cercul de diametru BC și cercul $A'\left(\frac{a}{2} - r\right)$ care este intersectat în I și I' de $\Delta \parallel BC$ și la distanța r de BC. Tangentele din B și C la I (r) determină vîrful A. Sînt 2 soluții simetrice față de mediatoarea laturii BC. Problema este totdeauna posibilă dacă $r < a$. Soluțiile simetrice precedentelor față de BC sînt numai soluții de poziție.

Notă. — Dacă se cere triunghiul $b - c = a - h_a$, se găsește că cercul de diametru BC este tangent cercului I_b și I_c. Soluția — ca mai sus, cînd se dă a și r_b sau r_c.

Problema 2104

Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y ale cărei rădăcini să fie:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_1^2}{1 - x_2} \quad \text{și} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_2^2}{1 - x_1},$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

Ion Ionescu, elev, Tîrgoviște

Soluție. — Pentru a forma ecuația de gradul II în y avem nevoie de suma și produsul rădăcinilor y_1 și y_2:

$$S = y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_1^2}{1 - x_2} + \frac{x_2 + x_2^2}{1 - x_1} = \frac{x_1(1 - x_1^2) + x_2(1 - x_2^2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2) - (x_1^3 + x_2^3)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} = \frac{(x_1 + x_2)[1 - (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)]}{(1 - x_1)(1 - x_2)} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)[1 + 3x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2]}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2};$$

$$P = y_1y_2 = \frac{x_1 + x_1^2}{1 - x_2} \cdot \frac{x_2 + x_2^2}{1 - x_1} = \frac{x_1x_2(1 + x_1)(1 + x_2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2[1 + (x_1 + x_2) + x_1x_2]}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2}.$$

Ținînd seamă că $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$ obținem:

$$S = y_1 + y_2 = \frac{-p(1 + 3q - p^2)}{1 + p + q} = \frac{p(p^2 - 3q - 1)}{1 + p + q},$$

$$P = y_1y_2 = \frac{q(1 - p + q)}{1 + p + q}.$$

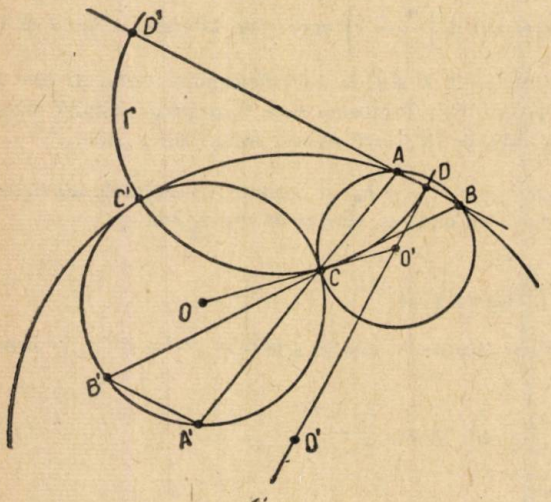
Ecuația în y este de forma: $y^2 - Sy + P = 0$, sau:

$$(1 + p + q)y^2 - p(p^2 - 3q - 1)y + q(1 - p + q) = 0.$$

Problema 2140

Se dă cercul O și punctele A, B exterioare lui. Fie AA_1, tangentele din A și B la O, Fie de asemenea, D, D' punctele care împart segmentul AB în raportul $\frac{AA_1}{BB_1}$ și E, E' acelea care împart același segment în raportul $\frac{BB_1}{AA_1}$. Unul din cercurile Γ de diametru DD' sau EE' taie pe O în general, în punctele C, C'. Să se demonstreze că cercurile ACB, $AC'B$ sînt tangente cercului O.

Gh. Buicliu



Soluție. — Presupunem că Γ este cercul de diametru DD' și fie A', B' intersecțiile lui O cu AC și BC. Din condițiile enunțului avem:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AA_1}{BB_1} \therefore \frac{AC^2}{AA_1^2} = \frac{BC^2}{BB_1^2} \therefore$$

$$\frac{AC^2}{AC \cdot AA'} = \frac{BC^2}{BC \cdot BB'} \therefore \frac{AC}{AA'} = \frac{BC}{BB'} \therefore \frac{AC}{CA'} = \frac{BC}{CB'}$$

care arată că triunghiurile ABC, $A'CB'$ care au unghiul din C comun sînt asemenea, deci

$AB \parallel A'B' \cdot \cdot AA' \parallel O'A$ (O' fiind centrul cercului ABC) ceeace arată că C este centrul de asemănare al cercurilor O, O'. Şi cum C este pe O, cele două cercuri sînt tangente în C.

Notă. După cum se vede, problema conduce la construirea unui cerc care trece prin A, B şi este tangent cercului O. Cînd A şi B sînt interioare lui O problema se rezolvă la fel, luînd pe AA_1, BB_1, egale cu rădăcina patrată a puterilor lui A şi B faţă de O.

Problema 2280

Se consideră punctul A variabil pe un cercul (O) de rază R. Fie O' un punct fix nesituat pe (O), iar A' un punct mobil astfel încît $AA' = \parallel OO'$. Notăm cu M punctul unde dreapta AO' retaie cercul (O) şi cu P intersecţia dreptelor OM şi $A'O'$. Să se afle locul geometric al punctului P.

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

Soluţie. — Deosebim cazurile:

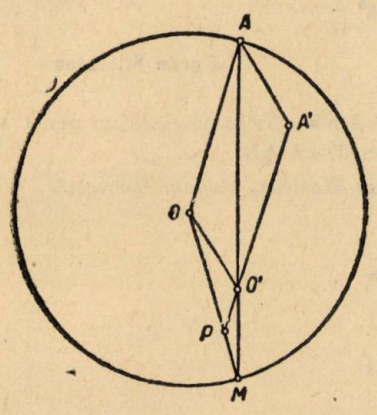
1° Punctul O' situat în interiorul cercului (O). Se observă că:

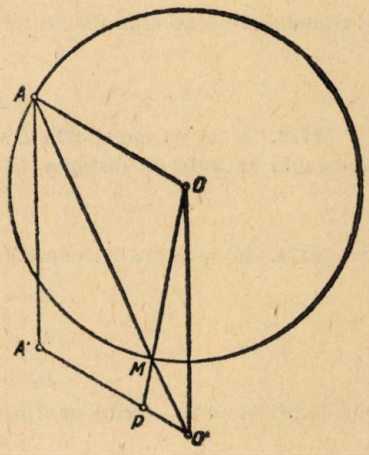
$$\sphericalangle PO'M = \sphericalangle AO'A' = \sphericalangle O'AO \quad \text{şi} \quad \sphericalangle PMO' = \sphericalangle O'AO,$$

Deci, $\sphericalangle PO'M = \sphericalangle PMO'$, adică $\overline{PO'} = \overline{PM}$. Aşa fiind, rezultă:

$$\overline{PO'} + \overline{PO} = \overline{PM} + \overline{PO} = R.$$

Prin urmare P descrie o elipsă cu focarele în O şi O'.





2° Punctul O' situat în exteriorul cercului (O). O demonstraţie analogă celei de mai sus ne conduce la egalitatea $\overline{PM} = \overline{PO'}$. Mai departe deducem:

$$\overline{PO} - \overline{PO'} = \overline{PO} - \overline{PM} = R,$$

ceeace dovedeşte că P descrie o iperbolă de focare O, O'.

PROBLEME PROPUSE

2465. Se dă cercul O şi diametrii AOB şi COD perpendiculari între ei. Ducem două cercuri egale ω_1 şi ω_2, variabile, ambele tangente exterioare sau tangente interioare cercului O, punctele de contact fiind B, respectiv C.

Din punctul A ducem tangente la aceste cercuri variabile ω_1 şi ω_2.

Să se constate că aceste tagente, mărginite de punctul A şi de punctul de contact, sînt segmente incomensurabile.

Stelian Mărculescu, O. Stalin

2466. In trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$), fie $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$ şi H punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD. Să se afle locul geometric al punctului H atunci cînd trapezul se deformează, una din laturile sale fiind fixă.

Gh. Dobrotescu, Predeal

2467. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x-7}{x-5} - \frac{x-8}{x-4} + \frac{x-9}{x-3} + \frac{x-10}{x-2} = x - 6.$$

V. T. Hulubei, Craiova

2468. In cercul O este înscris triunghiul ABC în care se duc medianele AN, BM şi CL. Mediana BM este prelungită cu o lungime MM' egală cu $\frac{1}{3}$ din ea; dreptele AM' şi CM' prelungite taie cercul în A' şi C'. Să se arate că avem:

$$AC \cdot CL = A'C' \cdot AN \cdot$$

Ioana Ciorănescu, elevă Bucureşti

2469. Dîndu-se ecuaţia $x^3 + px + q = 0$ cu rădăcinile sin x, sin y, sin z, se cere ecuaţia de gradul al 3-lea cu rădăcinile $\operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2}$, $\operatorname{cotg}^2 \frac{y}{2}$, $\operatorname{cotg}^2 \frac{z}{2}$.

Eugen St. Iacob

2470. Se dă un unghi xOy şi un punct A în acelaşi plan. Să se găsească un punct B pe dreapta ox astfel ca distanţa de la B la Oy să fie egală cu AB.

Tiberiu Weszelly, student Bucureşti

2471. Să se arate că expresiile:

$$E_1 = 2 \cdot 3^{3n+1} + 17 \cdot 2^{2n},$$
$$E_2 = 3^{2n+2} + 7 \cdot 2^{5n+1},$$
$$E_3 = 7 \cdot 2^{3n+1} \cdot 3^{n-2} + 1$$

sînt divizibile cu 23, oricare ar fi n întreg şi pozitiv.

Kiss Elemer, Tg. Mureş

2472. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Demeny Zoltan, Aiud

2473. Să se arate că polinomul.

$$P(x) = 2x^{29} + x^{13} - x^{12} + x^{11} + x^8 + x^6 + 3x^2 + 2$$

se divide exact prin 2 $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

C. Ionescu-Ţiu

2474. Printr-un tub capilar se scurg picături mici de apă. Inainte de cădere, picăturile formează un gît cu diametrul de 0,5 mm. Tensiunea superficială a apei fiind egală cu $\alpha = 73$ dyn/cm, să se afle numărul picăturilor scurse, ştiind că greutatea totală a lor este $G = 31{,}4$ g.

C. Necşoiu

2475. Un corp cu greutatea de 19,62 kg este aruncat de-a lungul unei suprafeţe orizontale cu o viteză iniţială 20 m/s.

a) La ce distanţă ajunge corpul dacă coeficientul de frecare este 0,02?

b) Cu cîte grade s-ar ridica temperatura unui litru de apă la 0°C sub influenţa căldurii echivalente cu lucrul mecanic efectuat de către forţa de frecare?

c) Legile electrolizei şi determinarea sarcinii ionului monovalent.

(La fac. mat. «Bolyai» Cluj)

2476. Unde este imaginea obiectului care se găseşte la 5 cm depărtare de centrul optic al unei lentile biconvexe, avînd distanţa focală de 16 cm? Să se construiască imaginea, să se determine puterea lentilei şi grosismentul liniar.

(La fac. chimie «Bolyai» Cluj)

2477. *a)* Tensiunea între prizele unui dinam de 4 *CP* este de 150 *V*. Să se determine intensitatea curentului ce trece prin dinam.

b) Greutarea unei bucăţi de fier în apă este 400 g. Să se determine volumul ei. (Densitatea fierului $d = 7{,}8$).

Legile gazelor.

(La facult. chimie «Bolyai» Cluj)

2478. Să se arată că într-un triughi oarecare există inegalitatea

$$\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{a+c}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right) \leqslant \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Dux Erih, Szolnok (A matematika tanitasa, Budapest)

2479. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{a-1}{b-1}\ ;\ \frac{x^3-1}{y^3-1}=\frac{a^3-1}{b^3-1}.$$

Deres János (Matematika Lapok, Budapest)

2480. Să se arate că dacă

$$x+y+z=t+u+v \text{ şi } x^2+y^2+z^2=t^2+u^2+v^2,$$

atunci avem:

$$(t-z)\ (t-x)=(y-u)\ (y-v).$$

S. W. Podal (Matematika, Warszava)

2481. Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC şi dacă avem $\operatorname{tg} A=\frac{1}{3}$, $\sin A \sin C=\frac{1}{\sqrt{10}}$, să se calculeze raportul $\frac{R}{r}$, unde t este raza cercului înscris triunghiului.

(Journal de Mathématiques élémentaires)

2482. Dacă $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ şi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, să se arată că atunci avem

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

2483. Să se transforme într-o expresie calculabilă prin logaritmi, expresia:

$E = \sin x.\cos 2x + \cos 3x \sin 4x + \sin 5x \cos 6x + \cos 7x \sin 8x + \sin 9x \cos 10x.$

Kiss Elemer

Soluție dată de **Gh. Stoian** student, București. — Ecuația $\frac{a-x}{m-x}=\frac{b-y}{n-y}$ se mai poate scrie:

$$\frac{A(a-x)}{A(m-x)}=\frac{B(b-y)}{B(n-y)}=\frac{Aa+Bb+C}{Am+Bn+C}.$$

De aci obținem:

$$x=\frac{m(Aa+Bb+C)-a(Am+Bn+C)}{(Aa+Bb+C)-(Am+Bn+C)},$$

$$y=\frac{n(Aa+Bb+C)-a(Am+Bn+C)}{(Aa+Bb+C)-(Am+Bn+C)}$$

sau

$$x=\frac{B(mb-an)+C(m-a)}{A(a-m)+B(b-n)},$$

$$y=\frac{B(nb-an)+C(n-a)}{A(a-m)+B(b-n)}.$$

Relația (1) se mai scrie:

$$\left(\frac{Aa+Bb+C}{Am+Bn+C}\right)^2=\left(\frac{a-x}{m-x}\right)^2=\left(\frac{b-y}{n-y}\right)^2=\frac{(a-x)^2+(b-y)^2}{(m-x)^2+(n-y)^2}.$$

Problema 2243

Să se arate că $p\geqslant 3R\sqrt[3]{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$, *unde* A, B, C *sînt unghiuri, iar* p *și* R *semiperimetrul și raza cercului circumscris triunghiului.*

Roșianu C. Dragomir, student

Soluție dată de **N. Teodorescu,** elev București. — Considerăm inegalitatea:

$$(x+y+z)^3\geqslant 27\,xyz. \qquad \text{(G.M.F., 5/1956)}$$

Punem $x=a$, $y=b$, $z=c$. Avem $(a+b+c)^3\geqslant 27\,abc$ și $a+b+c=2p$ și $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

Deci, $8p^3\geqslant 27\cdot 8R^3\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ sau $p^3\geqslant 27R^3\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ și extrăgînd rădăcina cubică, $p\geqslant 3R\sqrt[3]{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$.

Problema 2245

Fie A_1, B_1, C_1 *punctele de tangență ale cercului înscris triunghiului* ABC *cu laturile* BC, CA, AB. *Să se construiască triunghiul* ABC *cunoscînd punctele de intersecție ale bisectoarelor în triunghiurile* AB_1C, BC_1A, CA_1B.

Nicolae St. Alexandru, student București

Soluție. — Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Triunghiul AC_1B_1 este isoscel deoarece $AC_1=AB_1$, ca tangente duse din același punct la un cerc.

Deci bisectoarea AI este și înălțime în triunghiul isoscel AC_1B_1.

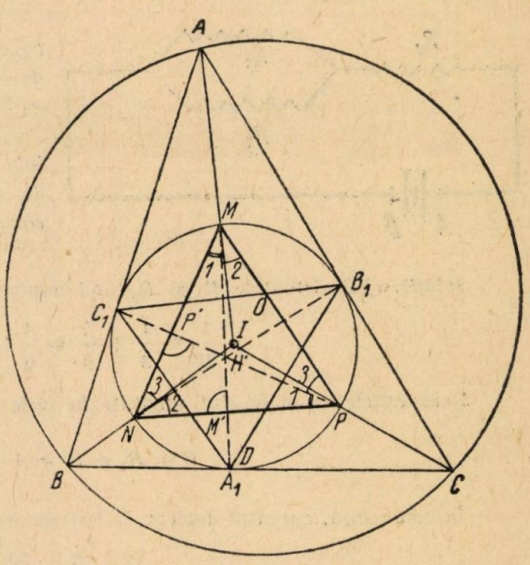
Fie M intersecția dintre AI și cercul înscris. Punctul M este mijlocul arcului C_1B_1, deoarece raza perpendiculară pe coardă împarte coarda și arcul corespunzător în 2 părți egale. Rezultă că MC_1 și MB_1 sînt bisectoarele unghiurilor AC_1B_1 și AB_1C_1. Deci M este punctul de intersecție al bisectoarelor în triunghiul AC_1B_1.

La fel se demonstrează că N și P, intersecțiile bisectoarelor BI și CI cu cercul înscris, sînt punctele de intersecție ale bisectoarelor triunghiurilor BC_1A_1 și CA_1B_1.

Să arătăm că dreptele MA_1, NB_1, CP_1 sînt înălțimi în triunghiul MNP.

Avem :

$$\sphericalangle M_1 = \sphericalangle P_1 = \frac{\text{măs arc } A_1N}{2} = \frac{\text{măs arc } C_1N}{2}.$$



Deasemenea, $\sphericalangle M_2 = \sphericalangle N_2$; $P_3 = \sphericalangle N_3$, de unde $\sphericalangle N = \sphericalangle M_2 + \sphericalangle P_2$. Deci $\sphericalangle P' = \sphericalangle M'$ avînd același supliment ($\hat{N} + \hat{P}_1 = \hat{N} + \hat{M}_1$). Dar

$$\sphericalangle MH'P + \sphericalangle M_2 + \sphericalangle P_3 = \sphericalangle MH'P + \sphericalangle N = 180°,$$

deci $\sphericalangle P' + \sphericalangle M' = 180°$ și deci $\sphericalangle P = \sphericalangle M' = 90°$.

Acum rezultă următoarea construcție: fiind date M, N, P, ducem cercul circumscris triunghiului MNP. Înălțimile în triunghiul MNP taie acest cerc în A_1, B_1, C_1. Tangentele în A_1, B_1, C_1 la cerc se taie în A, B, C.

Problema 2329

a) *Un voltametru cu azotat de argint și electrozi de platină avînd rezistența de* 1,9 Ω *și forța contraelectromotoare de* 1,2 V *este alimentat de la un acumulator avînd f.e.m. de* 2,2 V *și rezistența interioară* 0,1 Ω. *Să se afle cantitatea de argint depusă în* 30 *minute.*

b) *Să se rezolve aceiași problemă, dacă electrozii de platină se înlocuiesc prin plăci de argint, știind că prin această înlocuire rezistența voltametrului nu se schimbă.*

Cercul de fizică din Capitală

Soluție. — Rezistența circuitului este de 2Ω. Forța electromotoare disponibilă se obține scăzînd din forța electromotoare 2,2 V a acumulatorului, forța contraelectromotoare 1,2 V a voltametrului; diferența este 1 V și deci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ A}.$$

Cantitatea de argint depusă în 30 minute este:

$$m = 1{,}118 \cdot 0{,}5 \cdot 60 \cdot 30 = 1006 \text{ mg} = 1{,}006 \text{ g}.$$

b) Se știe că dacă electrozii au aceiași natură cu metalul care se depune, atunci anodul se dizolvă în cantitate egală cu metalul depus la catod, și că nu avem forță contraelectromotoare. Așadar, intensitatea curentului este:

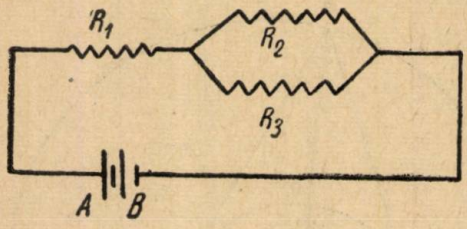
$$I = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1 \text{ A},$$

iar cantitatea de argint depusă în 30 minute este:

$$m = 1{,}118 \cdot 1{,}1 \cdot 60 \cdot 30 = 2214 \text{ mg} = 2{,}214 \text{ g}.$$

Problema 2402

O sursă de curent AB, avînd forța electromotoare de 50 V și rezistența interioară neglijabilă, alimentează montajul din schemă.



a) *Să se calculeze curentul în fiecare rezistență și cantitatea de căldură în kcal/oră degajată de fiecare rezistență. Se dă* $R_1 = 4$ *ohmi,* $R_2 = 3$ *ohmi și* $R_3 = 9$ *ohmi.*

b) *Să se afle prin ce rezistență* R_4 *ar trebui înlocuită rezistența* R_2 *pentru ca în rezistențele* R_1 *și* R_2 *să se dezvolte aceiași cantitate de căldură.*

A Șaichin

Soluție. a) Rezistențele R_2 și R_3 fiind montate în paralel, echivalează cu o rezistență R':

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}; \quad R' = \frac{9}{4}.$$

Rezistențele R_1 și R' sînt montate în serie și echivalează cu o rezistență R. Avem:

$$R = R_1 + R' = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

În consecință, curentul debitat de bateria AB este de:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{50}{\frac{25}{4}} = 8\,\text{A}.$$

Acest curent străbate rezistența R_1 cu $I_1 = 8$A.

Între rezistențele R_2 și R_3 el se repartizează invers proporțional cu aceste rezistențe, anume: $I_2 = 6$A, $I_3 = 2$A.

Puterile sînt:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 64 \cdot 4 = 256\,\text{W},$$
$$P_2 = I_2^2 R_2 = 36 \cdot 3 = 108\,\text{W},$$
$$P_3 = I_3^2 R_3 = 4 \cdot 9 = 36\,\text{W}.$$

Verificare. — Puterea debitată este:

$$P = EI = 50 \cdot 8 = 400\,\text{W}; \quad P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Să calculăm cantitatea de căldură degajată pe oră. Avem:

$$1\ \text{W} \cdot 1\ \text{oră} = 3600\,\text{J} = 3600 \cdot 0{,}24\ \text{cal} = 864\ \text{cal} = 0{,}864\ \text{kcal}.$$

Rezultă:

$$Q_1 = 256 \cdot 0{,}864 \cong 221\ \text{kcal/oră},$$
$$Q_2 = 108 \cdot 0{,}864 \cong 93\ \text{kcal/oră},$$
$$Q_3 = 36 \cdot 0{,}864 = 31\ \text{kcal/oră}.$$

b) Dacă notăm cu I_1, I_3, I_4 curenții în rezistențele R_1, R_3, R_4 avem relațiile:

$$I_1 = I_3 + I_4; \quad \frac{I_3}{R_4} = \frac{I_4}{R_4}.$$

Din legea lui Ohm, rezultă:

(3) $$I_1^2 R_1 = I_3^2 R_3.$$

Din (1) și (2) exprimăm: I_3 în funcție de I_1:

$$I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I_1$$

și înlocuind în (3),

$$I_1^2 R_1 = \frac{R_3 R_4^2}{(R_3 + R_4)^2} I_1^2,$$

ceea ce se mai scrie: $R_1 (R_3 + R_4)^2 = R_3 R_4^2$. Înlocuind $R_1 = 4$, $R_3 = 9$, găsim ecuația:

$$5R_4^2 = 72R_4 - 324 = 0$$

cu o singură rădăcină pozitivă, $R_4 = 18\Omega$.

Repetînd calculul de la punctul *a)* găsim succesiv: $R' = 6\,\Omega$, $R = 10\,\Omega$, $I_1 = 5$A, $I_3 = \frac{10}{3}$ A, $I_4 = \frac{5}{3}$ A, $P_1 = 100$ W, $P_3 = 100$ W; $P_4 = 50$ W.

Problema E: 827

Să se determine E din relația:

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} + 2E = \sqrt{2} + 1$$

în care $E_1 = \sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}}$ și $E_2 = \sqrt{1{,}5 - \sqrt{2}}$.

* * *

Soluție. — Avem:

$$E_1^2 = 1{,}5 + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{0{,}5} + 0{,}5 = (1 + \sqrt{0{,}5})^2 \text{ și}$$

$$E_2^2 = 1{,}5 - \sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{0{,}5} + 0{,}5 = (1 - \sqrt{0{,}5})^2.$$

Avem:

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{2}{2\sqrt{0{,}5}} = \sqrt{2}$$

și relația dată devine:

$$\sqrt{2} + 2E = \sqrt{2} + 1$$

din care $E = \frac{1}{2}$.

Problema E: 830

Se dă: $\alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ *și* $\beta = \sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}$ *și se cere să se arate că dacă* $\alpha^4 + \beta^4 = 2^4$ *atunci* $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \pm 2$.

* * *

Soluție. — Avem:

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2;$$

$$\alpha^2 = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2 \text{ și } \beta^2 = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} - 2.$$

Înlocuind avem: $\alpha^4 + \beta^4 = 4^2 + 2\left[\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)^2 - 4\right]$.

Din această relație, ținînd seamă de $\alpha^4 + \beta^4 = 2^4$, obținem:

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \pm 2.$$

Problema E: 843

Dacă 8 viţei mănîncă o cantitate de fîn în acelaş timp ca 5 vaci, să se afle în cît timp 12 viţei vor mînca fînul pe care 14 vaci îl mănîncă în 15 zile.

Ioan St. Muşat

Soluţie. — Dacă 8 viţei mănîncă cît 5 vaci, atunci 12 viţei vor mînca cît x vaci. Avem:

$$\frac{8}{12} = \frac{5}{x}\ ;\ x = \frac{12 \cdot 5}{8} = \frac{15}{2} \text{ vaci.}$$

Cantitatea de fîn pe care 14 vaci o mănîncă în 15 zile va fi mîncată de $\frac{15}{2}$ vaci (sau 12 viţei) în y zile. Avem:

$$\frac{14}{\frac{15}{2}} = \frac{y}{15}\ ;\ y = \frac{14 \cdot 15}{\frac{15}{2}} = 28 \text{ zile.}$$

Problema E: 856

Să se arate că:

$$\frac{a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3}{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)} + 1 = 0.$$

Gheorghe I. Stoian

Soluţie. — Avem:

$$E_1 = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (ab^3 - 3ab^2c + 3abc^2 - ac^3 + bc^3 - 3abc^2 + 3a^2bc - a^3b) + c(a-b)^3 =$$
$$= [-ab(a^2-b^2) - c^3(a-b) + 3abc(a-b)] + c(a-b)^3 =$$
$$= (a-b)(3abc - a^2b - ab^2 - c^3) + c(a-b)^3 = (a-b)(3abc - a^2b - ab^2 - c^3 + a^2c + b^2c - 2abc) =$$
$$= (a-b)[abc - a^2(a-c) + c(b+c)(b-c) - ab^2] =$$
$$= (a-b)[c(b+c)(b-c) - ab(b-c) - a^2(b-c)] =$$
$$= (a-b)(b-c)(c^2 + bc - ab - a^2) = (a-b)(b-c)[(c-a)(c+a) + b(c-a)] =$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

$$E_2 = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a^3b - a^3c + b^3c - ab^3) + c^3(a-b) =$$
$$= [ab(a^2-b^2) - c(a^3-b^3)] + c^3(a-b) = [ab(a+b)(a-b) -$$
$$- c(a-b)(a^2+ab+b^2)] + c^3(a-b) = (a-b)(a^2b + ab^2 - a^2c - abc - b^2c + c^3) =$$
$$= (a-b)[a^2(b-c) + ab(b-c) - c(b+c)(b-c)] =$$
$$= (a-b)(b-c)(a^2 + ab - bc - c^2) = (a-b)(b-c)[-(c+a)(c-a) - b(c-a)] =$$
$$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Prin urmare:

$$E = \frac{E_1}{E_2} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)} = -1.$$

Problema E: 861

Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x + \dfrac{a-b}{a+b}}{x - \dfrac{2ab}{b^2-a^2}} = \frac{x - \dfrac{b^2-a^2}{a^2b+ab^2} : \left(\dfrac{a}{b^2-ab} + \dfrac{b}{a^2-ab}\right)}{x + b\left(\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2} + \dfrac{1}{a^2+b^2-2ab}\right) : \left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b-a}\right)}.$$

Ioan St. Muşat

Soluție. — Membrul doi al ecuației poate fi scris succesiv:

$$\frac{x-\dfrac{b^2-a^2}{ab(a+b)}:\dfrac{a^2-b^2}{ab(b-a)}}{x+b\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}:\dfrac{2b}{b^2-a^2}}=\frac{x-\dfrac{b-a}{ab}\cdot\dfrac{-ab}{a+b}}{x+b\cdot\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}\cdot\dfrac{b^2-a^2}{2b}}=\frac{x-\dfrac{a+b}{a+b}}{x+\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}}.$$

Ecuația devine:

$$\frac{x+\dfrac{a-b}{a-b}}{x+\dfrac{2ab}{b^2+a^2}}=\frac{x-\dfrac{a-b}{a+b}}{x+\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}}.$$

Prezentîndu-se sub formă de proporție, ecuația poate fi scrisă:

$$\frac{x+\dfrac{a-b}{a+b}}{x+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}}=\frac{2x}{2x+\dfrac{a+b}{b-a}};\quad\frac{x+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}}=\frac{2x}{\dfrac{a+b}{b-a}};$$

$$\frac{x+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}}=\frac{x}{\dfrac{a+b}{2(b-a)}};\quad\frac{\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{b-a}{(2b+a)}}=\frac{x}{\dfrac{a+b}{2(b-a)}}.$$

De unde:

$$x=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2(b-a)}:\frac{b-a}{2(b+a)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(b+a)}{b-a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Problema E: 789

Să se calculeze aria patratului format de bisectoarele unghiurilor unui dreptunghi de laturi a, b $(a>b)$.

Radu Stroe

Soluție. — Avem:

$$EG=MN-(EM+GN)=MN-2ME=a-2ME,$$

însă $ME=MB=\dfrac{b}{2}$, deci $EG=a-b$ și $GF=\dfrac{EG}{\sqrt{2}}=\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$, prin urmare:

$$S_{EFGH}=GF^2=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

S-a notat cu $ABCD$ dreptunghiul, cu E și G intersecțiile bisectoarelor din A și B, respectiv din C și D; iar cu F și H intersecțiile bisectoarelor din A și D, respectiv din B și C.

PROBLEME PROPUSE [1])

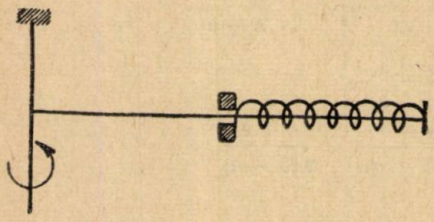
2500. Să se arate că ecuația $x^3 + ax^2 + b = 0$ nu poate avea deodată rădăcinile $+1$ și -1; dacă admite rădăcina $+1$ ea are toate rădăcinile reale cînd b este în afara intervalului $(-4, 0)$; iar dacă admite rădăcina -1 are rădăcinile reale cînd b este cuprins în intervalul $(0, 4)$.

C. Ionescu-Țiu

2501. Să se arate că ecuația $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ nu poate avea deodată rădăcinile $+2$ și -2; iar dacă admite rădăcina $+1$ ea are toate rădăcinile reale dacă b este în afara intervalului $(-9, -1)$. În cazul cînd ecuația admite rădăcina -1, celelalte două rădăcini sînt complexe cînd $-1 < b < 7$.

C. Ionescu-Țiu

2502. *a)* O vergea de masă neglijabilă, lungă de 50 cm, are unul din capete fixate de un ax orizontal. La celălalt capăt se fixează un pahar cu apă. Să se calculeze numărul minim de rotații pe secundă, pe care trebuie să-l facă vergeaua pentru a evita vărsarea apei.



b) Vergeaua este făcută să se rotească cu două rotații pe secundă. Greutatea paharului fiind de 200 g, să se calculeze tensiunile în vergea cînd trece prin poziție verticală.

c) Se așază vergeaua în poziție orizontală fixînd capătul liber de un resort la capătul căruia se află o greutate de 200 g găurită, care poate aluneca fără frecare pe vergea. Lungimea arcului în poziție liberă fiind de 20 cm și știind că arcul se scurtează cu 1 cm cînd asupra sa acționează o forță de 200 g, să se calculeze scurtarea arcului cînd vergeaua se rotește cu două rotații pe secundă.

(Cercul de fizică din Capitală)

2503. Prin punctul de intersecție E al diagonalelor unui patrulater inscriptibil se duce o dreaptă ce taie laturile sale AB și DC respectiv în M și N. Să se arate că picioarele perpendicularelor coborîte din M și N pe diagonalele patrulaterului sînt vîrfuri ale unui trapez. În ce caz acest trapez este isoscel?

Ioana Ciorănescu, elevă București.

2504. Pe un scripete fix este trecută o sfoară la ale cărei capete sînt legate două greutăți: la un capăt o greutate de 1 kgf, iar la celălalt capăt o greutate de 2 kgf. Scripetele este prins de un dinamometru care atîrnă de o grindă așezată orizontal pe două coloane de zidărie. Ce greutate va arăta dinamometrul?

Simion Pamfil

2505. Cunoscînd lungimea $AB = a$ să se construiască cercul în care AB este latura dodecagonului regulat înscris.

Gh. Buicliu

2506. Electronul se găsește într-un cîmp electric cu tensiunea de 1,2 V/cm, sarcina sa electrică este de 8.10^{-11} u.es. CGS, iar masa sa este de 9.10^{-28} g. Cu ce accelerație se mișcă el

---

[1]) Soluțiile la problemele propuse în acest număr se primesc pînă la 15 iunie a. c. Clasa VIII (2503, 2504, 5509, 2512, 2823, 2532, 2533, 2537, 2538).

în cîmp și ce distanță parcurge în acest cîmp pînă la oprire dacă el se mișcă în direcția cîmpului, știind că viteza sa inițială este de $V_0 = 1000$ km/s și cît timp durează mișcarea sa.

N. Rădulescu, profesor București.

2507. Produsul proiecțiilor pe diametrul AA' a laturilor AB și AC a unui triunghi ABC înscris într-un cerc (O) este egal cu produsul dintre latura AB și proiecția înălțimii AE pe această latură.

Theodor Schein, elev București

2508. Să se construiască un triunghi ABC, fiind date unghiurile A, B, C și lungimea $2l$ a celei mai mici coarde, duse în cercul circumscris prin ortocentrul triunghiului.

V. Postolache, Tecuci

2509. Care sînt bazele x și y ale sistemelor de numerație în care $425_x - 221_y = 455_7$, știind că $x + y = 12$.

I. Mastan, elev Zalău

2510. Să se elimine y între relațiile:

$$xy^2 \sin (\log_x y) = 1,$$
$$x^2 y \cos (\log_x y) = 1.$$

N. C. Ciomu, profesor București.

2511. Fie O_1 și O_2 două cercuri tangente deoparte și de alta a unei drepte în A și B. Dreapta O_1O_2 taie pe AB în C, iar cele două cercuri în P și Q. Tangenta în P taie pe O_1A în U, iar tangenta în Q taie pe O_2B în V. Să se arate că punctele U, C, V sîn colineare.

Al. Năbădan, Arad

2512. Să se arate că numărul

$$N = (m^2 - n^2)\,[(m^2 - 1)^2 + (m^2n^2 - 1) + (n^2 - 1)^2]$$

este divizibil cu 36, oricare ar fi numerele întregi m și n diferite între ele.

P. Popescu. elev București

2513. Fie un triunghi ABC și M un punct pe cercul circumscris lui, anume pe arcul BC. Dacă α, β, γ sînt proiecțiile lui M pe laturile BC, CA, AB să se arate că:

$$\frac{a}{M\alpha} = \frac{b}{M\beta} + \frac{c}{M\gamma}.$$

Gh. I. Bercea, Timișoara.

2514. Care este greutatea cuprului liberat în 5 minute de 4 elemente Daniel montate în serie și furnizînd curent care traversează o baie de sulfat de cupru. Electrozii sînt de platin. Rezistența băii și a electrozilor este 0,25 ohmi, forța electromotoare a elementului Daniel este 1,08 V, rezistența unui element este 1,5 ohmi, forța electromotoare de polarizație este 1,32 volți, echivalentul chimic al cuprului este 32, un culomb pune în libertate $\frac{1\text{ g}}{96.000}$ hidrogen.

(La Inst. Pedagogic, Timișoara)

2515. Se consideră patratul $A_1A_2A_3A_4$ și un punct M în planul său. Să se stabilească relația: $MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$.

Gh. Călugăriță

2516. Fie un triunghi oarecare ABC, $A \neq B \neq C$. Construim pe fiecare latură a triunghiului și în exteriorul lui, poligoane regulate cu același număr de laturi n. Fie A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor circumscrise acestor poligoane. Să se demonstreze că pentru ca triunghiul $A_1B_1C_1$ să fie echilateral condiția necesară și suficientă este ca n să fie egal cu trei.

Marius Stoka

2517. Să se rezolve sistemul:

$$x \log y - y \log x = 0,$$
$$2 \log x + \log y = 4 \log 2.$$

* * *

2518. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} + \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{2}{\sin 2a \operatorname{tg} b}.$$

* * *

2519. Să se găsească suma:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2520. Numerele a, b, c formează o progresie aritmetică. Să se demonstreze că expresiile $a^2 + ab + b^2$; $b^2 + bc + c^2$ și $c^2 + ca + a^2$ formează de asemenea, o progresie aritmetică.

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 9, Ordjonikidze)

2521. Într-un triunghi echilateral cu latura a este înscris un cerc. Din vîrful triunghiului este trasat un alt cerc cu raza $\frac{a}{2}$. Să se găsească aria cuprinsă între aceste cercuri.

(Olimpiada matematică, etapa II 1956, cl 9. Ordjonikidze)

2522. Să se construiască graficul funcției $y = \frac{12}{x - |x|}$.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2523. Pentru ce valori p și q rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ vor verifica sistemul de ecuații: $x_1 - 2x_2 = 2$; $2x_1 - 3x_2 = 5$.

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2524. Care este tensiunea rețelei dacă o bobină fără miez conectată la ea consumă o putere de 867 wați? Rezistența bobinei este de 12 ohmi, iar factorul de putere este 0,85.

Tiberiu V. Colibaba, student București

2525. Un fierbător electric pentru tensiunea de 220 V furnizează o putere de 660 W. Știind randamentul fierbătorului $\eta = 60\ \%$, să se determine:

a) în cît timp vor fierbe 2 litri de apă ce se află inițial la temperatura de 15°C,

b) cît costă energia electrică consumată știind că un kWh costă 0,60 lei.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2526. *a)* Perpendicular pe axul principal al unei oglinzi concave cu raza de 6 m se află un obiect. Știind că imaginea sa se formează între focar și centru și anume la 50 cm de centrul de curbură al oglinzii, să se găsească de cîte ori este mărită imaginea față de obiect.

b) Sarcina unui conductor este de 10^{22} u. es CGS și potențialul de $3 \cdot 10^2$ V. Să se exprime capacitatea conductorului în μF.

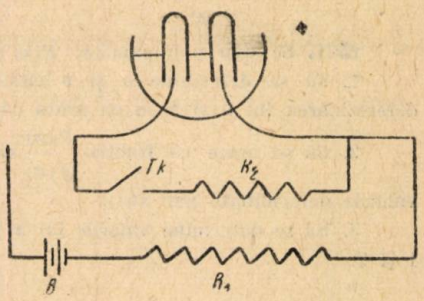
(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2527. Un circuit este compus din: o baterie de acumulatori B, avînd forța electromotoare de 4 V și rezistența interioară neglijabilă; o rezistență R_1 de 4 ohmi; un voltametru cu apă acidulată avînd forța contraelectromotoare de 1,5 V și rezistența de 1 ohm; o rezistență R_2 de 3,2 ohmi și un întrerupător K, montate în serie între bornele voltametrului. Se întreabă:

a) Care este volumul de hidrogen degajat în 15 minute, 55 secunde dacă întrerupătorul K este deschis?

b) Care este volumul de hidrogen degajat în același timp dacă întrerupătorul K este închis?

c) Care este bilanțul energiilor în al doilea caz?

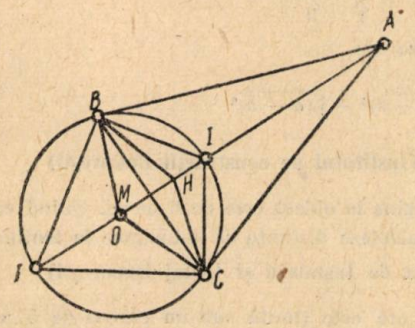


(Cercul de fizică din Capitală)

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITEREA IN INSTITUTE ŞI FACULTĂȚI IN AUGUST 1956

2528. Dintr-un punct A se duc tangentele AB, AC unui cerc O. Dreapta AO taie cercul în punctele I, I' (I fiind mai apropiat de A decît I'). Fie H simetricul punctului O față de coarda BC.

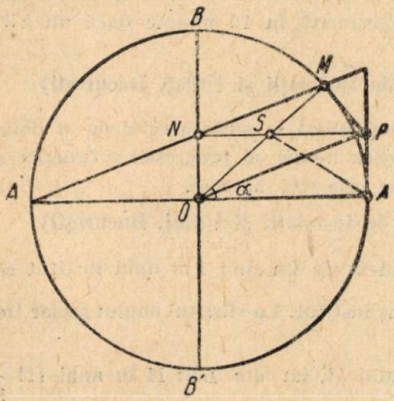


1. Să se arate că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, I' este centrul unuia din cercurile exînscrise în același triunghi, iar H este ortocentrul triunghiului.

2. Dacă R este raza cercului dat, iar $OA = d$, să se exprime în funcție de R și d aria triunghiului ABC.

(Institutul de construcții București)

2529. Fie AA' și BB' doi diametri perpendiculari într-un cerc de centru O și de rază R, iar M un punct pe cerc (în figură M este luat pe arcul AB). Coarda $A'M$ taie diametrul BB' în N și fie P proiecția lui N pe tangenta în A la cercul dat.



1. Să se demonstreze că patrulaterul $NOPM$ este un trapez isoscel.

2. Notînd AOM cu α să se calculeze segmentul OS (unde S este punctul de intersecție al diagonalelor trapezului $NOPM$) în funcție de R și α.

3. Să se determine α astfel încît triunghiul OSA să fie dreptunghic în S.

(Institutul de construcții București)

2530. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC cunoscînd:
$b + c = 6m$; $\operatorname{tg} B = 2 + 2 \cos 2C$.

(Institutul de construcții București)

2531. Se dau polinoamele: $P(x) = x^4 + ax + 3$; $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 + b$.

1. Să se determine a și b astfel ca polinoamele să se dividă prin $(x - 1)$. După determinarea lui a și b se va arăta că polinoamele se divid chiar cu $(x - 1)^2$.

2. Să se arate că fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este pozitivă pentru toate valorile lui x (a și b avînd valorile determinate mai sus).

3. Să se determine valorile lui x pentru care fracția precedentă rămîne cuprinsă între 1 și 2.

(Institutul de construcții București)

2532. Un drum ce leagă două orașe A și B are lungimea de 128 km. Un biciclist parcurge acest drum dus și întors. Drumul are porțiuni orizontale, suișuri și coborîșuri. Pe teren orizontal biciclistul merge cu 25 km/oră; la urcușuri cu 15 km/oră și la coborîșuri cu 30 km/oră. Să se afle lungimile porțiunilor de drum orizontale, de suișuri și de coborîșuri știind că coborîșurile sînt 7/10 din suișuri în sensul de la A la B, și că în acest sens întrebuințează 24 minute mai mult decît la întoarcere. (Soluție aritmetică).

(Institutul de construcții București)

2533. Să se demonstreze că pentru $a \geqslant b > 0$, avem:

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a + b}{2}} - \sqrt{\frac{a - b}{2}}.$$

Folosind relația precedentă, să se demonstreze că:

$$b\sqrt{2}\,\frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} = \sqrt{(a + b)^3} - \sqrt{(a - b)^3}\,.$$

(Institutul de construcții București)

2534. La o lentilă convexă distanța de la imagine la obiect este de 6 metri. Știind că distanța focală a lentilei este de 2/3 metri să se calculeze distanța de la imagine la lentilă.

(Facultatea de Instalații și Utilaj București)

2535. O rezistență care consumă 500 W pe oră este ținută sub un curent de 5 A. *a)* Să se calculeze rezistența, *b)* să se afle în cît timp fierbe o jumătate litru de apă de la temperatura de 20°C, *c)* să se afle cît costă energia consumată în 10 minute dacă un *kWh* costă 60 bani.

(Facultatea de Instalații și Utilaj, București)

2536. Trei numere sînt în progresie geometrică. Dacă se adaugă celui de al doilea 8 atunci progresia devine aritmetică. Dacă la al treilea număr al progresiei aritmetice se adaugă 64 progresia redevine geometrică. Să se afle cele trei numere.

(Facultatea de Instalații și Utilaj, București)

2537. La începutul unui an școlar, numărul studenților din anul 1 al unui institut era egal cu $\frac{4}{5}$ din numărul studenților anului II din același institut. La sfîrșitul anului școlar trec din anul I în anul II $\frac{5}{6}$ din numărul studenților anului II, iar din anul II în anul III $\frac{7}{10}$

din numărul studenților. La începutul noului an școlar mai pleacă 5 din studenții anului I, dar mai vin dela alte facultăți $\frac{3}{14}$ din numărul studenților rămași în anul II. Știind că acum în anul II se află 170 studenți, să se afle cîți studenți au fost în anul I și cîți în anul II, la începutul anului școlar trecut. (Soluția aritmetică).

(Facultatea de Instalații și Utilaj, București)

2538. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{[-1-(1-x^{-3})^{-2}]^{-1}-[1-(1-x^{-3})^{-2}]^{-1}}{[1-(1-x^{-3})^{-2}]^{-1}+[1-(1-x^{-3})^{-2}]^{-1}}=x^9.$$

(Facultatea de Instalații și Utilaj, București)

PROBLEME ȘI EXERCIȚII [1] PENTRU ȘCOALA DE ȘAPTE ANI

E: 920. Se dă triunghiul oarecare ABC. Prelungim latura AB dincolo de B pînă în C_1, astfel ca $AC_1 = BC + CA$; prelungim latura BC dincolo de C pînă în A_1, astfel ca $BA_1 = BA + AC$; prelungim latura CA dincolo de A pînă în B_1, astfel ca $CB_1 = CB + BA$. Notăm cu P și P_1 perimetrele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$. Să se stabilească inegalitățile:

$$\frac{3}{2} < \frac{P'}{P} < 3.$$

Stelian G. Mărculescu, O. Stalin

E: 921. Eu am azi vîrsta pe care a avut-o tatăl meu acum 44 de ani. Știind că vîrsta tatălui meu este egală cu vîrsta mamei plus $\frac{1}{4}$ din vîrsta mea, și că suma celor trei vîrste este 143 de ani, să se găsească vîrsta fiecăruia din noi.

B. V. Fărcaș, Zalău

E: 922. Suma a două numere este $9\frac{1}{15}$ și raportul lor $\frac{21}{13}$. Care sînt cele două numere?

* * *

E: 923. Să se demonstreze identitatea:

$$(x+y+1)^2+(x-y-1)^2+(y-x-1)^2+(1-x-y)^2=4(x^2+y^2+1).$$

Dorin Tomoiagă, Sighet

E: 924. Poate un elev exercita o presiune de 1000 atmosfere cu ajutorul unui deget?

Simion Pamfil, profesor București

E: 925. Dacă A, B, C, D sînt patru puncte situate pe o dreaptă (Δ) în ordinea dată, să se demonstreze că:

$$(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)-(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)=2\,\overline{AD}\cdot\overline{BC}.$$

Gheorghe I. Stoian, student București

---

[1] Clasa V: (921, 922, 928, 931, 935, 934), VI: (925, 924, 929, 932), VII: (925, 926, 927, 930).

E: 926. Într-un triunghi echilateral ABC să se înscrie un alt triunghi echilateral MNP a cărui latură este de lungimea dată.

N. Goicu Timişoara

E: 927. Să se determine p astfel ca polinomul

$$x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + p = 0$$

să fie un patrat perfect.

Eugen Iacob

E: 928. Media aritmetică a 4 numere direct proporţionale cu 2,5; $\frac{1}{2}$; 2 şi 1,5 este 13. Să se afle cele patru numere.

* * *

E: 929. Să se afle patru fracţii ai căror numărători sînt proporţionali cu numerele 3; 5; 7; 9; iar numitorii lor sînt proporţionali cu numerele 4; 6; 8; 10. Media aritmetică a acestor fracţii este $\frac{403}{1920}$.

B. Baieră, Păunești

E: 930. Să se arate că:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4a(b + c)(b^2 - bc + c^2) + 4b(c + a)(c^2 - ca + a^2) +$$
$$+ 4c(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 4ab(ab + c^2) + 4bc(bc + a^2) +$$
$$+ 4ca(ca + b^2) + 8abc(a + b + c) = (a + b + c)^4.$$

Paul R. Popescu, elev Bucureşti

E: 931. Să se determine aritmetic numărul $1072xyz$ pentru ca el să fie în acelaşi timp M 7; M 8 şi M 9.

Teodor Schein, Bucureşti

E: 932. Să se demonstreze identitatea:

$$(x + y - z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + (y + z - x)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (z + x - y)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) = 6.$$

* * *

E: 933. Să se împartă numărul 896 în două părţi aşa fel încît o noime din prima parte să fie egală cu o şeptime din a doua parte.

* * *

E: 934. Un elev cumpără în total 32 cărţi de cîte 2 lei şi de cîte 5 lei, cu suma de lei 100 lei. Cîte cărţi de fiecare fel a cumpărat?

Gh. Dobrotescu, Predeal

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 20 decembrie 1956 s-au mai evidenţiat următorii rezolvitori de probleme: *Iftimie Vasile* (clasa X Rădăuţi), *Lupu V. Dumitru* (abs. Vaslui), *Popescu R. Paul* (student Bucureşti), *Delibaş Constantin* (clasa X Ploeşti), *Stepan Ionel* (absolvent Constanţa), *Harmata L. Mihai* (student Bucureşti), *Pupăzan V. Nicolae* (an 3, şcoala artilerie Sibiu), *Iorgulescu Alex.* (student Bucureşti), *Ancuţoiu I. Gheorghe* (clasa X R. Vîlcea) *Sgăvirdea Dumitru* (absolvent Timişoara), *Costinescu Anca* (clasa X Iaşi), *Caracoli Stere* (clasa X Ianca Galaţi), *Birzan Romanel* (clasa X, s.m. 4 Cluj), *Mazilu G. Luminiţa* (clasa 7 s.m. « I. L. Cara-

giale » Bucureşti), *Bulucea D. Constantin* (clasa X R. Vîlcea), *Călianu Oprea* (clasa X Brăila), *Zorapapel Tiberiu* (clasa X s.m. 20 « Gh. Şincai » Bucureşti), *Panaitopol Laurenţiu* (clasa X Giurgiu), *Schain Teodor* (clasa X s.m. 1 « N. Bălcescu » Bucureşti), *Ballag Vasile* (clasa X Ploeşti), *Dorobanţu Valeriu* (absolvent Slatina), *Adam I. Gh.* (clasa 7 Tg. Jiu), *Răşcanu Radu* (clasa VIII s.m. 1 « N. Bălcescu » Bucureşti), *Dinuţ Teodor* (absolvent Craiova), *Mărgineanu Constantin* (absolvent Tg. Jiu), *Cuşmaru Ilie* (clasa X Iaşi), *Enişteanu N. Nicolae* clasa VIII s.m. 18 « M. Eminescu » Bucureşti), *Mărgineanu Ruxandra* (clasa 7 Filiaşi), *Cîrnu Mircea* (clasa IX Tîrgovişte), *Serdeşniuc Aurel* (an II şcoala de contabilitate Lugoj), *Niţă Georgeta* (clasa VIII, s.m. 22 Bucureşti), *Florea Dorel* (clasa X Slatina), *Peterffy Attila* (clasa X Tg. Mureş), *Bănică Radu* (clasa X Ianca).

Pînă la 20 decembrie 1956 s-au mai primit cîte cel puţin zece soluţii bune la problemele propuse în G.M.F.-B în ultimele trei numere apărute, după cum urmează; în paranteze sînt trecute numerele problemelor rezolvate, P (probleme propuse), N (note);

ADJUD (Bacău). *Şcoala de 7 ani Păuneşti.* Clasa 7. — Novac Gheorghe (2255, E: 857, 59, 74—77, 79—81, 83, 84), Vasilache Zarafina (2178, E: 851, 59, 67, 70—72, 74, 76, 79, 80, 83, 84).

AIUD. Clasa 6. — Leţia Ioan (E: 863, 65, 67, 70, 72, 74, 76, 80, 81, 84).

ALBA IULIA. Clasa 10. — Avram M. Nicolae (2011, 292, 309, 56, 57, 59, 64, 72, 78).

ALEXANDRIA. — Absolvent Berceanu I. Dumitru (2292, 309, 56, 57, 59, 60, 78, 79, 404—10). Clasa 9. — Trifu Mircea (2216, 36, 44, 99, 310, 49, 56, 57, 71, 74).

ARAD. Clasa 7. Floruţ Delia (E: 875, 78, 80, 81, 83, 85, 86, 88—90, 97, 98).

BACĂU. Clasa 8. Chiriţă Dumitru (2344, 49, 59—61, 68, 69, 80, 93, 4004, 05, 07—09, 13, E: 848, 55, 59, 63, 64, 67, 78, 90), Vasilache Ion (E: 836, 47, 51, 52, 55, 56, 60, 63—65, 67, 74, 76, 79, 84); clasa 9. Alexandruică Gh. Virgil (2349, 56, 57, 59, 61, 62, 92, 95, 404—06, 08, 09, 10), Dobronăuţeanu Silviu (2301, 16, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 95, 404—07, 09—11, P), Titaru Ion (2246, 99, 301, 16, 40, 55, 57, 59, 60, 63. 64, 92, 95, 404, 07, 09—11).

BAIA DE ARIEŞ. Clasa 7. Totolici Gabriel (E: 867—69, 71, 72, 74, 76, 80, 81, 83, 84).

BAIA MARE. Clasa 8. Atanasiu Moise. (E: 74—81, 83, 84), Farcaş Anton (E: 830, 40, 49, 56, 57, 60, 76, 83, 97), Prodan Dorina (E: 874—82, 84). Clasa 10. Babici Valeriu (2309, 17, 38, 40, 49, 54, 56, 57, 59, 72, 79, 93, 405, 07—10, 15, 17).

BEIUŞ. Clasa 10. Huplea Corneliu (3297, 307, 16, 17, 19, 35, 40, 47, 56, 57), Partenie Valeriu (2297, 304, 07, 16, 17, 19, 35, 38, 40, 57), Bodeanu Stelian (2233, 97, 304, 07, 16, 17, 19, 35, 40.

BÎRLAD. Clasa 5. Venescu Laurenţia (E: 851, 52, 54, 50, 63—65, 74, 76, 79, 84). Clasa 8. Popescu Gh. Gheorghe (E: 863—73).

BOTOŞANI. Clasa 8. Ciorăscu Virgil (2349, 59, 80, E: 851, 52, 57, 64, 67, 69, 71, 72, 74—76, 78, 79, 80, 83), Laur Liviu (E: 863, 65, 67, 69, 70, 72, 76, 79, 83, 84, 93, 94, 98).

BRĂILA. *Călianu Oprea* (1567, 70, 74, 78, 81, 82, 609, 16, 21, 23, 35, 36, 40, 44, 49, 51, 52, 70, 73, 81, 85, 87, 89, 90, 92, 93, 95, 97, 706, 14, 15, 17, 18, E: 625, 27, 34, 38, 40, 43, 47, P). Clasa 10. Comănici Petre (2297, 99, 301, 04, 09, 11, 19, 35, 63, 78).

BREAZA. Clasa 9. Motoargă Dumitru (2267, 95, 307, 11, 16, 39, 48, 49, 56, 57, 59, 61, 62, 79, P). Clasa 10. Văcaru Gheorghe (2290, 95, 96, 99, 301, 04, 09, 16, 17, 30, 35, 39, 49, 51, 55, 57, 59—63, 70, 72, 77, 79).

BUCUREŞTI. Studenţi: Dobrescu C. Alex., Inst. c.f.r.(2349, 51, 56, 57, 60, 63, 64, 68, 71, 72, 78—80, 86, 87), *Iorgulescu Alex.* (2216, 28, 35, 36, 40, 43, 44, 46, 49, 52, 54, 58—61, 63, 71. 73, 75, 78, 84, 91. 300, 04, 09, 16, 35, 38, 40, 45, 52, 56, 57, 64, 78, P), *Popescu Paul* (2249, 53, 79, 86, 92, 306, 16, 33, 41, 46—50, 53—57, 59, 60, 70, 72, 74, 77—80, 84, 86, 87, 91, 92, 95—402. 04—12, 15, P), Şaganai Nusfet (facult. mec.) (2249, 50, 90, 308, 13, 16, 17, 35, 38—40, 48, 54—57, 59, 60, 63, 72, 74, 78, 79, 80, P). Absolvenţi: Boambeş Gabriel (2304, 37, 40, 50, 56, 57, 64, 72, 77—79,), Buriman Adrian (2240, 93, 96, 99, 304, 08, 13, 46, 59, P), *Harmala L. Mihai* (2296, 98, 99, 304, 08, 09, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 33, 35, 38—40, 49, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 70—75, 78—80, 94, 95, 97, 404, 05, 08—15, 17). Abs. şc. 7 ani. Lungulescu C. Nuţică (2297, 301, 09, 17, 40, 56, 57, 78, 79, E: 852, 56, 57).

Şcoala medie nr. 1. « N. Bălcescu ». Clasa VI-a. Teodorescu Spirea (E: 851, 52, 54, 55, 60, 63, 65, 67—69, 72, 74, 79, 83), Clasa 8. Dascălu Dan (E: 856, 57, 61, 66, 71—73, 75, 77, 83). Ghelmeziu N. Nicolae (2356, 59, 98, 404—06, 09, E: 866, 69, 72, 73, 78, 83, 86, 88—90, 94, 98, P), Ioachim Alexandru (2339, 40, 49, 56, 57, 59, 63, 80, 87, 95, 400), Andrei Mariana (2375, E: 851, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 65, 68, 69, 74, 76, 79, 80, 84, 93), Lupeş Laurenţiu (E: 851—56, 60, 63—65), Mareş Mihai (E: 856, 57, 63—65, 67—69, 71, 72), Rădăceanu Eduard (2349, 56, 68, 92, 94, E: 874—76, 79—81, 84, 85, 88—91, 93, 94, 97, 98), *Răşcanu Radu* (2322, 39, 49, 56, E: 833, 51, 54, 55, 59, 61, 62, 63—65, 68,

70, 71, 74, 75, 78—80, 86, 90, 98), Medvedovici Ileana (2299, E: 851, 52, 56, 57, 65, 76, 80, 84, 93), Vinaru Luchian (E: 852—57, 64, 69, 71, 72). Clasa 9. Cocora Dan (2317, 340, 49, 59, 87, 404, 05, 07, 08, 09), Grozăvescu Cătălin (2349, 57, 95, 404—10), Lupan Mircea (2322, 36, 39, 49, 57, 405—07, 09, 10), Isbăşescu Mihai (2316, 36, 39, 40, 49, 53, 56, 57, 59, 80), Moldoveanu Călin (2246, 52, 55, 56, 61, 349, 56, 57, 68, 80), Paşcanu Constantin (2349—53, 56, 57—59), Popa Mircea (2356, 57, 59, 64, 78, 405—07, 09—11), Puşcă V. Aurel (2322, 57, 60, 63, 64, 92, 94, 95, 404—10). Clasa 10. Banciu Mircea (2319, 40, 49, 53, 54, 58, 60, 63, 78—80), Bodea C. Mircea (2301, 04, 16, 17, 21, 22, 49, 53—57, 59—64, 73, 74, 78—80), Boldea Vasile (2316, 49, 68, 72, 78, 97, 404—06, 08—10), Datcu Virgil (2357, 63, 78, 79, 84, 95, 97, 504—07, 09—12, 15), Iordănescu Radu Sorin (2319, 56, 60, 72, 84, 85, 91, 95—97, 99, 404, 06, 08, 10, 13, 16), Lupescu Mihai (2340 44, 46, 54, 56, 57, 60, 63, 70—72, 78), Klecner V. Adrian (2346, 57, 60, 63, 67, 71, 74, 78, 92, 95, 403—07, 09, 10, 11, 16, P), Moldoveanu Călin (2392, 95, 404—07, 09—11, 15), *Pascal Radu Şerban* (2235, 38, 39, 65, 97, 301, 03, 05, 16, 17, 19, 21, 32, 39, 40, 49, 54, 56, 57, 59, 61, 64, 70—72, 78—80), 94, 95, 97, 99, 405—07, 09—11, 15, Răduţ Constantin (2284, 316, 19, 22, 35, 40, 49, 57, 60, 78, 63, 80), *Schein Teodor* (2243, 45, 46, 97, 311, 16, 17, 21, 22, 32, 35, 38—40, 47, 49, 53, 56, 57, 59, 60, 64, 70, 72, 71, 78, 2379. 80, 96), Schatz Werner (2316, 20, 49, 68, 78, 92, 97, 405, 08, 10).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. Jianu Ion (2224, 30, 52, 54, 55, 57, 58, 65, 73, 84, 309).

Şcoala medie nr. 4. « *Aurel Vlaicu* ». Clasa 8. Budeanu Natalia (E: 863, 65, 67, 67, 69, 72, 76, 78, 79, 83, 90, 93), Cojocaru N. Paul (E: 845, 50—53, 65—67, 69—72), Ene T. Marcela (E: 863, 65, 69, 72, 79, 80, 83, 93, 405, 09), Ioniţă Luminiţa (E: 852, 55, 56, 63, 67, 69, 71, 76, 79, 80, 83), Mihăescu Florentin (2404, 05, 09, E: 863—65, 67, 69, 70, 72, 85), Muşat I. Mihai (E: 2349, 56, 74, 80), Stavrache Rodica (E: 850—52, 55, 63, 69, 70, 72, 78—80, 83, 93). Clasa 9. Bădeliţă Luminiţa (2342, 47—49, 51, 53, 55—58, 69). Cîmpu Gabriel (2299, 304, 39, 49, 56, 57, 5-, 79, 60, 63), Cîşlaru Cornel (2301, 04, 07, 10, 22, 40, 56, 57, 64, 80), Dobre D. Cornel (2297, 349, 56, 57, 60, 70, 72, 78, 87, 95, 404, 06—11, 15), Feldman I. David (2297, 301, 09, 16, 52, 57, 59, 64, 72, 79), Ionescu I. Marin (2309, 16, 28, 35, 52, 55—57, 59, 64, 72, 77—79), Ioniţă F. Livius (2309, 49, 55—57, 64, 72, 75, 77), Nicolau Gh. Cornel Virgil (2299, 309, 14—16, 32, 38, 40, 49, 56, 57, 59), Stoenescu M. Florin (2246, 55, 56, 61, 63, 301, 22, 35, 40), Ştefănoiu Viorel (2309, 28, 35, 52, 55—57, 64, 72, 77—79), Toader M. Gheorghe (2349, 56, 57, 60, 64, 71, 72, 77, 78), Udrea Dumitru (2297, 356, 57, 60, 64, 70—72, 78), Zahariuc Dan (2258, 304, 17, 24, 35, 47, 49, 56, 57, 60).

Şcoala medie nr. 7 « *I.L.Caragiale* ». Clasa 7. *Mazilu G. Luminiţa* (2340, 47, 56, 63, E: 851—81, 83. 84). Clasa 10. Buşilă Ioana (2316, 17, 19, 26, 36, *39*, 40, 47, 54, 57, 60, 61).

Şcoala medie nr. 11 « *D. Cantemir* ». Clasa 6. Gianni Emanuel (E: 844, 48, 68, 69, 72, 74, 76, 78—81, 83, 84). Clasa 7. Stoicescu Cristian (E: 864, 65, 67, 69, 71, 72, 75, 77, 78, 81, 83, P).

Şcoala medie nr. 13. Clasa 8. Moga Ion (2349, E: 864, 65, 67, 69, 71, 72, 75, 79, 80, 83), Popescu Ovidiu (2363, E: 956, 63, 65, 66, 71, 74, 76, 78—80, 83). Clasa 9. Chirică Laurian (2296, 97, 301, 04, 40, 48, 56, 57, 60, 63, 64, 77). Clasa 10. Lerner Emil (2218, 19, 43, 80, 86, 87, 90, 97, 99, 306, 16, 21, 33, 38, 49, 56, 61, P).

Şcoala medie nr. 14. Clasa 8. Berceanu Tedi (2322, E: 852, 54, 57, 59, 65, 70—72, 74, 76, 77, 80, 81, 83, 84), Zaharia Elena (E: 863—65, 67—73).

Şcoala medie nr. 17 « *Matei Basarab* ». Clasa 7. Panaite Teodor (2368, E: 851, 56, 64, 67, 79, 80, 84). Clasa 10. Coconea Mihai (2236, 90, 335, 38, 56, 57, 59, 60, 64, 74, 78).

Şcoala medie nr. 18 « *Mihail Eminescu* ». Clasa 8. *Enişteanu N. Nicolae* (E: 851—65, 67—81, 83, 84), Nicolau A. Christian (E: 831, 63—65, 67, 69—72, 76, 77, 79), Stănciulescu Dan (2392, 94, 95, 401, 06).

Şcoala medie nr. 19. Clasa 8. Neagu Anca (E: 836, 37, 44, 45, 47, 63—65, 67, 68).

Şcoala medie nr. 20 « *Gheorghe Şincai* ». Clasa 8. Pădureţ Victoria (E: 845, 52, 53, 56, 63), Clasa 10. Iordănescu Radu Sorin (2267, 304, 07, 16, 17, 39, 40, 49, 54, 57, 59, 68, 74, 78—80), *Zorapapel Tiberiu* (2216, 35, 56, 47, 49, 50, 88, 92, 99, 301, 04, 07, 09, 19, 22, 24, 38, 40, 48, 49, 54, 56, 57, 60, 63, 77—80, P).

Şcoala medie nr. 22. Clasa 7. Zamfirescu Tudor (E: 851—57, 59, 60, 62, P). Clasa 8. Ciorănescu Ioana (E: 866, 74—81, 83, P), *Niţă Georgeta* (E: 731, 62, 63, 65, 67, 72, 74, 77, 856, 59, 60, 63—65, 67, 69, 71, 72, 74, 76—81), Raicea Liana (E: 851—60, 62). Clasa 10. Ciocănaş Doina (2335, 39, 40, 57, 92, 95, 404, 05, 07, 12).

Şcoala medie nr. 24. Clasa 7. Ghiţulescu Ioana (E: 863, 64, 66—81, 83, 84).

Şcoala de 7 ani nr. 145. Ghencea. Clasa 6. Enescu Ştefan (E: 836, 43, 45, 52, 57, 64, 67, 74, 76, 77), Petrache Toma (E: 836, 44, 45, 48, 65, 67, 74, 76). Clasa 7. Ciufu

Georgeta (E: 836—38, 42—45, 47, 48, 77, 79, 83), Ionescu Clemenţa (E: 836, 50, 74—77, 79—81, 83, 84), Mircea Ecaterina (E: 863—65, 67, 68, 71, 73, 74, 76, 79, 80, 83), Năstase Elena (E: 836, 43, 44, 45, 48, 50, 52, 53, 55—57), Somcuţeanu Mircea (E: 852, 55—57, 74, 76, 77, 79, 80, 83).

Şcoala mixtă nr. 150. Clasa 7. Grigore Nicolae (E: 863—65, 67—73,)

BUZĂU. Clasa 10. Ieronim Ion (2267, 73, 84, 90, 304, 09, 17, 56, 57), Toma C. Nicolae (2316, 19, 24, 32, 41, 57, 71, 79). Abs. Bătireanu Gh. (2291, 94, 304, 09, 13, 49, 56, 57, 78, 80, 405, 07, 10, 11, 13).

CALAFAT. Clasa 8. Jidovin F. Ştefan (2349, 57, 59, E: 874, 76—80, 83, 84). Clasa 9. Mititelu M. Ştefan (2317, 39, 49, 53, 56, 57, 61, 92, 94—96, 404, 05, 07, 09, 10). Clasa 10. Ciurezu C. Radu (2304, 40, 49, 56, 57, 59, 60, 72, 78).

CĂLĂRAŞI. Clasa 8. Panait Dan (E: 863—65, 67, 70, 76—81, 83). Clasa 10. Onuţă N. Ion (2349, 54, 56, 57, 60, 64, 72, 74, 77,78, 80, P).

CARACAL. Clasa 6. Niţulescu C. Lucian (E: 837, 39, 43, 45, 52, 54, 59, 63, 74, 76—70, 84), Păunescu Doru (E: 852, 54—56, 64, 65, 67, 74, 76, 77, 79—81, 84); Clasa 8. Niţulescu C. Ion (E: 832, 37, 43, 45, 54, 60, 63, 64, 67, 74, 76, 77, 79, 80, 84). Clasa 9. Başturescu Mugurel (2322, 39, 40, 49, 56, 57, 59, 61, 64, 65, 68, 80), Dincă Gh. (2339, 40, 49, 57, 60, 63, 64, 76, 80, 539, P), Madan Constantin (2240, 44, 57, 63, 64, 74, 79), Stratan Gheorghe (2340, 57, 60, 63, 68, E: 851, 52, 54, 57, 60, P). Clasa 10. Cernat Constantin (2296, 304, 17, 35, 39, 40, 49, 56, 57, 59), Niculescu O. Stelian (2340, 49, 56, 57, 59, 72, 80, 95, 405, 09, 10, P).

CARANSEBEŞ. Clasa 7. Traian Constantin (E: 863—65, 67, 59, 71, 72, 74, 78—81, 84). Clasa 8. Sgăvîrdea Cornelia (E: 847, 50, 52, 56, 57, 64—66, 78, 83).

CÎMPINA (Ploeşti). Clasa 5. Săndulescu Mihaela (E: 851, 54, 64, 76, 79, 84). Clasa 7. Florea C. Gheorghe (E: 851, 52, 57, 60, 63—65, 69, 72, 73, P).

CÎMPULUNG-MUSCEL. Clasa 6. Savin Alex. (E: 863—65, 74, 76, 77, 79—81, 84). Clasa 9. Merchez Const. (2316, 40, 49, 56, 57, 59, 60, 64, 72, 74, 80), Vaida Cornel (2316, 20, 40, 49, 56, 57, 59, 60, 64, 72, 74, 80). Clasa 10. Braga Z. Ion (2296, 301, 09, 35, 40, 56, 57, 93), Comanici Dumitru (2235, 40, 301, 49, 54, 56, 77—80).

CLUJ. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Pop Corneliu (2349, 56, 57, 64, 92, 404, 05, 09, E: 872, 83).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 8. Ungur Alexandrina (E: 863, 65, 67, 74, 76—81, 84). Şcoala pedagogică nr. 2, anul I. Buligan Silvia (E: 851—56, 58, 76, 79, 80). Anul II. Grindian Maria (2272, 349, 56, E: 863, 65, 70, 74, 77—79), Neagoş Stela (2363, 72, E: 851, 55, 72, 74, 76, 78—80). Clasa 7. Cordoş Octavian (E: 851, 52, 54—56, 64, 67, 69, 71, 72).

Şcoala medie nr. 4. Clasa 10. *Bîrzan Romanel* (2347, 48, 54, 56, 57, 59—61, 63, 64, 70—75, 77—79, 85, 87, 92, 94, 95, 97, 99, 400, 04—12, 15, P), Pop Horaţiu (2349, 54, 56, 57, 64, 78, 92, 404, 05, 09).

Şcoala medie nr. 8. Clasa 8. Man Traian (E: 851, 52, 54, 55, 60, 63, 65, 69, 72, 74, 76, 79—81, 83, 84), Teognoste Mihai (E: 851, 52, 54, 55, 60, 63, 65, 70, 71, 74, 76, 79).

Şcoala medie nr. 9. Clasa 8. Mănăştureanu Florica (E: 687, 709, 18, 21, 27, 38, 44, 48, 51, 62, 67).

CONSTANŢA. Clasa 8. Anghel Lucia (E: 863, 65, 67, 69, 71—74, 76, 79, 83, 84), Rădulescu Mircea (2349, E: 851, 56, 64, 65, 72—74, 79), Albu Marin (P). Abs. *Stepan Ionel* (2216, 17, 23, 28, 35, 36, 38, 49—51, 63—67, 94, 97, 301, 04, 07, 09, 17, 32, 33, 36—38, 40, 45, 53, 56—58, 63, 64, 70—79, P).

CRAIOVA. *Absolvenţi: Dinuţ Teodor* (2221, 313, 24, 32, 38, 40, 49—51, 53, 56—58, 63, 64, 72, 74, 78, 79, 92, 95, 405, 06, 08, 09, 12, 15, 17, P), Tărîţă Ion (2216, 34, 35, 49, 67, 309, 13, 49, 54, 56, 57, 60, 64, 70, 72, 77—80).

Şcoala medie nr. 1. «N. Bălcescu». Clasa 6. Păun Dumitru (E: 851, 52, 54, 55, 57, 60, 63—65, 67, 93, 97). Clasa 10. Săşeanu C. Vasile (2332, 35, 36, 40, 46, 53, 54, 57, 59, 78, 81).

Şcoala medie nr. 2 «Fraţii Buzeşti». Clasa 10. Staicu N. Ştefan (2309, 16, 17, 19, 56, 57, 68, 77, P).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 10. Rădulescu Ecaterina (2288, 316, 17, 19, 57, 61, 68, 77, 78), Uruş Doina (2291, 309, 16, 17, 19, 57, 74, 77—79).

CRICOV. *Şcoala de 7 ani Urlaţi* Clasa 6. Georgescu C. Radu (E: 864, 69, 72, 83, 89, 90).

DRĂGĂNEŞTI (Piteşti). Şcoala de 7 ani Crîngeni. Clasa 7. Ignat Irina (E: 874, 76, 79, 84).

FĂGĂRAŞ. Clasa 9. Săbăduş M. (2316, 40, 56, 57, 59, 63, 64, 92, 94, 95, 99, P).

FĂGET (Timişoara). Antonaş Petru (2353, 54, 57, 60, 64, 67, 71, 72, 78, 79).

FOCŞANI. Clasa 8. Focşeneanu Mihail (E: 869, 74, 76—81, 83, 84, 93), Rădescu Gabriela (2380, E: 852, 63, 64, 75, 79—81, 83). Clasa 10. Horovitz Iulian (2332, 36, 49, 53, 56, 64, 74, 78, 79).

FILIAŞI (Craiova). *Şcoala de 7 ani Isvoarele.* Clasa 7. *Mărgineanu Ruxandra* (E: 851—57, 60, 61, 63—67, 69—76, 78—81, 83, 84).

GĂEŞTI (Piteşti). Clasa 6. Tîrtan Teodor (E: 857, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 79—81, 83, 84). Clasa 10. Tîrtan Gabriel (2240, 322, 52, 60, 78, 92, 95, 400, 04, 06, 10, P).

GALAŢI. Clasa 10. Caraman M. Gheorghe (2316, 40, 60, 57, 59, 63, 78, 404, 05, 07, 09, 10), Chirilă Costică (2316, 17, 21, 40, 56, 57, 59, 60, 77—79), Chirilă Marian (2312, 16, 21, 26, 32, 37, 39, 49, 54, 72, 80, P), Jinescu V. Valeriu (2337, 40, 53, 57, 59, 60, 63, 68, 407—10).

GIURGIU. Clasa 8. Drăgan Petre (E:856, 64, 65, 67—70, 72, 74, 76, 79, 80, 83, 84), Popescu Radu (E: 852—57, 60, 63—65, 67—70, 72, 74, 76, 79, 83, 84, P), Videanu I. Marioara (E: 874—81, 83—84). Clasa 10. *Panaitopol Laurentiu* (2251, 86, 88, 90—93, 95, 97, 301, 03, 04, 09, 12, 14, 17, 16, 19—21, 23, 26, 30, 32, 33, 35, 36, 38—40, P). Absolvenţi: Bătineţu M. Dumitru (2292, 94, 300, 04, 09, 13, 38, 40, 47—49, 56, 57, 59, 60, 63, 68, 92, 95, 405, 06, 09, 10, 15).

HUŞI. Abs. Dolteanu Temistocle (2309, 17, 38, 56, 57, 71, 72, 74, 75, 77—80).

HUNEDOARA. *Şcoala de 7 ani, Ghelar.* Clasa 6. Radi Gelu (E: 864, 65, 72, 75, 81, 83, 84, 86, 89, 93).

IANCA (Galaţi). Clasa 10. *Bănică Radu* (2245, 96, 304, 19—21, 38, 45, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 70—72, 78, 79, 92, 95, 97, 400, 04), *Caracoti Stere* (2216, 33, 36, 45, 304, 16, 19, 20, 32, 38, 54—57, 59, 60, 63, 68, 70—72, 74, 79, 92, 95, 404—11, 15, 17), Iancu Ovidiu (2304, 09, 19, 56, 57, 59, 60, 63, 78, 79).

IAŞI. *Şcoala medie nr. 1 « Mihail Sadoveanu ».* Clasa 8. Simovici Dan (2351, E: 851, 56, 63, 65, 74, 76, 79, 80, 94). Clasa 9. Cosma Nicolae (2332, 39, 46, 47, 49, 56, 57, 59—63), Stancu Mihai (2316, 26, 32, 39, 40, 46—49, 56, 57, 59—64, 80, 94, 96, 406, 07, 10, 11). Clasa 10. Copel Iosel (2265, 67, 303, 09, 54, 57, 64, 68, 78—80). *Cuşmaru Ilie* (2290, 95, 97, 315, 21, 24, 49, 56, 57, 60, 63, 64, 78, 79, 92, 95, 404—11, 15), Feldman Milu (2290, 95, 97, 315, 21, 56, 59, 60, 63, 64), Şor Liber (2290, 95, 97, 315, 21, 49, 56, 57, 59, 60, 63, 64), Iţicovici Mihai (2290, 95, 97, 315, 21, 49, 56, 57, 59, 60, 74, 78, 79).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. *Costinescu Anca* (2289—91, 95, 96, 97, 99, 301, 03—05, 08, 09, 11, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 26, 30, 32, 35, 36, 38—41, 44, 47, 48, 63, 78).

Şcoala medie nr. 3 « Costache Negruţi ». Clasa 7. Antohi Dan (E: 852, 55, 64, 65, 67, 69, 70, 74, 76, 79—81, 84), Homutescu Virgil (E: 869, 72, 74, 76—81, 83, 84), Scripcaru Doru (E: 852, 55, 65, 67, 68, 76, 79, 80, 84), Ungureanu Radu (E: 854, 55, 58, 64, 65, 67, 76, 79, 80, 83, 84). Clasa 8. Caba Mihai (E: 864, 69, 73—76, 79, 80, 83, 84), Cărăuşu Alex. (E: 863, 64, 69, 72, 74—77, 79—81, 83, 84), Cernăianu Dan (E: 853—57, 59, 61, 67, 69—77, 79, 80, 83), Constantin Ioan (E: 852, 53, 56, 59, 69, 71, 72, 77, 79, 83), Enache Mircea (E: 864, 65, 67, 69—71, 74, 76, 79, 83, 84), Gîscă Neculai (E: 853, 56, 59, 67, 69, 71, 72, 74—76, 80, 83, 84), Hrapciuc Cătălin (E: 842, 53, 56, 60, 64, 69, 71, 75, 83, 84), Vlas Emilian (E: 852, 53, 56, 60, 69, 71, 72, 75, 78, 83, 84). Clasa 9. Nanu Gh. Octavian (2203, 21, 33, 40, 68, 317, 30, 36, 39, 40, 46, 49, 56, 57, 59—64), Clasa 10. Diţu Emil (2217, 29, 35, 304, 09, 15, 16, 21, 35, 56, 57, 60, 63, 64, 68, 77—79).

Şcoala de 7 ani. Clasa 7. Costinescu Vasile (E: 855—57, 63—67, 69, 73, 74, 76, 79, 80, 83, 84).

Şcoala pedagogică mixtă. Anul II. Grigore Mihai (E: 851, 52, 54—60, 63, 64), Onofrei Maria (E: 836, 47, 48, 52, 54—56, 63, 64, 68, 72).

Student Ogescu Valentin (mat. fiz.) (2252, 65, 84, 301, 30, 40, 49, 56, 59, 72, 74, 78, 80).

LUGOJ. *Şcoala de contabilitate.* Anul II. *Serdeşniuc Aurel* (2301, E: 851, 52, 55—57, 59, 60, 63—65, 67—69, 70, 72, 76—80, 83, 84, P), abs. Nemeş Alexandru (2228, 316, 32, 35, 37, 40, 52, 56, 57, 64, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. Boroancă Ion (2319, 23, 40, 49, 54, 56—60, 68, 74, 78—80), Daba Dumitru (2297, 305, 57, 59, 60, 63, 64, 71, 77—79), Păpuşoiu Gheorghe (2323, 26, 39, 49, 54, 56, 57, 59, 60, 62, 70, 72, 77—80).

NĂSĂUD. Singeorzan Emil (2342, 45, 49, 51, 54, 55, 57—59, 61, 63, 64 68, 70, 72, 74, 80).

NEGREŞTI (Iaşi) Clasa 8. Floareş Alexandru (2255, 64, 300, E: 844, 45, 50, 52, 57, 65, 73, P).

ORADEA. Şcoala medie nr. 1. Clasa 10. Cristina Gh. (2304, 17, 37, 38, 49, 56, 57, 60, 63, 74, 78, 79).

ORAŞUL STALIN. Stud. Tofan Mihai (2288, 90—94, 98, 301—04).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 8. Cioacă Maria (E: 822, 27, 29, 33, 47, 48, 50, 56, 57, 83).

Şcoala medie nr. 5. Clasa 8. Florea Felicia (E: 850—52, 55, 56, 63, 65, 67, 69, 72, 75, 76, 78, 80, 83), Negoţ Marieta (E: 851, 52, 55—57, 60, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 77, 79, 83).

PIATRA NEAMŢ. Abs. Munteanu L. Gabriela (2296, 308, 09, 18, 21, 35, 37, 38, 40, 57, 59, 72).

PETROŞANI (Hunedoara). Clasa 8. Gherlan Mihai (2356, E: 874, 76, 77, 79—81, 84), Lepădatu C. Ilie (E: 852, 53, 55, 57, 63, 67, 69, 70, 72, 83), Păsculescu Mihai (E: 853, 65, 68, 69, 72, 74, 75, 81, 83, 84).

PITEŞTI. *Şcoala de 7 ani* nr. 4. Clasa 6. Tomescu R. Titu (E: 851, 52, 54, 55, 60, 64, 65, 74, 79, 84).

PLOEŞTI. *Şcoala medie nr. 1 « I. L. Caragiale ».* Clasa 7. Patron Alexandru (E: 844, 51, 52, 54—56, 63—65, 67, 69, 70), Pîrîianu R. Radu (E: 840, 44, 49, 52, 55, 63—65, 68, 70). Clasa 8. Corvner Eugen (E: 851, 52, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 74—76, 79—81, 83, 84). Clasa 9. Ciobanu Romeo (2304, 07, 09, 17, 35, 40, 56, 57, 59, 71, 404, 05, 08, 09), Ciortan Vasile (2218, 29, 34—36, 97, 300, 11, 16, 19, 27, 28, 42, 46, 47, 49, 50, 53, 56—65, 72, 74, 77—80), Taga S. Mihai (2317, 40, 47, 48, 55—57, 59, 60, 63, 71). Clasa 10. *Baltag Vasile* (2219, 40, 43, 44, 83, 96, 97, 99, 306, 17, 21, 44—49, 51, 53, 55—57, 59, 63, 68, 72—74, 76, 78—80 P), *Delibaş Constantin* (2290, 97, 301, 04, 08, 09, 17, 19, 35, 40, 47—49, 51, 54—57, 59,—64, 68, 70, 75, 77, 80, 85, 97, 90, 92, 94—97, 99, 400, 05—07, 09—17), Drăgan Radu (2216, 35, 97, 301, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 73, 78), Leca Aurel (2216, 54, 55, 58, 61, 62, 74, 84, 90, 94, 96, 97, 99, 301, 12, 32, 39), Moruşi Bruno (2309, 316, 19, 57, 60, 64, 72, 77, 78, 404, 05, 07, 09, 10, 12), Păncescu Florin (2297, 301, 307, 28, 37, 40, 56, 64, 78, 79, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 7. Ciortan Stanca (E: 851, 52, 54—56, 60, 64, 65, 67—70), Gheorghiu N. Nicolae (E: 838, 42, 48, 50, 56, 57, 60, 65, 69, 72, 74).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 7. Anghel Octavian (E: 863—65, 69, 70, 72, 76, 79, 81, 84), Cheşa Valeriu (E: 863—65, 69, 70, 72, 76, 79, 81, 84), Manolache Daniela (E: 863—66, 69, 70, 74, 76, 79, 84). Clasa 8. Marinescu N. Mircea (E: 852, 56, 57, 63, 65, 67, 70, 74—76, 78—80, 83, 84). Abs. Curelea Iulian (2288, 92, 301, 56, 57, 60, 74, 77—80, P).

PUCIOASA. Abs. Stan Dumitru (2055, 203, 17, 33—36, 38, 40, 43, 49, 50, 66, 67, 88, 90, 94, 96, 97, 99, 301, 02, 04, 08, 09).

RĂDĂUŢI. Clasa 10. *Iftimie Vasile* (220, 21, 26, 37, 43, 44, 64, 88, 94, 95, 305, 08, 13, 15—17, 19—22, 25, 26, 30—33, 35—43, 46—49, 51—57, 59—61, 63, 64, 70—74, 76—80, P), Todosi Traian (2345, 49, 56, 59, 60, 63, 74, 78—80).

REŞIŢA. Tat N. Mircea (2288, 98, 300, 01, 04, 07, 09, 16, 19, 38, 40, 42, 49, 53, 54, 56, 57, 60, 68, 78, 79, 405, 08, 09, P). Clasa 10. Cucu Romulus (2294, 303, 09, 16, 40, 57, 63, 78, 79), Străinescu I. Ionel (2288, 92, 98, 300, 01, 03, 04, 07, 09, 11).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa 7. Bulucea D. Dumitru (E: 852, 56, 57, 65, 69, 72, 76, 79, 80, 83). Clasa 9. Cănilă C. Gheorghe (2340, E: 852, 55—57, 60, 63, 65, 67, 69—73), Constantinescu I. Ion (2316, 40 48, 49, 57, 60, 61, 92, 405, 07, 10). Clasa 10. *Anculoiu I. Gheorghe* (2317, 37, 45, 46, 49, 55—57, 59, 60, 62, 63, 73, 75, 77—80, 84, 87, 90—92, 94—402, 04—17), *Bulucea D. Constantin* (2219, 21, 33, 43, 90, 91, 93, 309, 16, 309, 16, 17, 19, 21, 23, 32, 35, 36, 38—40, 46, 48, 49, 56, 57, 60, 61, 63, 72—74, 77—80, P). Constantinescu I. Constantin (2235, 97, 309, 16, 17, 19, 21, 38, 40, 48, 49, 56, 57, 60, 74, 78, 79), Ristescu C. Gheorghe (2297, 304, 09, 16, 17, 21, 35, 38, 40, 60, 78), Smadea Dumitru (2297, 304, 09, 16, 17, 19, 21, 35, 38, 40, 78), Unea I. Ion (2235, 309, 38, 48, 49, 56, 57, 60, 63, 74, 78, 80), Vlăsceanu Gh. (2297, 304, 09, 10, 17, 21, 35, 38, 40, 48, 60, 78).

SATU MARE. *Şcoala medie « M. Eminescu ».* Clasa 9. Mărieş Viorel (2300, 01, 04, 07—13), Wiesler Ervin (2300, 04, 07—13), Wiesler Herwart (2300, 01, 04, 07—13, 97).

Şcoala mixtă nr. 2. Brejan Iulia (E: 863, 65, 67, 69, 72, 74—81, 84).

SIBIU. Clasa 7. Lupu Brînduşa (E: 819, 24, 51—56, 64, 67—69, 71—81, 83). Clasa 9. Ancuţa Mircea (2301, 46, 49, 53, 57, 58—60, 62, 64, 80), abs. Golescu Alex. (1620, 625, 27, 28, 700, 01, 07, 24, 2326, 37, 41, 46, 49, 53, 63).

Şcoala militară de artilerie. Anul III. *Pupăzan V. Nicolae* (2297, 316, 17, 19, 21—23, 32, 33, 35—40, 46—50, 54—57, 59—64, 68, 70—74, 76—80).

SIGHET. Clasa 8. Tomoiagă Dorin (E: 874—81, 83, 84, P).

SIGHIŞOARA. *Şcoala medie germană.* Clasa 10. Bukowski Peter (2294, 309, 17, 40, 49, 52, 56, 77—80).

SLATINA. *Absolvenţi;* Bărbulescu Marcel (2231, 95, 344, 46, 4-, 59, 61, 74, 79, 80, P), *Dorobanţu Valeriu* (2297, 300, 01, 12, 49, 53—57, 59—61, 63, 64, 70—72, 77—80, 92, 95, 98, 400, 04—08, 10—12, 14—17, P).

Şcoala medie nr. 1. Clasa 9. Becheanu I. Mircea (2297, 316, 22, 56, 57, 64, 68, 75, 77, 79), Olaru Mihai (2290, 95, 321, 40, 44, 46, 49, 59, 74, 79, 80). Clasa 10. *Florea Dorel* (2301, 04, 09, 16, 17, 19, 21, 37,—39, 40, 56, 57, 59, 63, 72, 78, 79, 95, 404—10, P), Osiceanu Dan (2317, 19, 20, 38, 55—57, 59, 63, 64, 67. 68), Şerbănescu V. Tiberiu (1372, 74, 75, 77, 83, 403, 11, 16, 36, 42, 49, 65, 72, 75, 86), Dolocan D. Voicu (2310, 49, 55—59, 64, 68, 78, 79, 410, 15).

TECUCI. Clasa 9. Vidraşcu Traian (2288, 99, 307, 10, 11, 14, 16, 22, 28, 32, P). Clasa 10. Tudose Traian (2246, 52, 57, 58, 60, 61, 84, 97, 99, 304, 12, P).

TIMIŞOARA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Mihăileanu Alex. (E: 852—55, 57, 70, 76, 78—80, 83). Clasa 10. Poraicu Bogdan (2297, 349, 57, 61, 64, 75, 77a, 77b, 378—80).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 7. Coşereanu Sanda (E: 836, 52, 54—56, 60, 65, 67, 69—71, 83). Abs. *Sgăvîrdea Dumitru* (2050, 52, 54, 56, 86, 88, 109, 13, 14, 17, 29, 32, 53, 75, 84, 216, 33, 35—37, 40, 72, 91, 96, 301, 03—05, 08, 09, 14, 19, 31, 35, 39, 40, 56,57, 64, 79, P).

TÎRGOVIŞTE. Clasa 8. Brezeanu I. Florin (E: 851, 52, 55, 60, 63, 65, 67, 69, 70, 72). Clasa 9. *Cîrnu Mircea* (2236, 64, 96, 97, 300, 01, 04, 07, 09, 16—19, 22, 40, 45, 48, 49, 52, 57, 59, 60, 63, 68, 72). Clasa 10. Diaconescu Silviu (2342, 49, 59, 74, 78, 80).

TÎRGU JIU. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 7. Cancer Anca (2328, E: 863, 64, 71—81, 84). Şcoala de 7 ani Teleşti Birnici. Clasa 7. *Adam I. Gh.* (2294, 307, 47, 48, 49, 56, 68, E: 824, 26, 28, 32, 51, 52, 54, 55, 63—65, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 79—81, 83, 84). Abs. *Mărgineanu Constantin* (2216, 17, 33, 35, 36, 96, 97, 301, 04, 09, 13, 16, 19, 32, 35, 37, 38, 40, 53, 56, 57, 60, 63, 64, 71, 72, 74, 78, 79). Clasa 8. Anițescu N. Nicolae (E: 851—55, 57, 59—62, 96), Stamer Mişu (2340, 56, 78, E: 866, 71—73, 75, 83). Clasa 10. Hoară Horaţiu (2316, 38, 40, 49, 54, 56, 57, 60, 72, 73, 78, 79, 92, 95, 404—07, 09—11, 15).

TÎRGU MUREŞ. Clasa 8. Antoniuc Bogdan (E: 851, 52, 54—57, 59, 60), Filipescu Dan (E: 851, 52, 54—62), Gherendi Teofil (E: 851—62), Ioan A. Corneliu (E: 851—60, 63, 65), Petrescu Traian (E: 851, 52, 54—57, 59, 60), Şabău Traian (E: 851, 52, 54, 56—59), Veegh Alexandru (2356, 449, E: 851—57, 59—62, 65). Clasa 10. *Peterfy Attila* (2224, 30, 42, 47, 54, 55, 57, 58, 61, 73, 78, 80, 84, 307, 11, 35, 39, 49, 53, 55, 57, 59, 72, 75, 77).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa 8. Hogea Margareta (E: 863—73). Clasa 10. Plăcintă Constantin (2356, 59, 78, 79, 92, 402, 04—11, 14, 15, 17).

TURNU SEVERIN. Clasa 8. Antonie Pia (2349, 56, E: 874, 76, 77, 79—81, 83, 84). Clasa 10. Dobrovolski Mihai (2290, 92, 94, 97, 300, 01, 04, 07, 10, 11, 54, 57, 60, 78), Nistoroiu Titel (2297, 304, 32, 38, 40, 49, 56, 57, 60, 64, 78, 79), Stoianovici I. Cornel (2290, 97, 301, 04, 07, 56—58, 60, 74, 78), Rusu Constantin (2288, 90, 97, 304, 07, 35, 38, 40, 49, 56, 57, 60, 78).

VASLUI. Clasa 9. Lupu V. Ioan (2316, 40, 94, 95, 99, 404, 05, 10, 11, 16), abs. *Lupu V. Dumitru* (2290, 96, 97, 99, 301, 03, 04, 09, 14, 16, 17, 19, 21, 32, 35, 37, 39, 40, 43, 46, 55—57, 59, 60, 62—64, 70—73, 75—79, 88, 91, 92, 94—99, 403—17).

Pînă la apariţia G.M.F.B. Nr. 3 se mai primesc soluţii la problemele propuse în numerile 11 şi 12 din 1956 şi în numerile 1 şi 2 din 1957. Elevii de clasa VIII-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasele V-VII. Soluţiile trimise să fie aşezate în ordinea numerică a problemelor iar pe plic să se scrie numele şi şcoala din care rezolvitorul face parte.

ERATĂ. — La E: 888 în loc de *CA* se va scrie *CD*. — La E: 895 în loc de 17 se va scrie 6. — La E: 916, pag. 51 primul radical se va prelungi peste cei următori pînă la semnul =.

Könyvtár

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea* fiecărei probleme trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu *îngrijire*. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute*.

— Rezolvitorii pot trimite într'un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă «Redactarea soluțiilor».

— Soluțiile ce se vor enunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni*.

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a și a *X*-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante*. Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvatorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au *dat generalizări* și observații interesante sub formă de *note*.

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor *extrașcolare* la matematică și la fizică, asupra *cercurilor de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a «*Olimpiadelor de matematică și de fizică*» pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei *se vor face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr.1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate*.

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. MARCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROBIEV	**Numerile lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.**
22. NICOLAE STĂNESCU	**Electronul.**
23 V. SERGIESCU	**Introducere în fizica solidului.**
24. G. N. BERMAN	**Cicloida.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**

ABONAMENTUL LA GMF-B PE ANUL 1957, ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE)

C. 1641 — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4

Preţul Lei 1 exemplarul

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCURESTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII — martie 1957

3

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VIII, nr. 3 — martie 1957

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Cîteva teoreme despre triunghiuri* de D. V. Ionescu	113
2.	*Reactorul nuclear* de Virgil Atanasiu . . .	119
3.	*Din istoria trigonometriei* de I. Olivotto . . .	130
4.	*Fisiunea nucleară* de Al. Ciocănel	138
5.	*Experienţe cu termoscopul*	140
6.	*Premiile G.M.F-B pe anul 1956*	143
7.	*Din viaţa «Societăţii»*	145
8.	*Probleme rezolvate (1602; 1789; 2201; 2203; 2215; 2218; 2228; 2221; 2231; 2239)*	150
9.	*Probleme propuse (2539—2566)*	157
10.	*Chestiuni de examen (2567—2582)*	160
11.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani (E: 935 — E: 948)*	162
12.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	164
13.	*Poşta redacţiei*	167

ANUL VIII 3 MARTIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ., **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

R E D A C Ţ I A : Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VIII • nr. 3 martie 1957

Könyvtár TULAJDONA

CÎTEVA TEOREME DESPRE TRIUNGHIURI

Prof. univ. D. V. IONESCU, Cluj

IN triunghiul ABC să notăm cu $A''B''C''$ triunghiul său ortic şi să ne purtăm atenţia asupra triunghiurilor $AB''C''$, $BC''A''$, $CA''B''$. Vom nota cu α, α_1, α_2, α_3 centrele cercurilor înscris şi exînscrise în triunghiul $AB''C''$, α_1 fiind opus lui A, α_2 lui B'', α_3 luì C''; β, β_1, β_2, β_3 centrele cercurilor înscris şi exînscrise în triunghiul $A''BC''$, β_1 fiind opus lui A'', β_2 lui B, β_3 lui C''; γ, γ_1, γ_2, γ_3 centrele cercurilor înscris şi exînscrise în triunghiul $A''B''C$, γ_1 fiind opus lui A'', γ_2 lui B'', γ_3 lui C.

Fie pe de altă parte, I, I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor înscris şi exînscrise în triunghiul ABC, I_1 fiind opus lui A, I_2 lui B şi I_3 lui C. Proiectăm punctele I, I_1, I_2, I_3 pe laturile triunghiului ABC, obţinem astfel triunghiurile $A'B'C'$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ (fig. 1).

Scopul acestui articol este de a demonstra în primul rînd următoarele teoreme:

Teorema 1: *Triunghiul* $\alpha\beta\gamma$ *este egal cu triunghiul* $A'B'C'$.

Teorema 2: *Triunghiurile* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ *sînt respectiv egale cu triunghiurile* $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$; $A_3B_3C_3$.

Prima teoremă a fost deja enunţată în 1917 [1]); aici îi vom da o nouă demonstraţie. Teorema 2 este un complement adus primei teoreme.

1. *Determinarea punctelor* α, α_1, α_2, α_3. Vom demonstra întîi, că punctele α, α_1, α_2, α_3 sînt simetricele punctelor I, I_1, I_2, I_3 respectiv în raport cu $B'C'$, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3.

1° Fie D proiecţia lui I pe $B'C'$. Triunghiurile $AB''C''$, ABC fiind asemenea, avem:

$$\frac{\overline{A\alpha}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \cos A.$$

Rezultă că

$$\overline{A\alpha} = \overline{AI}\cos A$$

şi

$$\overline{I\alpha} = \overline{AI}(1 - \cos A) = 2\,\overline{AI}\sin^2\frac{A}{2}.$$

[1]) D. V. Ionescu, *Proprietăţi ale triunghiului.* «Gazeta matematică» vol. XXIII, 1917—1918, p. 80.

Însă

$$\overline{ID} = \overline{IC'} \sin\frac{A'}{2} = \overline{IA} \sin^2\frac{A}{2},$$

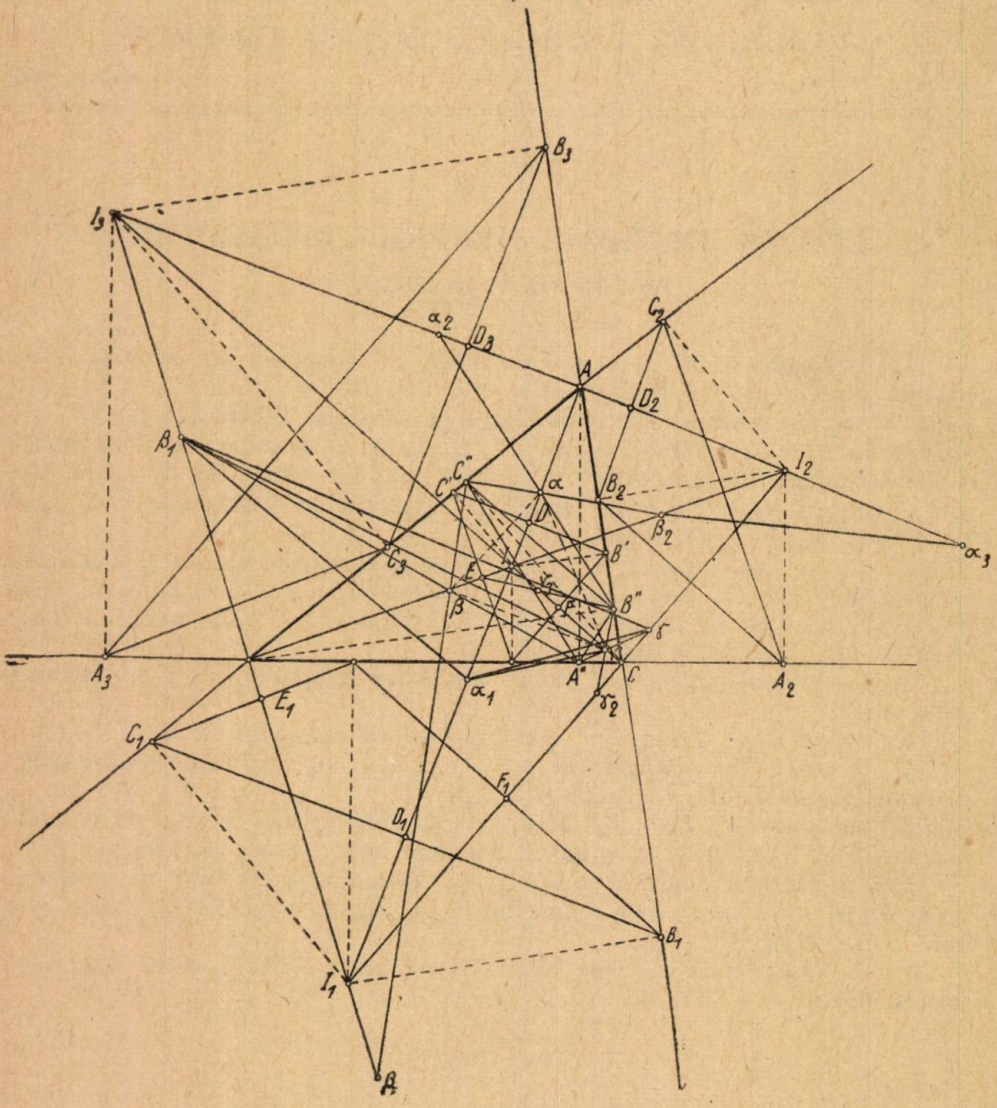


Fig. 1

deci

$$\overline{I\alpha} = 2 \cdot \overline{ID}$$

ceea ce dovedește că punctul α este simetricul lui I în raport cu $B'C'$.

2° În mod analog se dovedește că α_1 este simetricul lui I_1 în raport cu B_1C_1.

3° Fie D_2 proiecția lui I_2 pe B_2C_2. Triunghiurile $AB''C''$, ABC fiind asemenea se deduce că

$$\frac{\overline{A\alpha_2}}{\overline{AI_2}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \cos A.$$

Se deduce că

$$\overline{A\alpha_2} = \overline{AI_2} \cos A$$

și

$$\overline{I_2\alpha_2} = \overline{AI_2}(1 + \cos A) = 2\,\overline{AI_2} \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Însă

$$\overline{I_2D_2} = \overline{I_2C_2} \cos \frac{A}{2} = \overline{AI_2} \cos^2 \frac{A}{2},$$

deci

$$\overline{I_2\alpha_2} = 2 \cdot \overline{I_2D_2},$$

ceea ce dovedește că α_2 este simetricul lui I_2 față de B_2C_2.

4° În mod analog se dovedește că α_3 este simetricul lui I_3 față de B_3C_3.

2. — *Demonstrația teoremei* 1. — Fie D, E, F proiecțiile lui I pe laturile triunghiului $A'B'C'$. Latura $B'C'$ a triunghiului $A'B'C'$ este paralelă cu $\overline{EF}$ și egală cu dublul ei. Pe de altă parte punctele β și γ fiind simetricele lui I față de $C'A'$ și $A'B'$, latura $\overline{\beta\gamma}$ a triunghiului $I\beta\gamma$ este paralelă cu $\overline{EF}$ și egală cu dublul ei. Deci laturile $\overline{B'C'}$, $\overline{\beta\gamma}$ sînt paralele și egale.

În mod analog se arată că laturile $\overline{C'A'}$, $\overline{\gamma\alpha}$ și $\overline{A'B'}$, $\overline{\alpha\beta}$ sînt paralele și egale.

Triunghiurile $\alpha\beta\gamma$, $A'B'C'$ avînd toate laturile respectiv egale, sînt deci egale.

3. — *Demonstrația teoremei* 2. — Fie D_1, E_1, F_1 proiecțiile lui I_1 pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$. Latura $\overline{B_1C_1}$ a triunghiului $A_1B_1C_1$ este paralelă cu $\overline{E_1F_1}$ și egală cu dublul ei. Pe de altă parte, punctele β_1, γ_1 fiind simetricele lui I_1 față de C_1A_1, A_1B_1, latura $\overline{\beta_1\gamma_1}$ a triunghiului $I_1\beta_1\gamma_1$ este paralelă cu $\overline{E_1F_1}$ și egală cu dublul ei. Deci laturile $\overline{B_1C_1}$, $\overline{\beta_1\gamma_1}$ sînt egale și paralele.

În mod analog se arată că laturile $\overline{C_1A_1}$, $\overline{\gamma_1\alpha_1}$ și $\overline{A_1B_1}$, $\overline{\alpha_1\beta_1}$ sînt paralele și egale.

Triunghiurile $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $A_1B_1C_1$ avînd toate laturile respectiv egale sînt deci egale.

În mod analog se demonstrează că triunghiurile $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $A_2B_2C_2$ și $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, $A_3B_3C_3$ sînt egale.

3. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC; A', B', C' proiecțiile lui pe laturile triunghiului ABC și D, E, F proiecțiile lui pe laturile triunghiului $A'B'C'$. Se notează cu D', E', F' simetricele punctelor D, E, F față de mijloacele segmentelor $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$. Perpendicularele în D', E', F' pe IA, IB, IC formează triunghiul PQR (fig. 2).

Teorema 3. — *Raza* ρ *a cercului circumscris triunghiului* PQR *este egală cu* $2R - r$, *unde* R *și* r *sînt razele cercurilor circumscris și înscris în triunghiul* ABC.

În ajutorul demonstrației acestei teoreme vom face două observări.

1° *Dreptele LA', MB', NC' sînt concurente într-un punct J situat pe dreapta OI care unește centrele cercurilor circumscris și înscris în triunghiul ABC, L, M, N fiind mijloacele arcelor $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ pe cercul ABC.*

Într-adevăr, punctul M este egal depărtat de punctele A și I, întocmai ca și punctul N. Deci dreapta MN este perpendiculară pe segmentul $\overline{AI}$ în mijlocul lui. În mod analog se arată că dreptele LN și LM sînt perpendiculare pe $\overline{BI}$ și $\overline{CI}$ în mijlocul acestor segmente. Deci triunghiurile $A'B'C'$, LMN au laturile paralele, ele sînt asemenea, și perechile de puncte (L, A'), (M, B'), (N, C') sînt puncte omoloage. Prin urmare, dreptele LA', MB', NC' sînt concurente într-un punct I, care se găsește pe dreapta care unește centrele cercurilor LMN, $A'B'C'$ care sînt de asemenea puncte omoloage.

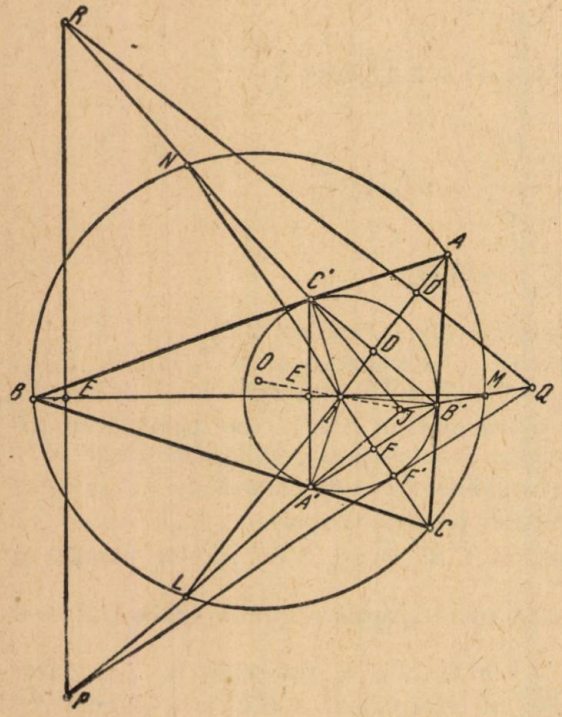


Fig. 2

2° *Punctul P este simetricul punctului A' față de L.* Într-adevăr, punctele E și E' fiind simetrice față de dreapta LN, perpendiculara în E' pe BI trece prin simetricul lui A' față de L.

În mod analog se vede că perpendiculara în F' pe CI trece prin simetricul lui A' față de L. Deci P este simetricul lui A' față de L.

În mod analog se dovedește că Q este simetricul lui B' față de M și că R este simetricul lui C' față de N.

Demonstrația teoremei 3. Din observările precedente rezultă că figura $C'B'QR$ este un trapez în care punctele M și N sînt mijloacele laturilor neparalele. Vom avea

$$2\,\overline{MN} = \overline{B'C'} + \overline{RQ}.$$

Însă $\overline{MN}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{RQ}$ fiind laturi omoloage ale triunghiurilor LMN, $A'B'C'$, PQR care sînt asemenea, aceiași relație va exista și între razele R, r și ρ ale cercurilor circumscrise lor. Avem deci

$$2R = r + \rho$$

de unde rezultă că

$$\rho = 2R - r$$

și teorema 3 este demonstrată.

Teorema 4. *Centrul* ω *al cercului* PQR *este simetricul centrului cercului înscris în triunghiul* ABC *față de centrul* O *al cercului circumscris aceluiași triunghi.*

Într-adevăr, din observările de la teorema a 3-a rezultă că punctele γ, O și I — omoloage în triunghiurile PQR, LMN, $A'B'C'$ — sînt colineare și că dreapta care le unește trece prin J. Deoarece L este mijlocul lui $A'P$ avem

$$2\cdot\overline{JL} = \overline{JA'} + \overline{JP}$$

și prin urmare deducem că

$$2\cdot\overline{JO} = \overline{JI} + \overline{J\omega},$$

ceea ce dovedește că O este mijlocul lui $\overline{\omega I}$.

Recomandăm cititorului să facă o demonstrație trigonometrică pentru teorema 3.

4. Teoremele 3 și 4 se extind dacă se înlocuiește cercul înscris în triunghiul ABC cu unul din cercurile exînscrise, de exemplu cu cercul opus vîrfului A, cu centrul în I_1.

Fie A_1 B_1, C_1 proiecțiile lui I_1 pe laturile triunghiului ABC și D_1, E_1 F_1 proiecțiile lui I_1 pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$. Se notează cu D_1', E_1', F_1' simetricele punctelor D_1, E_1, F_1 față de mijloacele segmentelor $\overline{I_1A}$, $\overline{I_1B}$, $\overline{I_1C}$. Perpendicularele în D_1', E_1', F_1' pe I_1A, I_1B, I_1C formează triunghiul $P_1Q_1R_1$ (fig. 3).

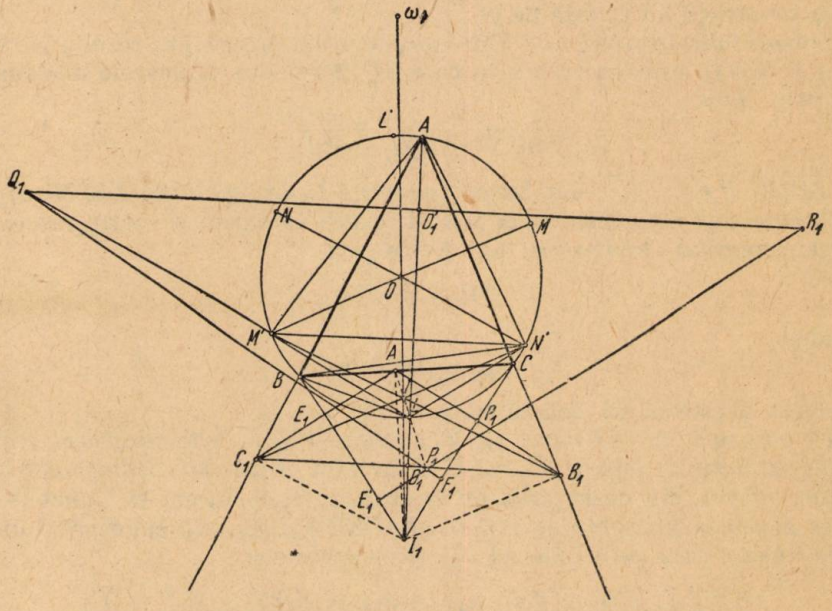


Fig. 3

Teorema 5. *Raza* ρ_1 *a cercului circumscris triunghiului* $P_1Q_1R_1$ *este egală cu* $2R + r$, *unde* R *este raza cercului circumscris triunghiului* ABC, *iar* r_1 *este raza cercului exînscris acestui triunghi, opus lui* A.

Ca și în cazul precedent facem următoarele observări:

1° Fie L, M, N mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ în cercul ABC și M', N' punctele diametral opuse lui M și N în aceste cercuri.

Dreptele LA_1, $M'B_1$, $N'C_1$ *sînt concurente într-un punct* J_1 *situat pe dreapta* OI_1.

Într-adevăr, fără greutate se vede că triunghiurile LBI_1, $N'BI_1$ sînt isoscele, de unde rezultă că dreapta LN' este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{BI_1}$. În mod analog triunghiurile LCI_1, $M'CI_1$ sînt isoscele și deci dreapta LM' este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{CI_1}$. (Se vede ușor că bisectoarea exterioară BI_1 trece prin M', iar bisectoarea exterioară CI_1 trece prin N'). În fine triunghiurile $M'AI_1$, $N'AI_1$ sînt isoscele, de unde deducem că dreapta $M'N'$ este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{AI_1}$.

Triunghiurile $LM'N'$, $A_1B_1C_1$ sînt asemenea deoarece au laturile paralele și perechile de puncte (L, A_1), (M', B_1), (N', C) sînt omoloage. Deducem astfel că dreptele LA_1, $M'B_1$, $N'C_1$ sînt concurente într-un punct J_1 situat pe dreapta OI_1, care unește punctele omoloage O și I_1 legate de cele două triunghiuri asemenea $LM'N'$, $A_1B_1C_1$.

2° *Punctul* P_1 *este simetricul punctului* A_1 *față de* L. — Într-adevăr, punctele E_1 și E_1' fiind simetrice față de mijlocul lui BI_1, perpendiculara în E_1' pe BI_1 trece prin simetricul lui A_1 față de L. În mod analog se vede că perpendiculara în P_1' pe CI_1 trece prin simetricul lui A_1 față de L. Deci P_1 este simetricul lui A_1 față de L.

În mod analog se arată că Q_1 este simetricul lui B_1 față de M' și că R_1 este simetricul lui C_1 față de N'.

Demonstrația teoremei 5. — Din considerațiile precedente rezultă că patrulaterul $C_1B_1R_1Q_1$ este un trapez în care M' și N' sînt mijloacele diagonalelor. Deci vom avea

$$2\overline{M'N'} = \overline{R_1Q_1} - \overline{B_1C_1}.$$

Însă $\overline{M'N'}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{R_1Q_1}$ sînt laturi omoloage în triunghiurile $LM'N'$, $A_1B_1C_1$, $P_1Q_1R_1$ care sînt asemenea. Deci aceiași relație va exista și între razele R, r_1 și ρ_1 ale cercurilor circumscrise lor. Avem deci

$$2R = \rho_1 - r_1$$

de unde

$$\rho_1 = 2R + r_1$$

și teorema 5 este astfel demonstrată.

T e o r e m a 6. — *Centrul* ω_1 *al cercului* $P_1Q_1R_1$ *este simetricul centrului cercului exînscris* I_1 *față de centrul* O *al cercului circumscris triunghiului* ABC.

Într-adevăr, din observările de la teorema 5, deducem că punctele ω_1, O și I_1, omoloage în triunghiurile $P_1Q_1R_1$, $LM'N'$, $A_1B_1C_1$, sînt colineare și dreapta care le unește trece prin punctul J_1. Deoarece avem

$$2\overline{J_1L} = \overline{J_1P_1} - \overline{J_1A_1}, \text{ va rezulta că } 2\overline{J_1O} = \overline{J_1\omega_1} - \overline{J_1I_1},$$

ceea ce dovedește că punctul O este mijlocul lui $\overline{I_1\omega_1}$.

Recomandăm cititorului să dea o demonstrație trigonometrică teoremei a 5-a.

REACTORUL NUCLEAR

VIRGIL ATANASIU

ISTORIA civilizaţiilor este strîns legată de descoperirea şi dezvoltarea mijloacelor de utilizare a izvoarelor de energie.

Primul izvor mare de energie este acela al reacţiilor chimice de ardere. Descoperirea focului şi stăpînirea manifestărilor lui — energia termică — a constituit un preţios şi puternic sprijin al omenirii de-a lungul istoriei.

Rezervele de materie primă necesară pentru producerea energiei termice — lemnele, cărbunii, petrolul şi gazele naturale — sînt însă limitate. Utilizarea pe scară tot mai largă a căderilor de apă a constituit de asemenea un mijloc preţios de producere a energiei necesare pentru dezvoltarea societăţii, compensînd lipsa combustibililor chimici în unele regiuni sau completînd nevoile de energie în altele.

Nevoile mereu crescînde ale civilizaţiei, precum şi continua descreştere a rezervelor naturale de combustibili solizi, lichizi şi gazoşi au pus tot mai acut problema găsirii unor noi izvoare de energie.

Realizările în domeniul fizicii nucleare au pus la dispoziţia omenirii rezerve uriaşe de energie, capabile să înlocuiască zăcămintele de cărbuni, petrol şi gaze în continuă scădere şi să completeze energia căderilor de apă.

Către sfîrşitul secolului trecut studiul atomului era abia în stadiul unor ipoteze, iar stăpînirea energiei nucleare de către om, chiar după descoperirea radioactivităţii, părea irealizabilă. Au fost necesare cercetări îndelungate şi experienţe numeroase, bazate pe cea mai desăvîrşită tehnică pentru cunoaşterea atomului, a nucleului atomic, a legilor, care guvernează dezintegrările nucleare şi degajările de energie.

În anul 1939 a fost descoperit procesul de fisiune prin care un nucleu de uraniu după ce a captat un neutron, se descompune în două fragmente cu totul diferite de elementul iniţial. Importanţa reacţiei de fisiune se bazează pe două fapte. În primul rînd acest proces este însoţit de degajarea unei cantităţi mari de energie, iar în al doilea rînd reacţia provocată de neutroni este însoţită la rîndul ei de o emisie de neutroni. Deci în condiţii convenabile, despre care vom vorbi mai departe, procesul se poate autoîntreţine şi energia este eliberată în mod continuu.

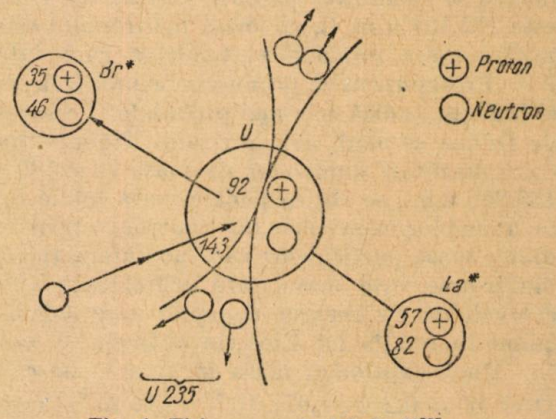


Fig. 1. Fisiunea nucleului de U^{235}.

În reactorul nuclear sau pila atomică se foloseşte procesul de fisiune şi anume, reacţia de fisiune în lanţ, adică o reacţie în care sînt emişi neutroni capabili să provoace la rîndul lor fisiunea altor nuclee ş.a.m.d. Un reactor nuclear este deci un sistem în care se întreţine o reacţie în lanţ; această reacţie este însoţită de degajarea unei cantităţi mari de energie.

Un reactor nuclear cuprinde combustibilul care conține substanța fisionabilă, o substanță numită moderator, agentul termic și materialele de construcție.

Deocamdată vom descrie procesul de fisiune al uraniului, deoarece actualmente acest element are rolul cel mai important în producerea energiei nucleare cu ajutorul reactorului nuclear.

Uraniul se găsește în natură sub forma a trei izotopi: $_{92}U^{238}$ — în proporție de 99,282%, $_{92}U^{235}$ — în proporție de 0,712 % și $_{92}U^{234}$ — în proporție de 0,006%.

Capabil să realizeze în mod intens reacția în lanț este izotopul uraniu 235.

Uraniul 235 fisionează însă avantajos numai sub acțiunea neutronilor lenți sau termici, adică a neutronilor a căror energie este de același ordin cu energia de agitație termică, și anume aproximativ de 0,025 eV.

Neutronii expulzați din nucleu (neutronii secundari) prin fisiune se împart în două grupe: neutroni emiși instantaneu și neutroni întîrziați. Cei din prima grupă reprezintă 99% din totalul neutronilor obținuți la fisiune; emisia lor încetează după un interval foarte scurt de timp, pe cînd neutronii din a doua grupă — neutronii întîrziați — sînt emiși timp de mai multe minute, cu intensitate din ce în ce mai slabă. Valorile energiei neutronilor emiși instantaneu sînt cuprinse într-un interval care se întinde de la aproximativ 10 MeV pînă la energii de ordinul energiei de agitație termică. Cei mai mulți au însă energii cuprinse între 1 și 2 MeV.

Studiul amănunțit al reacției de fisiune prin neutroni lenți a arătat că există peste 30 de moduri diferite în care poate fisiona uraniul 235.

Numerele de masă ale produselor de fisiune sînt cuprinse între 72 și 158; cazul cel mai probabil de fisiune, reprezentînd 6,4% din totalul diferitelor fisiuni, îl dau produsele cu numere de masă 95 și 139.

În timpul procesului de fisiune se degajă energie în valoare de aproximativ 200 MeV pentru fiecare nucleu fisionat, în timp ce pentru fiecare atom într-o reacție chimică ea este de abia de cîțiva electron-volți. Valoarea energiei de fisiune se calculează pe baza relației lui Einstein. Masa izotopului uraniu 235 este 235,124 u.m. [1]), iar masa neutronului este 1,00897 u.m. Însumînd obținem pentru masa totală a particulelor care interacționează valoarea de 236,133 u.m. Presupunem că produsele fisiunii (cele două fragmente) au masele 95 u.m. și 139 u.m., adică cele mai probabile. Presupunem de asemenea că în procesul de fisiune se emit doi neutroni. Ținînd seama de faptul că masele izotopilor corespunzători numerelor de masă 95 și 139 sînt egale respectiv cu 94,945 și 138,955 u.m., se obține pentru masa totală a produselor fisiunii nucleelor (fragmentele plus masa celor doi neutroni emiși) valoarea de 235,918 u.m. Diferența dintre masa particulelor care au interacționat și masa particlulelor rezultate din fisiune este masa care echivalează cu energia degajată. Așadar: masa echivalentă cu energia degajată este = 236,133 - 235,918 = 0,215 u.m. Înlocuind în relația lui Einstein obținem $W = 0{,}215\ c^2$.

Dacă exprimăm masa în grame, iar c în cm/s, obținem energia în ergi. Deci $W = 0{,}215 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2$ ergi.

Ținînd seama că 1 MeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg, obținem $W \approx 200$ MeV.

Acest calcul se referă la un caz special de fisiune. Pentru a obține adevărata valoarea a energiei degajate, trebuie să calculăm energia medie pentru

---

[1]) Unitatea atomică de masă (u. m.) este 1/16 din masa izotopului 0^{16}; 1 u. m. $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g.

cele peste 30 de moduri diferite în care fisionează nucleul de uraniu 235. În medie se admite că la fisiunea fiecărui nucleu de uraniu 235 se eliberează o energie de 195—200 MeV.

Cum se comportă nucleul de uraniu 238 la bombardamentul cu neutroni? Uraniul 238 nu fisionează decît sub acţiunea unor neutroni cu energie de cel puţin 1,1 MeV. Trebuie remarcat faptul că uraniul 238, care după cum am văzut se găseşte în proporţie de peste 99% în uraniul natural, prin captarea unui neutron se transformă în plutoniu $_{94}Pu^{239}$, după două dezintegrări β conform reacţiilor

$$_{92}U^{238} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{92}U^{239}$$
$$_{92}U^{239} \rightarrow {}_{93}Np^{239} + \beta^{-}$$
$$_{93}Np^{239} \rightarrow {}_{94}Pu^{239} + \beta^{-}$$

Plutoniul astfel obţinut este capabil să fisioneze în aceleaşi condiţii şi cu acelaşi randament ca şi uraniul 235. Un reactor cu o capacitate de 100 t uraniu natural produce anual 35 kg de plutoniu.

Există diferite tipuri de reactori: reactorul termic — în care fisiunea este provocată de neutronii termici, reactorul cu neutroni rapizi în care fisiunea se datoreşte neutronilor cu energii mai mari decît 1 MeV şi reactorul cu neutroni intermediari — în care fisiunea este provocată de neutroni a căror energie este cuprinsă între valorile termice (0,03 eV) şi 1MeV.

În cele ce urmează ne vom ocupa de reactorii termici. În acest tip de reactori se utilizează un «combustibil» îmbogăţit cu uraniu 235 sau conţinînd o cantitate suficientă de plutoniu 239 sau de uraniu 233. Dintre aceste trei elemente fisionabile sub acţiunea neutronilor lenţi numai primul se găseşte în natură şi anume în uraniu natural. Ceilalţi doi se obţin în mod artificial: primul — plutoniul 239 — prin captura unui neutron de către uraniul 238 (după cum am arătat mai sus), iar al doilea — uraniu 233 — prin captura unui neutron de către toriul 232, unicul constituent al toriului natural, conform reacţiilor:

$$_{90}Th^{232} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{90}Th^{233}$$
$$_{90}Th^{233} \rightarrow {}_{91}Pa^{233} + \beta^{-}$$
$$_{91}Pa^{233} \rightarrow {}_{92}U^{233} + \beta^{-}$$

Pentru încetinirea neutronilor rapizi emişi în procesul de fisiune se foloseşte o substanţă numită «moderator». Încetinirea se realizează prin ciocnirile neutronului cu nucleele uşoare ale moderatorului. Drept moderator se întrebuinţează apa grea, grafitul (extrem de curat), beriliul, oxidul de beriliu şi eventual, izotopul de masă 7 al litiului.

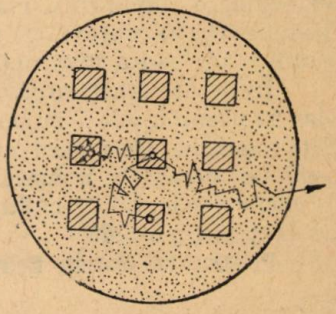


Fig. 2. Drumurile neutronilor într-un reactor nuclear.

Apa obişnuită ar fi un excelent încetinitor dacă ar absorbi ceva mai puţini neutroni. De aceea ea nu poate fi întrebuinţată, decît dacă dispunem de un surplus de neutroni, adică dacă dispunem de un combustibil nuclear mai bogat în substanţă fisionabilă.

Încetinirea neutronilor pînă la energii termice necesită 110 ciocniri cu nuclee de carbon (în cazul moderatorului din grafit), 24 ciocniri cu nucleele de deuteriu (în cazul moderatorului din apă grea) şi 2100 ciocniri cu nucleele de uraniu 238.

Deci ciocnirile neutronului cu nucleele de uraniu 238, care formează masa principală a nucleelor de uraniu natural, nu sînt esențiale.

Cel mai bun moderator este apa grea, deoarece nucleele de hidrogen greu care intră în compoziția apei grele preiau repede energia neutronilor și în același timp nu-i absorb. Cantități mari de apă grea în stare pură se obțin cu cheltuieli mari și de aceea se folosește mai mult grafitul.

Partea centrală a unui reactor constă de obicei, din bare de uraniu, introduse într-un bazin cu apă grea sau înconjurate din toate părțile de grafit. Pentru a proteja uraniul de impurificări și oxidări, el se așază într-un înveliș de aluminiu.

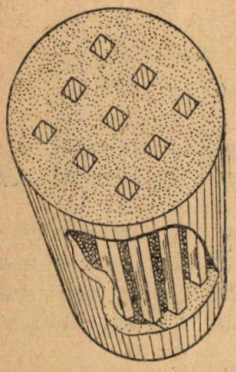


Fig. 3. Partea centrală a unui reactor cu moderator de grafit.

Condiția menținerii unei reacții în lanț constă în faptul că fiecare nucleu care a captat un neutron și a fisionat trebuie să dea (în medie) cel puțin un neutron secundar, care să fisioneze un alt nucleu. Această condiție se exprimă comod cu ajutorul unei mărimi numite *coeficient de multiplicare*. El se definește ca fiind raportul dintre numărul neutronilor unei generații date și numărul neutronilor generației imediat anterioare.

Cînd coeficientul de multiplicare (k) este egal sau ceva mai mare decît unitatea, reacția în lanț este posibilă, iar cînd este ceva mai mic decît unitatea reacția în lanț nu se poate autoîntreține.

Valoarea coeficientului de multiplicare într-un sistem care conține substanță fisionabilă (de exemplu uraniu) și un moderator pentru încetinirea neutronilor, depinde de măsura în care participă neutronii la următoarele patru procese principale: a) pierderea neutronilor prin ieșirea lor din sistem; b) captură fără fisiune în nucleele izotopilor: uraniu 235 și uraniu 238, numită și captură de rezonanță; c) captura fără fisiune în nucleele diferitelor substanțe străine, de exemplu în impurități, materiale de construcție, agentul termic, produsele fisiunii etc; d) captarea cu fisiune a neutronilor lenți de către nucleul izotopului uraniu 235, sau a neutronilor rapizi de către izotopii uraniu 235 și uraniu 238.

În fiecare dintre aceste patru procese neutronii sînt îndepărtați din sistem, dar în ultimul, adică în captura cu fisiune, în locul neutronilor dispăruți apar alți neutroni. Deci dacă numărul neutronilor obținuți în ultimul proces este egal sau depășește numărul total de neutroni pierduți în cele patru procese, atunci coeficientul de multiplicare este egal sau mai mare ca unitatea și reacția în lanț este posibilă.

Pentru un sistem nelimitat coeficientul de multiplicare este

$$k = \eta \varepsilon p f. \tag{1}$$

Acest rezultat se numește uneori *formula celor patru factori*. Factorul η este numărul mediu al neutronilor eliberați la fisiune prin captarea unui neutron, ε este factorul rapid de fisiune, care reprezintă raportul dintre numărul total de neutroni rapizi obținuți în urma fisiunii cu neutroni de toate categoriile și numărul neutronilor rapizi obținuți în urma fisiunii prin neutroni termici. Valoarea lui ε este aproximativ egală cu 1,03 atît pentru grafit, cît și pentru apa grea, folosiți drept moderator. Factorul notat cu litera p reprezintă raportul dintre numărul neutronilor rapizi (de fisiune), care au evitat captura în timpul încetinirii, și numărul total de neutroni rapizi. Neutronii ajunși la energii

termice sînt captaţi de uraniu, de moderator, de impurităţi sau de celelalte substanţe existente în reactor. Numai o fracţiune f a neutronilor termici este captată de uraniu. Valoarea acestui coeficient este dată de raportul dintre numărul neutronilor termici absorbiţi de combustibil şi numărul total de neutroni termici absorbiţi; ea se cifrează la 88—98 %.

Condiţia de autoîntreţinere a reacţiei în lanţ pentru un sistem conţinînd uraniu natural este

$$\eta \varepsilon p f = 1. \tag{2}$$

Această relaţie este numită *ecuaţia critică* a sistemului..

Dacă în reactor se utilizează drept combustibil numai uraniul 235, factorii ε şi p sînt egali fiecare cu unitatea. În acest caz formula (1) devine

$$k = \eta f. \tag{3}$$

O metodă de mărire a coeficientului de multiplicare este folosirea unui combustibil îmbogăţit, adică a unui combustibil în care izotopul fisionabil U^{235} este conţinut într-o proporţie mai mare faţă de U^{238} decît în amestecul natural.

Pentru un reactor cu dimensiuni finite ecuaţia critică a reactorului devine

$$\eta \varepsilon p f P = 1, \tag{4}$$

unde P reprezintă numărul neutronilor ieşiţi din reactor (circa 10%).

Această ecuaţie arată că sistemul (combustibil şi moderator) se găseşte în stare staţionară, adică densitatea neutronilor nu variază în timp, deci în sistem se produce o reacţie în lanţ care se autoîntreţine. Cîţi neutroni apar la fisiune tot atîţia se pierd, adică nu iau parte la procesele de fisiune, ci sufăr diferite captări sau ies din sistem. In acest caz, coeficientul de multiplicare fiind egal cu unitatea, sistemul se găseşte în *stare critică*. Stările staţionare sînt posibile şi la sistemele *subcritice* (cînd coeficientul de multiplicare este subunitar), în prezenţa unor surse exterioare, care să acopere diferenţa dintre numărul neutronilor pierduţi şi numărul neutronilor care se obţin la fisiune.

Cînd coeficientul de multiplicare al reactorului este supraunitar sistemul se găseşte în *stare supracritică*.

Pe baza ecuaţiei critice se poate cerceta posibilitatea de funcţionare a unui reactor. Dacă se foloseşte uraniu cu un conţinut ridicat de U^{235}, înseamnă că factorii p şi ε sînt mari. Cu cît sînt absorbiţi în moderator mai puţini neutroni încetiniţi, cu atît mai mare este numărul neutronilor care iau parte la fisiune, deci factorul f creşte. Cel mai bun moderator în acest scop este apa grea; rezultate mai slabe dă grafitul, iar apa obişnuită este moderatorul cel mai puţin potrivit. Pentru a se obţine rezultate bune există deci două alternative: fie se întrebuinţează apă grea, care este scumpă dar are factorul f ridicat, şi uraniu natural, care este ieftin, dar are factorii p şi η mici, fie se foloseşte uraniu îmbogăţit în U^{235}, care este scump, dar are factorul p mare, şi apă obişnuită drept moderator, cu factorul f mic. Un caz special reprezintă vechiul tip de reactor cu grafit, în care se foloseşte uraniu natural. La acest sistem bilanţul de neutroni fiind foarte anevoios, volumul reactorului trebuie să fie mare.

Calculele teoretice şi experienţa arată că într-un sistem limitat (un reactor nuclear) existenţa marginilor se resfrînge în mod esenţial asupra bilanţului neutronilor în reacţia în lanţ, deorece în acest caz, spre deosebire de ceea ce se întîmplă într-un sistem nelimitat, există încă o posibilitate a pierderilor de neutroni, şi anume ieşirea lor prin pereţi. Numărul neutronilor ieşiţi din reactor depinde de mărimea suprafeţei exterioare a reactorului, în timp ce numărul

neutronilor formați depinde de volumul reactorului. Pentru a se reduce pierderea neutronilor trebuie micșorat raportul dintre suprafață și volum. Aceasta se poate realiza mărind dimensiunile reactorului.

Pentru dimensiuni determinate ale reactorului nuclear, denumite *dimensiuni critice*, numărul neutronilor care părăsesc reactorul este compensat de

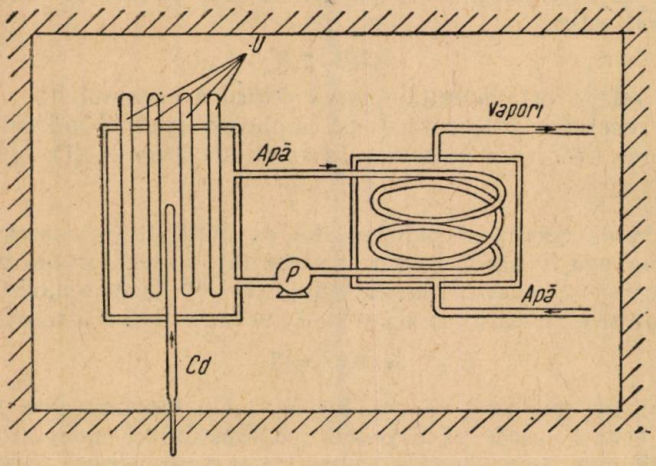


Fig. 4. Schema unui reactor cu apă grea sau cu apă obișnuită drept moderator.

numărul neutronilor care se produc în el prin reacția de fisiune. Se ajunge astfel la un regim staționar de funcționare.

Deoarece raportul dintre orice suprafață și volum depinde de forma geometrică a reactorului, înseamnă că și reducerea pierderii de neutroni depinde de forma acestuia.

Pentru un volum dat suprafața cea mai mică o posedă sfera. Aceasta înseamnă că într-un reactor sferic pierderea de neutroni este mai mică decît într-un reactor de orice altă formă, avînd același volum. Așadar, volumul critic al reactorului sferic va fi de asemenea minim. In afară de reactori de formă sferică se construiesc reactori și de alte forme: cubică, paralelipipedică, cilindrică etc.

Calculele arată că dimensiunile critice ale unui reactor nuclear de formă cubică sînt date de relația

$$D = \frac{L}{\sqrt{k-1}}, \tag{5}$$

unde D este dimensiunea unei laturi a reactorului, L-lungimea medie a drumului parcurs de neutron în sistem, din momentul apariției în procesul de fisiune pînă la captura lui de către un nucleu oarecare, iar k este coeficientul de multiplicare.

Examinînd formula (5) vedem că dimensiunea critică depinde în mod esențial de factorul de multiplicare (k), dacă valoarea acestuia este apropiată de 1.

Numărul neutronilor care ies din reactor poate fi redus dacă se înconjoară reactorul cu o substanță reflectoare convenabilă, care retrimite în reactor o parte din neutronii care l-au părăsit. Peretele reflector se face de obicei din

același material ca și moderatorul. El permite sistemului format din combustibil și moderator să devină critic, chiar atunci cînd dimensiunile lui sînt mult mai mici decît ale unui reactor fără pereți reflectori. Așadar, prin folosirea pereților reflectori se face o economie importantă de substanță fisionabilă. În afară de reducerea volumului critic, peretele reflector permite să se mărească puterea medie a combustibilului pe unitate de masă.

Dacă se utilizează un combustibil îmbogățit, dimensiunile critice ale reactorului vor fi de asemenea mai mici decît ale unui reactor avînd aceiași formă geometrică și aceiași construcție, dar în care se utilizează drept combustibil uraniu natural.

Practic, reactorul se construiește așa, încît dimensiunile sale să depășească mult dimensiunile critice, pentru că numai astfel se poate mări numărul neutronilor și prin urmare numărul fisiunilor pe secundă pînă la o valoare care să asigure atingerea puterii necesare. După ce s-a realizat această putere trebuie micșorat coeficientul de multiplicare pînă la egalarea lui cu unitatea.

Pentru a regla multiplicarea neutronilor într-un reactor termic se folosesc așa numitele *bare de reglare*, construite din cadmiu sau oțel borat. Aceste substanțe au o capacitate foarte mare de absorbție a neutronilor lenți. Manevrînd adecuat barele de reglare, adică așezîndu-le în anumite poziții în interiorul reactorului se poate varia în limite determinate coeficientul de multiplicare. Sistemul pierde neutroni mai mulți decît sînt regenerați prin fisiune și prin urmare coeficientul de multiplicare scade sub unitate și reacția în lanț ajunge la stingere.

Un fenomen care se manifestă cu deosebire la reactorii mari este fenomenul de otrăvire.

În ce constă acest fenomen? În timpul funcționării reactorului se formează nuclee cu capacitate mare de absorbție a neutronilor termici. Aceste nuclee sînt fie fragmente directe ale fisiunii, fie produsele dezintegrării radioactive a acestora. Datorită fenomenului de otrăvire bilanțul de neutroni la reactorii mari devine subcritic după cîteva luni. De aceea, reactorul trebuie să fie de la început supradimensionat. Fenomenul de otrăvire este mult mai puțin pronunțat la reactorii mici, care pot funcționa în continuu timp de mai mulți ani.

În afară de otrăvire se manifestă și o distrugere mecanică a barelor de uraniu, în special a învelișurilor lor metalice. De aceea, drept înveliș de întrebuințează metale care reacționează cu neutroni numai în măsură redusă, de exemplu aliaje de zirconiu, aluminiu.

Fisiunea nucleelor de uraniu este însoțită, după cum am arătat mai înainte, de o mare degajare de energie. Această energie trebuie folosită în scopuri practice, ceea ce are și marele avantaj de a împiedica ridicarea temperaturii din interiorul reactorului, care altfel ar putea ieși din funcțiune. De aceea reactorul trebuie răcit foarte puternic. Dacă se folosește drept moderator apa grea, o parte din aceasta este împinsă de o pompă într-un dispozitiv numit schimbător de căldură. Acolo ea cedează toată căldura absorbită apei obișnuite, transformînd-o în vapori la temperatură înaltă. Apa grea răcită în acest fel se întoarce în reactor, iar vaporii obținuți se întrebuințează în scopuri practice. Dacă în reactor se folosește drept moderator grafitul, răcirea lui se face cu ajutorul unui fluid, care spală cu mare viteză barele de uraniu, apoi trece în schimbătorul de căldură, unde cedează căldura acumulată.

Drept fluid de răcire se întrebuințează gaze comprimate (CO_2, heliu), lichide sub presiune (apă obișnuită sau apă grea), metale topite, de exemplu

sodiul sau aliajul sodiu-potasiu. Alegerea fluidului este bazată pe criteriul neabsorbției de neutroni. Dintre toate corpurile citate metalele topite se pare că sînt cele mai corespunzătoare, deoarece pot evacua cel mai mare număr de calorii pe unitate de suprafață de combustibil. La un anumit tip de reactor prezentat la conferința de la Geneva, căldura se elimină prin evaporarea apei de răcire direct în incinta reactorului.

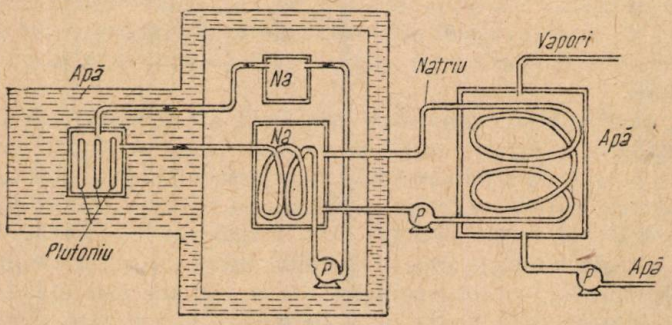


Fig. 5. Schema unui reactor cu plutoniu și natriu topit ca fluid de răcire.

La fisiunea nucleelor am văzut că se generează fragmente diferite, caracterizate prin radioactivitatea lor. Ele emit raze beta și gama. Fisiunea este însoțită și de o emisie de neutroni. Toate aceste fapte arată că reactorul nuclear constituie o sursă de radiații variate. Dintre aceste radiații neutronii și razele gama au o importanță deosebită, datorită marii lor puteri de pătrundere.

Deoarece razele gama și neutronii au o puternică acțiune dăunătoare asupra organismului, este necesar să se amenajeze o bună protecție împotriva lor. Pentru aceasta reactorul trebuie înconjurat cu un zid special, gros de cîțiva metri, de obicei din beton, cadmiu, oțel borat și plumb. Un strat gros de beton încetinește neutronii și absoarbe o parte din ei, cadmiul sau oțelul borat absoarbe restul de neutroni, iar plumbul absoarbe razele gama. Datorită zidului protector, precum și din cauza dimesniunilor critice, un reactor nuclear ocupă un volum foarte mare și are greutate considerabilă. Astfel, un reactor nuclear de formă cubică are latura de 11 m, din care 5 m revin învelișului de protecție; greutatea lui este de cîteva mii de tone.

Deoarece reactorul constituie pe lîngă o sursă de energie și o sursă de radiații, el este folosit pentru obținerea unor izotopi radioactivi artificiali, prin iradierea cu neutroni a diferitelor substanțe; acești izotopi au aplicații numeroase în chimie, biologie, medicină și într-o serie de alte domenii. În acest scop, în pereții învelișului protector se construiesc canale, în care sînt introduse substanțele care se expun radiațiilor.

Actualmente se examinează diferite tipuri de reactori, atît în ce privește combustibilul întrebuințat cît și puterea realizabilă.

Astfel, se examinează construirea unui reactor avînd în partea centrală o sare de uraniu 233 aproape pur, de exemplu sulfat de uranil ($^{233}UO_2SO_4$), în soluție de apă grea, cu învelișul acestui miez central dintr-o sare de toriu de asemenea în soluție de apă grea. Excesul de neutroni emiși de substanța fisionabilă din partea centrală a reactorului este absorbit de învelișul de toriu, pentru a produce uraniu 233, care poate fi trimis din nou pentru alimentarea reactorului, drept material combustibil.

Întrebuinţarea apei grele în locul apei obişnuite se justifică — conform datelor prezentate la conferinţa de la Geneva — prin necesitatea obţinerii unui coeficient de conversiune foarte înalt, ceea ce ar înlătura risipa de neutroni, şi ar asigura folosirea lor în întregime în procesul de conversiune a toriului în uraniu 233.

Într-adevăr un astfel de reactor, bine conceput, ar fi în stare să producă mai multă substanţă fisionabilă, prin conversiunea toriului în uraniu 233, decît s-ar consuma pentru funcţionare uraniu 233, substanţă care constituie combustibilul acestui tip de reactor. Acesta este un reactor supragenerator.

Posibilitatea obţinerii unui coeficient de conversiune supraunitar în reactorul U 233/Th este una din marile revelaţii de la Geneva. Totuşi nu trebuie uitat faptul că un reactor de acest tip nu ar putea fi realizat, decît dacă am dispune de un stoc suficient de uraniu 233 la pornire; ori acest produs nu poate fi obţinut iniţial, decît iradiind o mare cantitate de toriu în reactorii cu uraniu sau plutoniu.

De mare importanţă ar fi posibilitatea de a construi un reactor de acelaşi tip, la care însă, partea centrală să constea din plutoniu, iar învelişul din uraniu natural, sau de a micşora coeficientul de conversiune, care este infinit mai ridicat în neutroni rapizi decît în neutroni lenţi. Datele prezentate la Geneva arată că reactorul de tip supragenerator $^{239}Pu/U$ cu neutroni rapizi ar avea şanse mai mari în ce priveşte eficacitatea decît reactorul $^{233}U/Th$.

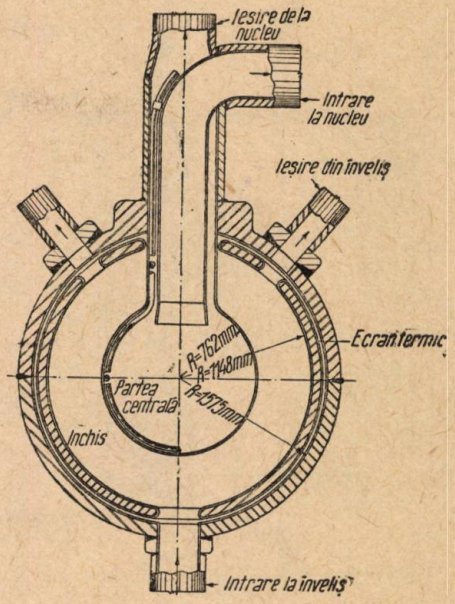


Fig. 6. Schema unui reactor cu $^{233}U/Th$; în partea centrală se află sarea de uraniu 233 în soluţie în apă grea, iar ca înveliş o suspensie de oxid de toriu în apă grea.

În afară de reactorii, numiţi omogeni, în care fluidul însuşi (agentul termic) conţine combustibilul, cum este cazul reactorilor cu soluţii de săruri de substanţe fisionabile în apă obişnuită sau apă grea, este reactorul care conţine oxizi ai substanţei fisionabile sub formă de suspensie în apă obişnuită sau apă grea. Conferinţa de la Geneva a confirmat cu precizie posibilitatea realizării unui astfel de reactor sub rezerva unui studiu serios al problemelor coroziunii fizice.

Mai îndrăsneţ este un alt proiect de reactor, în care produsul fisionabil, foarte concentrat, se află în suspensie sau în soluţie în bismut topit. Teoretic acest reactor întruneşte avantajele reactorului omogen şi acelea ale răcirii cu metal lichid. Viitorul va arăta dacă aceasta construcţie este economică.

Un tip de reactor neomogen este « reactorul cu apă care fierbe », unde apa de răcire este vaporizată direct în incinta reactorului. Prezentarea acestui reactor, al cărui prototip funcţionează deja în SUA, a constituit subiectul unor importante discuţii la conferinţa de la Geneva.

Centrala atomoelectrică din URSS funcţionează pe baza energiei furnizate de un reactor nuclear. Acest reactor este alcătuit din 128 bare de uraniu

îmbogăţit cu 5% uraniu 235. Barele au un diametru de 5 cm şi o greutate totală de 550 kg; răcirea se face cu apă bidistilată, care iese cu o temperatură de 300°C şi cedează caloriile sale într-un schimbător. La fiecare patru luni barele sînt scoase şi tratate chimic pentru a se separa plutoniu şi îndepărta produsele de otrăvire. Funcţionarea reactorului este în întregime automatizată.

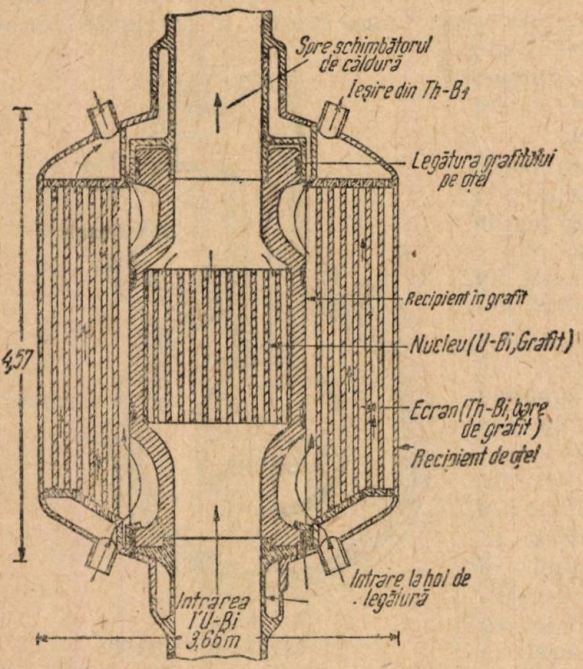


Fig. 7. Schema unui reactor cu produsul fisionabil (^{233}U) în soluţie de bismut topit.

Reactorii cu neutroni rapizi nu necesită moderator. Substanţa fisionabilă (uraniu 235 sau plutoniu 239) este diluată pînă la un anumit grad de către agentul termic, care trebuie să asigure evacuarea căldurii. Materialul activ, care constituie inima unui astfel de reactor, poate să aibă un volum foarte mic. În acest tip de reactor se pot folosi metale lichide pentru transferul de căldură.

Reactorii cu neutroni rapizi posedă o serie de particularităţi fizice, care îi diferenţiază în mod radical de reactorii cu neutroni termici.

În primul rînd fisiunea uraniului 238, izotopul predominant, este posibilă cu neutroni rapizi, iar în al doilea rînd, cînd se măreşte energia neutronilor capacitatea de captură fără regenerare se micşorează.

Pilele cu neutroni rapizi fac posibilă utilizarea în întregime a uraniului natural, nu numai a izotopului U^{235}.

Pentru lucrările de cercetări în domeniul fizicii nucleare şi al radiochimiei se construiesc reactori de putere mai mică, care necesită circa 1 kg de substanţă fisionabilă sau chiar mai puţin. Astfel, pentru a da un exemplu vom prezenta datele caracteristice ale unui reactor construit pentru lucrări de cercetare în laborator. Se foloseşte 0,680 kg substanţă fisionabilă, sub formă de nitrat de uranil îmbogăţit cu uraniu 235 în soluţie de apă obişnuită. Soluţia este conţinută într-un vas de formă sferică din oţel inoxidabil, cu diametru de 0,304 m şi grosimea de 1,6 mm. Sfera este înconjurată de un strat reflector de grafit cu diametrul de 1,5 m şi înălţimea de 1,83 m, după care urmează un bloc de beton gros de 0,60 m.

În acest tip de reactor nu se întrebuinţează fluid de răcire.

Un alt tip de reactor pentru cercetări cu puterea de 50 kW şi un flux de neutroni de $1{,}7 \cdot 10^{12}$ cm^2/s va fi livrat Japonici în acest an de către o firmă americană.

Partea centrală a reactorului cuprinde o sferă de oţel inoxidabil, cu diametrul de aproximativ 30 cm, umplută cu soluţie de sulfat de uranil; investiţia

de combustibil este de aproximativ 1000 g uraniu 235. Reactorul posedă un reflector din grafit, așezat într-un tanc de oțel înalt de 1,5 m, lat de 1,5 m și lung de 2,4 m. În grafit sînt prevăzute canale pentru diferite experimente.

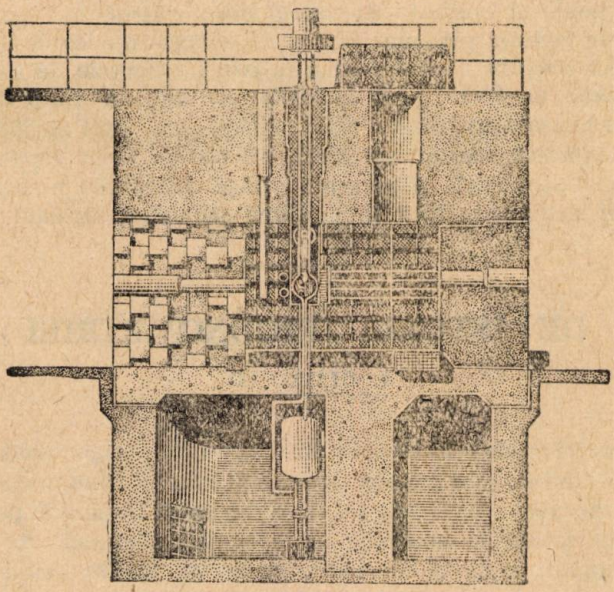


Fig. 8. Tip de reactor pentru cercetări cu U 235 în cantitate de aproximativ 1000 g și 50 kW putere.

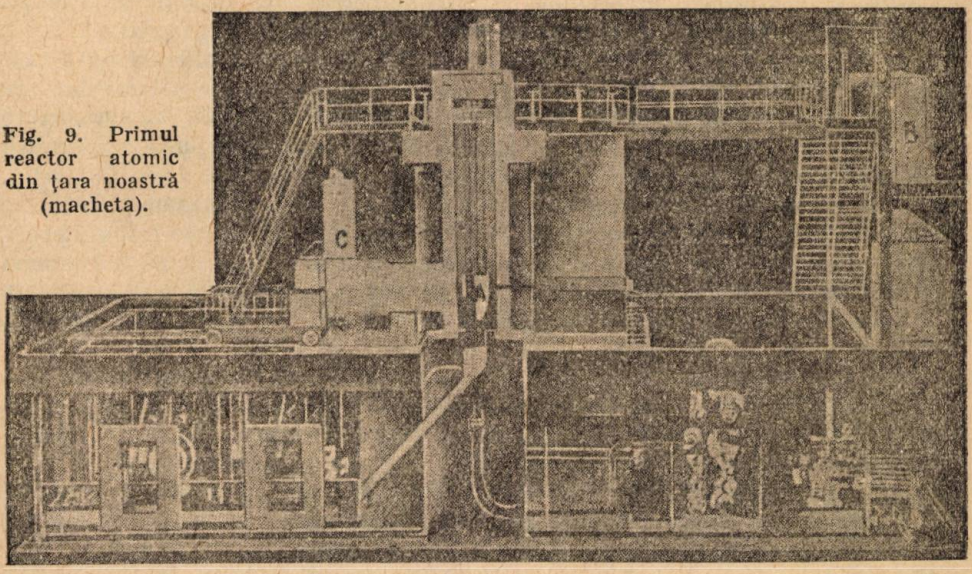


Fig. 9. Primul reactor atomic din țara noastră (macheta).

Drept agent termic se folosește apa distilată. Serpentina de răcire a părții centrale are lungimea de aproximativ 27 m.

Un reactor similar a fost deja instalat la Chicago.

Diversitatea tipurilor de reactoare realizate sau în curs de realizare este enormă și nu poate fi epuizată în cadrul unui articol.

În încheiere trebuie subliniat faptul că energia nucleară, inclusiv energia apelor, va putea asigura pentru lumea întreagă rezervele de energie necesare pentru a perioadă de 10000 pînă la 20000 de ani, în timp ce cărbunele și petrolul nu vor putea constitui o sursă de energie mai mult de 200 de ani. Admițînd chiar aproximația acestor aprecieri, nu putem decît recunoaște valabilitatea utilizării multilaterale și pe scară uriașă a energiei nucleare, precum și perspectivele ei nelimitate încă în gîndirea științifică actuală.

DIN ISTORIA TRIGONOMETRIEI

I. OLIVOTTO

DACĂ cercetăm etapele istorice de dezvoltare a trigonometriei constatăm că la început — cînd au luat naștere primele propoziții fundamentale ale acestei discipline matematice — ea a fost un fel de metodă auxiliară pentru calculele astronomice, un satelit al astronomiei. Nu purta numele de trigonometrie (trigonos = triunghi, metreo = măsor), deoarece nu se ocupa de căutarea relațiilor dintre laturile și unghiurile triunghiului.

Este interesant de știut că mai întîi s-a născut trigonometria sferică; oamenii erau preocupați de mișcarea aștrilor pe bolta cerească, pe care o socoteau ca o sferă. Cu timpul, trigonometria sferică și astronomia determină apariția și dezvoltarea primelor noțiuni de trigonometrie liniară. Dată fiind legătura strînsă dintre astronomie și trigonometrie este necesar să căutăm începutul trigonometriei la popoarele care s-au ocupat de astronomie.

Astronomia a izvorît din necesitățile practice ale oamenilor și i-a ajutat în multe domenii de activitate; ei au folosit cunoștințele de astronomie din cele mai îndepărtate vremuri în diferite îndeletniciri. Astfel, în agricultură era necesară cunoașterea unui calendar, deoarece anotimpurile schimbau caracterul muncilor agricole și impuneau o anumită planificare a lor. Comerțul, care necesita deplasări îndelungi pe mări și pe oceane a fost un stimulent puternic pentru dezvoltarea astronomiei. Multă vreme Soarele și stelele au fost singurele jaloane sau chiar faruri pentru călătoriile lungi. Așa se explică de ce astronomia și deci și satelitul ei — trigonometria, s-au dezvoltat mai mult la popoarele care au avut o agricultură mai înaintată și un comerț mai intens: indieni, egipteni, babilonieni, chinezi, greci.

Din cele mai îndepărtate vremuri oamenii au folosit cunoștințele matematice; acestea s-au acumulat în decurs de milenii și au circulat oral ca poeziile populare, în timpuri despre care nu avem informații scrise. Nu toate realizările științifice scrise, pe care le avem, sînt legate de numele unor autori, deoarece cei mai mulți nu le-au semnat și de aceea sînt atribuite popoarelor.

Prima lucrare de matematică, anonimă, interesantă pentru studiul nostru, datează din anul 2637 î.e.n. și o găsim în China. Este un fel de culegere în mai multe capitole. Intr-unul din aceste capitole autorul vorbește despre calcule

trigonometrice, un altul este dedicat astronomiei și în el se descriu bazele unui calendar original.

Această culegere a fost prelucrată în secolul al II-lea sau în secolul I î.e.n. de Cian Dan și Tin Cion-Cian, dîndu-i-se și numele de «Aritmetica» și cuprinde două capitole. Și din această lucrare ca și din alte lucrări științifice găsite în vechea Chină se vede clar că noțiunile matematice s-au născut din activitatea practică a oamenilor și din observarea fenomenelor naturii.

Egiptenii au făcut interesante observații și descoperiri astronomice de care s-au folosit în agricultură cu 2—3 mii de ani î.e.n.; ei au alcătuit chiar un calendar, care este precursorul calendarului actual.

Deși egiptenii au lucrat mult în domeniul matematicii de la ei nu au rămas decît 50 de documente dintre care cele mai importante sînt: « Papirusul de la Moscova» și « Papirusul lui Rhind» (englez).

Paralel cu dezvoltarea matematicii în Egipt, sumerii, locuitorii vechiului Babilon, și-au creat în mod independent matematica lor. Condițiile economice grele în care și-au dezvoltat arta construcțiilor i-au împins pe babilonieni la descoperiri geniale ca de exemplu, echivalența figurilor. Deoarece le lipseau cu desăvîrșire, piatra și lemnul, ei au fost nevoiți să facă toate construcțiile din cărămizi cu fețele patrate. Aceasta a necesitat însă, rezolvarea diferitelor probleme de matematică: cîte plăci patrate se cuprind într-o figură pătrată, triunghiulară sau de forma unui anumit poligon?

Sumerii și-au înscris cu caractere cuneiforme o adevărată enciclopedie matematică, pe 44 tăbliță de argilă, pe care le-au uscat la soare. Din citirea acestora se poate deduce că babilonienii aveau cunoștințe deosebite de matematică. Ei sînt fondatorii astronomiei, de la ei ne-au rămas: săptămîna de 7 zile, împărțirea cercului în 360 de grade, împărțirea gradului în minute și secunde.

Babilonienii au socotit că Soarele face o rotație în 360 de zile înaintînd în fiecare zi «un pas», adică «un grad» (latinește), de la romani a rămas denumirea de grad. În domeniul astronomiei babilonienii au reușit să întocmească o hartă a stelelor vizibile cu ochiul liber.

La popoarele menționate se constată și primele începuturi ale trigonometriei; etape mai avansate găsim la egipteni și indieni. In anul 332 î.e.n. cînd Egiptul a fost cucerit de Alexandru cel Mare, în cinstea cuceritorului s-a clădit orașul Alexandria, în locul unde fluviul sacru se varsă în Mediterana. Acest oraș avea să atragă toată știința lumii vechi, căci aci știința va ocupa un loc de frunte în preocupările sociale ale vremii. Alexandria este socotită ca leagănul trigonometriei. Și în acest centru matematica s-a născut din rezolvarea problemelor practice și avea strînsă legătură cu realitățile vieții și cu observarea fenomenelor naturii.

La celebra bibliotecă din Alexandria au făcut studii de literatură, beletristică și știință învățați renumiți ca: *Euclid*, *Apollonius*, *Diofant*, *Arhimede*, *Hipparc*, *Aristarch* din *Samos*, *Ptolomeu*, *Heron* etc. Acest centru industrial era un mare centru intelectual în care noile condiții economice și progresul extraordinar și rapid cereau noi metode de calcul. Ca urmare se naște trigonometria, se fac în mecanică descoperiri mari.

Aristarch din *Samos* evaluează prima dată distanța Soarelui și a Lunii față de Pămînt, iar *Arhimede*, pe lîngă multe descoperiri în domeniul hidromecanicii, evaluează valoarea lui π.

Hipparc, genialul astronom din *Niceea*, a făcut studii astronomice între anii 161 și 125 î.e.n. Timp de 35 de ani a studiat astronomia cu o răbdare și o

perseverență neobișnuită. Studiile sale au fost încununate de succes căci a reușit să determine durata anului cu o aproximație de 6 minute, înclinarea elipticei și să alcătuiască un catalog cu 1080 de stele fixe. Aceste descoperiri n-ar fi fost posibile fără ajutorul trigonometriei și de aceea în studiile lui, astronomia și trigonometria au mers paralel. *Hipparc* este numit creatorul trigonometriei. El a alcătuit tabele cu mărimile coardelor cercului care echivalează cu tabelele de valori naturale ale sinusurilor. Pentru prima dată deci, găsim nu numai studii sistematice de trigonometrie ci și tabele trigonometrice. Din nefericire această lucrare, compusă din 12 părți, nu s-a păstrat pînă în zilele noastre. Se pare că *Hipparc* cunoștea formulele $\sin(\alpha \pm \beta)$ și $\cos(\alpha \pm \beta)$. Tot el este primul care a determinat poziția unui loc după longitudine și latitudine.

Heron din *Alexandria*, care se presupune că a trăit în secolul I î.e.n., a alcătuit tabele cu valorile cotangentelor și a calculat $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{n}$ pentru diferite valori ale lui n, fără să amintească nimic despre sinus.

Renumitul astronom și matematician *Claudiu Ptolomeu* (128—168) în secolul al II-lea al e.n. a alcătuit tabele cu mărimile coardelor. În lucrarea sa « Megala sintaksis » sau « Almagest » cum îi ziceau arabii, Ptolomeu a pus bazele științei « trigonometria ». *Hipparc* și *Ptolomeu* sînt considerați părinții trigonometriei grecești. La alcătuirea tabelelor, Ptolomeu a folosit renumita sa teoremă asupra laturilor și diagonalelor unui patrulater înscris în cerc. Tabelele sale conțin arce care diferă numai cu jumătate de grad. Pentru a calcula lungimile coardelor, *Ptolomeu* a luat ca bază coardele ale căror lungimi se determină ușor ca lungimi ale laturilor poligoanelor regulate înscrise în cerc și apoi s-a folosit de teorema sa pentru determinarea lungimilor arcelor ce sînt sume sau diferențe ale arcelor de bază și sume și diferențe ale arcelor noi obținute. Cu ajutorul acestui procedeu, *Ptolomeu* a reușit să calculeze lungimile coardelor ale căror arce diferă cu o jumătate de grad. Astfel a calculat *Ptolemeu* cînd era vorba de diferența de arce. Se dă $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = x$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$. Se duce prin A diametrul AM, apoi unind punctele A, B, C, M se obține patrulaterul $ABCM$ înscris în cerc, cu diagonalele AB și CM. Considerînd raza R cunoscută, se poate scrie:

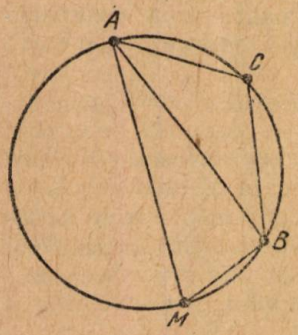


Fig. 1.

$$\overline{AB} \cdot \overline{MC} = \overline{AC} \cdot \overline{MB} + \overline{AM} \cdot x,$$

$$a \cdot \overline{MC} = b \cdot \overline{MB} + 2R \cdot x,$$

$$x = \frac{a \cdot \overline{MC} - b \cdot \overline{MB}}{2R}.$$

Din triunghiurile dreptunghice ACM și ABM deducem:

$$\overline{MC} = \sqrt{4R^2 - b^2} \quad ; \quad \overline{MB} = \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Analog se determină și coarda care subîntinde suma arcelor subîntinse de coarde date.

În aceeași lucrare a lui *Ptolomeu*, găsim împărțirea cercului în 360 de părți egale (în grade); el a considerat diametrul egal cu a treia parte din lungimea cercului și de aceea l-a împărțit în 120 de părți. Fiecare diviziune a fost împărțită în 60 de părți egale, iar pe acestea tot în cîte 60 de părți egale. Primele subdiviziuni au fost numite de romani « partes minutae primae » = primele părți mai mici, și « partes minutae secundae » adică părțile mici secunde. De aici au rămas denumirile minut și secundă. Împărțirea în 60 de părți este în strînsă legătură cu sistemul babilonian de numerație cu baza 60.

Un progres însemnat în domeniul trigonometriei îl găsim la indieni între secolele III și XII e.n. Deși la indieni, ca și la greci de altfel, trigonometria era doar un instrument de calcul pentru astronomie, totuși ei au realizat progrese mai mari în trigonometrie decît în astronomie. Indienii au împărțit cercul ca și Ptolomeu, în 360 de părți egale, însă au împărțit diametrul în 6876 părți egale. La numărul 6876 s-a ajuns astfel: a fost împărțit cercul în $60.360 = 21600$ părți; diametrul, fiind de 3,1416 ori mai mic decît lungimea cercului, trebuia împărțit în $\frac{21600}{3,1416} \approx 6876$ părți. Indienii au determinat mult mai exact raportul dintre lungimea cercului și diametru. În calcule, indienii foloseau 3 măsuri trigonometrice care echivalau cu liniile $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ și $1-\cos \alpha$. În loc de coarda întreagă ei foloseau semicoarda. Coarda întreagă (AB) se numea la indieni « djiva », ceea ce înseamnă coarda arcului; AC = semicoarda, adică linia sinusului, se numea arhadjiva. În transcripția arabă « djiva » se scrie « djiba », apoi a devenit « djaib » care înseamnă « sinusul » din anatomie. Acest cuvînt a fost tradus în limba latină ca « sinus » și cu toate că era nepotrivit și fără legătură cu semnificația lui din trigonometrie, a rămas în terminologia științifică. Prima traducere se pare că a fost făcută în secolul al XII-lea, de către *Herard* din *Cremona* (Lombardia).

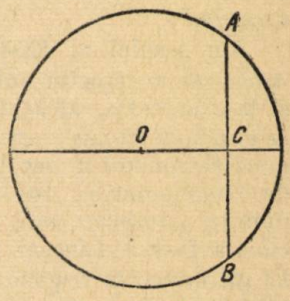


Fig. 2.

La indieni găsim tabele ale semicoardelor pentru unghiuri care diferă între ele prin 3°45′. Pentru calculul semicoardelor indienii au folosit laturile poligoanelor înscrise pe care le exprimau cu ajutorul razei cercului circumscris, considerată ca egală cu 3438; și sinusul unghiului de 90° era socotit tot egal cu 3438. Indienii cunoșteau și foloseau relații trigonometrice ca:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$$

și formulele $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$.

Pornind de la sinusul unghiului de 90° și folosind formula sinusului semiunghiului, indienii au găsit valoarea sinusului pentru $22\frac{1°}{2}$, 15°, $11\frac{1°}{4}$, $7\frac{1°}{2}$, $3\frac{1°}{2}$, etc.

Învățatul *Bhaskara* (1150) a dat în lucrarea sa « Sedtanta Seromani », o altă metodă pentru alcătuirea tabelelor și anume, cu formula

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{r} \pm \frac{\cos \alpha \sin \beta}{r}$$

în care înlocuia pe $\beta = 1°$, calculînd din aproape în aproape tabele de valori naturale ale sinusurilor.

Indienii au făcut toate calculele trigonometrice numai cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice, iar triunghiurile oarecare le-au împărțit întotdeauna în triunghiuri dreptunghice. De la indieni au împrumutat arabii multe cunoștințe de trigonometrie. Încă din secolul al VIII-lea noțiunile fundamentale de trigonometrie încep să fie folosite de arabi. *Califul al Mausur* din *Bagdad* împrumută în anul 773, tabela sinusurilor din culegerea « *Sidhart I* » a astronomului și matematicianului « *Brahmahupta* ». Arabii au numit această tabelă « *sinhind* ».

În secolul al IX-lea, marele matematician uzbec *Mohamed ben Muza Alhorezm* a cercetat tabele trigonometrice indiene și grecești, le-a recalculat și le-a corectat, alcătuind astfel tabele mult mai exacte ca pînă atunci. De la el a mai rămas și un tratat de astronomie numit *Sidhid*. Unul din cei mai mari astronomi ai secolului al IX-lea a fost *Al Batani*, care a făcut și studii de trigonometrie. În lucrările sale întîlnim o nouă măsură trigonometrică numită « umbra » care nu este altceva decît tangenta sau cotangenta, după cum a fost considerat raportul dintre obiect și umbră sau umbră și obiect. El introduce în trigonometrie sinusurile arcelor, părăsind astfel metoda jumătății coardelor, care se întrebuința pînă atunci. În trigonometria sferică el descoperă relația dintre cele 3 laturi și un unghi al unui triunghi.

La sfîrșitul secolului al X-lea, geometrul arab *Abul Veja* (940—988) a elaborat o nouă metodă pentru alcătuirea tabelelor sinusurilor unghiurilor din 10′ în 10′ și a întocmit o tabelă a tangentelor. El a fost primul matematician care a folosit secanta și cosecanta.

Azerbaigeanul *Nassir-ed-Din Tusi* (1201—1274) a considerat pentru prima dată trigonometria ca o ramură aparte a matematicii. În tratatul său « *Sakl-ul-Kita* », *Nassir-ed-Din* s-a folosit de funcțiile trigonometrice de care ne folosim și noi azi. El demonstrează teorema sinusurilor și a tangentelor și sistematizează noțiunile fundamentale ale trigonometriei liniare și sferice.

După cum am văzut din cele expuse mai sus, trigonometria s-a dezvoltat la popoarele orientului apropiat sau îndepărtat; europenii au luat această știință de la aceste popoare și au prelucrat-o mai amănunțit dîndu-i o bază teoretică mai adîncă.

Unul din primii europeni care au folosit noțiunile trigonometrice, a fost matematicianul englez *Thomas Bradwardin* (1290—1349), arhiepiscopul catedralei din Canterbury, care între altele a introdus termenii « umbra recta » (umbra dreaptă) și « umbra versa » (umbra schimbată), care echivalează cu tangenta și cotangenta.

La mijlocul secolului al XV-lea, matematicianul și astronomul german *Johan Müller*, care și-a iscălit operele cu numele de *Regiomontanus*, a scris un tratat intitulat « De triangulis planis et spheris », în anul 1553, care a fost tipărit cu peste un secol mai tîrziu. Deși nu folosește în această lucrare decît funcțiile sinus și cosinus, este totuși prima expunere modernă și sistematică a trigonometriei. Lucrarea cuprinde 5 părți: 4 de trigonometrie plană și 1 de trigonometrie sferică. În această lucrare întîlnim rezolvarea triunghiurilor oarecare prin 3 condiții date. Dăm un exemplu de problemă din cartea a II-a a lui *Regiomontanus*:

« Să se rezolve un triunghi în care se cunoaște diferența a două laturi, perpendiculara coborîtă din vîrful ce unește aceste două laturi cu latura opusă

și diferența dintre cele două segmente determinate pe bază de piciorul perpendicularei».

Regiomontanus a alcătuit tabele cu valorile sinusurilor și tangentelor din minut în minut; aceste tabele sînt foarte exacte, deoarece el a împărțit raza cercului în 10 milioane de părți și a exprimat măsurile trigonometrice prin fracțiuni foarte mici.

În secolul al XVI-lea matematicianul german *Georg Joachim* (cunoscut în istoria matematicii sub numele de *Rheticus)* a alcătuit tabele foarte exacte ale funcțiilor trigonometrice împărțind raza în 1015 părți. Tabelele lui reprezintă valorile funcțiilor ale căror arce diferă prin 10″.

El este primul european care definește funcțiile trigonometrice în triunghiul dreptunghic și nu în cerc, cum se proceda pînă atunci. Termenul de cosinus a fost introdus în jurul anului 1600, de matematicianul englez *Edmund Günther*, ca prescurtare a sinusului unghiului complementar. Tot el a introdus în mod analog, și termenul de cotangentă. De asemenea, *E. Günther* a alcătuit prima tablă de logaritmi a funcțiilor sinus și tangentă.

Johan Bernoulli (1667—1748), matematician elvețian, este acela care introduce în calcule termenii folosiți de noi: sin, cos etc.

În Rusia, primele noțiuni de trigonometrie le găsim în «*Aritmetica*» lui *Magnițki* (1703), care pentru vremea ei a fost considerată ca o enciclopedie a științelor practice. Deși nu dedică trigonometriei decît 9 pagini, el arată totuși calculul coardelor și arcelor duble și jumătăților de arce prin coarda arcului dat și calculează cosinusul ca sinus al unghiului complementar.

În epoca lui Petru I, problemele de construcția vaselor și de plutire pe mare, ingineria, fortificațiile, impuneau dezvoltarea diferitelor ramuri ale matematicilor. Se remarcă avîntul dezvoltării matematicilor în Rusia, după înființarea Academiei din Petersburg, în 1724, de către Petru I.

Un rol covîrșitor în dezvoltarea trigonometriei a avut *Leonard Euler* (1707—1783), născut în Elveția, membru al Academiei din Petersburg. El a luptat pentru răspîndirea științelor matematice în Rusia. Prin *Euler* trigonometria a căpătat caracterul de știință modernă. În lucrarea sa «Introducere în analiza infiniților mici», ca de altfel și în altele, el dă noțiunile de sinus și cosinus ca funcții și stabilește între ele relații simple exprimate analitic. Lucrarea este o tratare analitică a întregii trigonometrii. Pînă la *Euler* formulele se deduceau din desen și se exprimau în cuvinte; el a arătat cum se pot deduce toate formulele, analitic, din cîteva formule fundamentale, fără desen. Tot el a dedus cîteva formule necunoscute pînă atunci și este primul care a cercetat semnele funcțiilor trigonometrice în cele 4 cadrane și care a stabilit formulele de reducere la primul cadran. El a înlesnit de asemenea, tehnica de calcul prin introducerea notației laturilor și unghiurilor triunghiului prin a, b, c și A, B, C. În afară de acestea, *Euler* a stabilit formulele remarcabile care leagă funcțiile trigonometrice de cele exponențiale, ceea ce a dat posibilitatea de a se construi trigonometria independent de geometrie și de a înțelege prin argumentul funcțiilor trigonometrice nu unghiuri și arce ci mărimi oarecari, ceea ce a permis folosirea trigonometriei la probleme cu caracter foarte variat. Se poate considera că prin *Euler* trigonometria pășește în etapa superioară de dezvoltare.

Un alt academician din Petersburg, contemporan cu *Euler*, care se ocupa și de trigonometrie, *F. H. Mayer* (1727) a propus pentru sinus și cosinus o

notare mai scurtă: sinus = s, cosinus = c. Astfel sinusul sumei s-ar fi scris $\frac{sc + cs}{r}$. Dar notaţiile propuse de *Mayer* deşi primite cu entuziasm, n-au avut o viaţă lungă ci au fost repede uitate.

În anul 1765 a fost publicată cartea lui *N. Kurganov* intitulată « Geometria generală ca măsurare a întinderilor, teoria şi practica unei ştiinţe ». Cartea întîi conţine elemente de geometrie, trigonometrie plană şi sferică. În această carte găsim demonstraţia formulelor fundamentale:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

M. E. Golovin a publicat (1789) un manual sub numele de « Trigonometria plană şi sferică cu demonstraţii algebrice ». Expunerea are un caracter analitic şi autorul renunţă în această lucrare la secantă şi cosecantă. În secolul al XIX-lea s-au ocupat de problemele trigonometriei şi de predarea ei, marii matematicieni ai Rusiei: *N. I. Lobacevski* şi *M. V. Ostrogradski*. În lucrarea sa « Priviri generale asupra predării matematicii pure » (1825—1826), *N. I. Lobacevski* dă o mare atenţie metodelor de expunere a trigonometriei şi arată că această disciplină trebuie expusă analitic pentru a putea fi aplicată în cît mai multe domenii.

« Trigonometria trebuie să fie cu totul analitică. Geometria este necesară la începutul trigonometriei atîta timp cît foloseşte la descoperirea proprietăţilor caracteristice ale funcţiilor trigonometrice.

De aci trigonometria devine cu totul independentă de geometrie şi are toate calităţile analizei ».

Lobacevski a expus problemele de trigonometrie ca şi cum ar recunoaşte că trigonometria este o parte a matematicii care se referă la analiză, nu la geometrie. Problemele trigonometriei sînt tratate de *N. I. Lobacevski* pe cale pur analitică pornind de la formulele lui *Euler* pentru expresiile măsurilor trigonometrice.

Matematicianul *M. V. Ostrogradski* (1801—1861) în afară de munca ştiinţifică a condus predarea matematicii în toate şcolile militare din Rusia şi a scris numeroase însemnări, articole şi cărţi privind problemele predării matematicii în şcoală. Între acestea trebuie să remarcăm « Programa şi conspectul trigonometriei pentru conducerea şcolilor militare » (1851). În această lucrare, *M. V. Ostrogradski* consideră trigonometria ca ştiinţa despre rezolvarea triunghiurilor şi de aceea funcţiile trigonometrice sînt definite ca rapoarte ale laturilor triunghiurilor. Pînă la *Ostrogradski*, în manuale, funcţiile trigonometrice erau legate numai de cerc, pe cînd acum apare şi triunghiul. Ideile lui *Ostrogradski* au fost dezvoltate de *N. P. Kilduşevski* (1868—1944), metodist din Kazan, în manualele sale de trigonometrie.

Matematicianul sovietic *S. I. Novoselov* a scris un curs special de trigonometrie (1954), care este o expunere sistematică a acestei discipline. Ea se deosebeşte de celelalte prin expunerea bazelor teoriei funcţiilor transcendente elementare definite în corpul numerelor complexe. Tot *Novoselov* a scris un manual de trigonometrie în care elementele de politehnizare abundă. Se remarcă printr-un şir de exemple de aplicare a trigonometriei la rezolvarea problemelor de mecanică, optică şi tehnică.

În țara noastră încep să pătrundă cunoștințe de trigonometrie, prin secolul al XVI-lea, cînd domnul moldovean *Despot Eraclidul* a înființat la Cotnari (1561) o academie de studii științifice superioare, unde a fost invitat să predea vestitul matematician *Rheticus*.

Dimitrie Cantemir a avut cunoștințe deosebite de trigonometrie. El a stabilit meridianul locului pe unde a trecut armata rusă și tot el a făcut hărțile munților Caucaz și a mării Caspice.

În Țara Romînească, stolnicul *Cantacuzino* a alcătuit prima hartă a țării, dovedind prin aceasta că avea înaintate cunoștințe de trigonometrie și geodezie. Hărțile lui Dimitrie Cantemir și ale stolnicului Cantacuzino au servit drept bază cartografilor europeni din sec. XVIII și XIX pentru întocmirea hărților Europei de sud-est.

Primele însemnări scrise despre trigonometrie au fost găsite la postelnicul *Șerban Andronescu*, cunoscut prin notele sale privitoare la istoria Țării Romînești de la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Lucrarea cuprinde regulile principale ale artei topometrice ilustrate prin figuri geometrice. Textul este simplificat prin date concrete pe teren. După moartea autorului (1799) tratatul a fost revăzut și completat de fiul său, serdarul *Grigore Andronescu*. Din constatările făcute pînă acum se pare că acesta este cel mai vechi tratat de topometrie în limba romînă.

În anul 1818, *Gheorghe Lazăr* deschide prima școală superioară în limba romînă. Pentru a pune școlii sale o bază cît mai solidă, el se luptă cu greutăți neobișnuite pe care nu le învinge decît cu marea lui dragoste față de popor; el își scrie singur programele și chiar manualele. Între acestea găsim o trigonometrie foarte frumos caligrafiată (manuscrisul se află la Academia R.P.R.), în care se vede preocuparea deosebită de a prezenta problemele cît mai științific și mai legate de realitatea vieții. Problemele practice ocupă un loc deosebit, iar adaptarea terminologiei științifice dovedește cultura temeinică a lui *Gheorghe Lazăr*.

În anul 1919, *Traian Lalescu* editează trigonometria lui *Gheorghe Lazăr*.

La Iași, în anul 1838, *Gheorghe Asachi* publică un tratat de trigonometrie cu cosmografie.

La noi, ca de altfel și în alte țări, matematicienii se preocupă mult de trigonometrie, deoarece este necesară în rezolvarea diferitelor probleme de știință și tehnică.

Dacă ar trebui să arătăm, ca încheiere, care a fost drumul trigonometriei am putea spune că ea a izvorît din nevoile practice ale oamenilor încă din cele mai vechi timpuri; la început firavă ca o mlădiță a astronomiei ea s-a dezvoltat în decurs de sute de ani cu ajutorul mai multor popoare și s-a desprins de astronomie, iar astăzi este folosită la rezolvarea problemelor grele pe care le pune viața, tehnica, în topografie, astronomie, geografie. optică, mecanică etc.

FISIUNEA NUCLEARĂ

AL. CIOCĂNEL, cercetător

BOMBARDAREA unui nucleu cu o particulă accelerată, adică o particulă cu o energie cinetică mare, poate provoca după cum știm, o reacție nucleară după schema generală

$$A + p \rightarrow B + q, \tag{1}$$

unde A este nucleul-țintă, p — particula bombardantă, B — nucleul care ia naștere în urma procesului de interacție dintre A și p, iar q — poate fi de asemenea un proton sau neutron, o particulă α, foton sau un alt nucleu. Reacțiile nucleare pornesc în anumite condiții (de exemplu, pragul reacției) și pot fi endo- sau exo-termice, caracterizîndu-se printr-o cantitate de energie absorbită sau degajată, bine determinată.

Printre tipurile de reacții nucleare un loc deosebit și foarte important îl ocupă fisiunea nucleară, descoperită de Fermi și colaboratorii săi în 1934, în care produsele de reacție B și q au mase de același ordin de mărime.

Dacă notăm cu Z și A respectiv, sarcina și numărul de masă al nucleului, atunci formula clasică simplă a schemei după care se produce reacția de fisiune, se scrie:

$$_{Z}[\ ]^{A} = {}_{Z_1}[\ ]^{A_1} + {}_{Z_2}[\ ]^{A_2} + Q, \tag{2}$$

unde

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad \text{și} \quad A = A_1 + A_2. \tag{3}$$

Practic, fisiunea poate duce la formarea a două sau mai multe fragmente și este însoțită întotdeauna de emisia unui număr de 2—3 neutroni ($_0n^1$). Un exemplu semnificativ este reacția:

$$_{92}U^{235} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{57}La^{145} + {}_{35}Br^{88} + 3\,{}_0n^1. \tag{4}$$

Din punct de vedere energetic reacția (2) (respectiv, exemplul practic de reacție (4)), are loc numai în cazul unui bilanț.

Calculele făcute pe baza «modelului de picătură» al nucleului arată că acest bilanț depinde de raportul dintre variația energiei superficiale și a energiei de repulsie electrostatică dintre protoni.

Presupunînd pentru simplicitate, că nucleul bombardat se rupe în două părți egale: $Z_1 = Z_2 = \frac{Z}{2}$ și $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$, din condiția de conservare a volumului sistemului avem:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\,\frac{4}{3}\pi R_1^3, \tag{5}$$

de unde

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}. \tag{6}$$

In modelul de picătură energia superficială (E_s) și cea coulombiană (E_c) se exprimă prin relațiile

$$E_s = 4\pi R^2\sigma \quad \text{și} \quad E_c = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}. \tag{7}$$

Înainte de producerea fisiunii avem:

$$E_s + E_c = 4\pi R^2\sigma + \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}, \tag{8}$$

iar după fisiune, ținînd seama de (6) și de faptul că $Z_1 = \frac{Z}{2}$, avem

$$E_{s'} + E_{c'} = 2\left(4\pi R_f^2\sigma + \frac{3}{5}\frac{Z_1^2e^2}{R_f}\right) = 2\left(4\pi\sigma\frac{R^2}{\sqrt[3]{4}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}\frac{Z^2e^2}{4R}\right). \tag{9}$$

Scăzînd (9) din (8) avem:

$$\Delta E = 4\pi R^2\sigma\,(1 - \sqrt[3]{2}) + \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right). \tag{10}$$

Aici σ este energia superficială raportată la unitatea de suprafață, iar $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ raza nucleului ($r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm).

De aici rezultă că după cum ΔE este pozitiv sau negativ, în procesul de fisiune se absoarbe sau se degajă energie. Bohr și Wheeler, iar independent de ei, *I. J. Frenkel*, au arătat că fisiunea este avantajoasă din punct de vedere energetic, pentru nuclee cu numere de masă $A > 100$. În acest caz însă, se pune întrebarea de ce în natură există încă izotopi cu $A > 100$ și în general, nu sufere o fisiune spontană?

Explicația acestui fapt se găsește examinînd mecanismul fisiunii nucleare. Sub acțiunea particulelor bombardante nucleul începe să vibreze alungindu-se sau comprimîndu-se. Dacă nucleul primește de la particula cu care se ciocnește o cantitate de energie egală cu așa numita energie de activare, atunci el poate atinge o valoare critică a deformării pentru care se produce fisiunea (fig. 1).

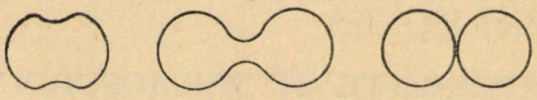


Fig. 1. — Deformațiile critice pentru diferite valori Z^2/A.

Mărimea deformației critice depinde în mod esențial de sarcina nucleului și este determinată de raportul Z^2/A.

Vedem deci că pentru a provoca un act de fisiune nu este suficient numai un bilanț energetic pozitiv (care poate fi întîlnit și la izotopii din natură cu $A > 100$), ci trebuie ca nucleul să mai primească și o «energie de activare a procesului de fisiune», a cărei variație în funcție de numărul atomic este dată în fig. 2.

Astfel, pentru diferiți izotopi ai uraniului energia de activare este: 4,8 MeV ($_{92}U^{234}$); 5,1 MeV ($_{92}U^{235}$) și 5,8 MeV ($_{92}U^{238}$). De remarcat este valoarea $\frac{Z^2}{A} = 50$ pentru care, după cum rezultă din calcule, nucleul se află la limita stabilității față de fisiune și față de procesul invers, reacția de contopire a două nuclee. Această limită se situează pe la mijlocul tabloului periodic al elementelor, de aceea pentru reacțiile de fisiune sînt indicate nucleele grele, iar pentru cele de fuziune nucleele ușoare. Acest lucru se realizează în exploziile nucleare și în cele termonucleare.

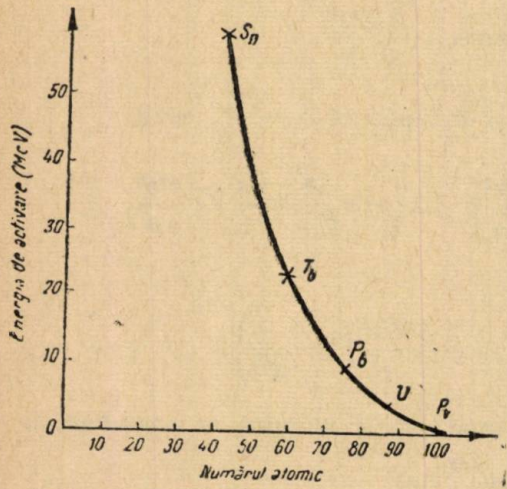


Fig. 2. — Variația energiei de activare în funcție de numărul atomic.

Evident, provocarea reacției de fisiune se poate face după diferite metode, deoarece energia de activare a reacției poate fi transmisă de particule ca: neutroni, protoni, deutoni, particule α, precum și de fotoni γ. Pentru aceasta putem folosi neutroni termici sau rapizi de la reactorii nucleari, particule accelerate în ciclotroane, betatroane, fazotroane etc. În urma acestui tip de reacție rezultă o serie foarte variată de produse de fisiune; numai la fisiunea uraniului s-au identificat 300 izotopi printre produsele de reacție. Faptul cel mai important însă, îl constituie apariția unui număr $\nu > 1$ de neutroni pentru fiecare act de fisiune (2—3), ceea ce condiționează după cum știm (v. art. din G.M.F. (B) nr. 3/1955) reacția de fisiune în lanț și deci posibilitatea de a obține cantități uriașe de energie, controlabile și utilizabile în scopuri productive (reactori nucleari).

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

EXPERIENȚE CU TERMOSCOPUL

A. I. HELFGAT (Orșa, R.S.S. Bielorusă)

În studiul fenomenelor termice, pentru constatarea unei variații de temperatură, un ajutor esențial îl poate oferi termoscopul. El este utilizabil în special pentru demonstrații, deoarece nu dă rezultate de precizie necesare pentru experiențele de laborator.

Experiențele de mai jos, în cea mai mare parte nu sînt noi. Scopul nostru este de a atrage atenția profesorilor asupra folosirii termoscopului în experiențele din clasă.

Conductibilitatea termică. Pentru a demonstra conductivitatea termică diferită a corpurilor solide se foloseşte un aparat în care în rolul receptoarelor de căldură servesc două tuburi de sticlă cu o lungime de circa 150 mm şi cu un diametru de aproximativ 15 mm (fig. 1), închise la ambele extremităţi prin dopuri de cauciuc. În dopurile inferioare se introduc extremităţile tuburilor de forma literii *U* ale manometrele umplute cu apă colorată. Prin dopurile superioare se trec de exemplu, un conductor de cupru şi unul de fier cu diametrul de 1,5—2,5 mm. Capetele libere ale conductorilor — cît mai scurte posibil pentru ca experienţa să dureze puţin — se răsucesc şi se îndoaie.

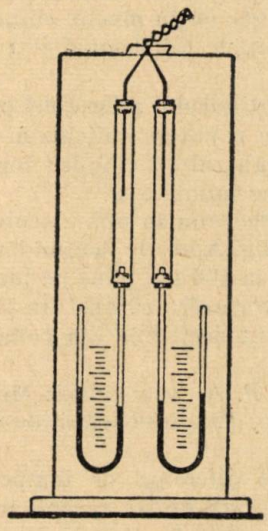


Fig. 1

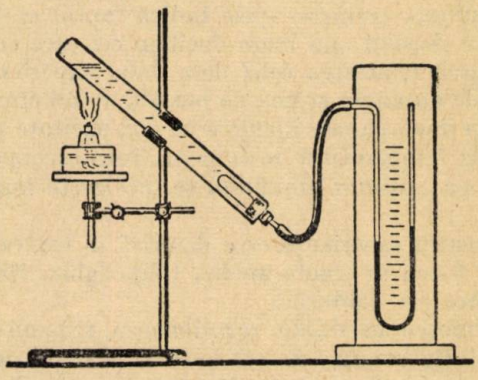


Fig. 2

Diferenţa tot mai mare în indicaţiile manometrelor în timpul încălzirii pe spirtieră a porţiunii răsucite a conductorilor, dovedeşte conductivitatea lor termică diferită.

Pentru demonstraţia conductibilităţii termice a lichidelor serveşte aparatul arătat în fig. 2. Aici drept receptor de căldură serveşte o eprubetă mică introdusă în dopul de cauciuc care închide la un capăt un tub de sticlă, lung de 250 . . . 300 mm şi cu un diametru de 25 . . . 30 mm. Tubul este umplut cu apă şi se fixează înclinat în stativ. Receptorul de căldură se închide cu dopul în care este introdusă eprubeta de sticlă subţire şi se pune în legătură cu manometrul cu lichid. Experienţa se arată pe fondul unui ecran transparent.

Cînd apa încălzită de spirtieră în partea superioară a tubului începe să fiarbă, indicaţiile manometrului vor rămîne aceleaşi ca şi înainte de încălzire. Este suficient să apropiem spirtiera de partea inferioară a tubului pentru ca termoscopul să indice imediat o încălzire [1]).

Pentru a dovedi conductivitatea termică slabă a aerului trebuie să aşezăm eprubeta în partea inferioară sau lateral faţă de corpul incălzit. Indicaţia manometrului practic nu se va schimba (eprubeta trebuie ţinută cu ajutorul unui cîrlig de rufe). Dacă o aşezăm la aceiaşi distanţă deasupra corpului încălzit, manometrul va indica imediat o încălzire.

Ca receptor de căldură pentru această experienţă este mai bine să luăm un balon cu pereţi subţiri, cu capacitatea de circa 100 ml.

---

[1]) V. de asemenea revista «Fizica v şcole», 1953, nr. 3, pag. 77.

Compararea cantităţilor de căldură. Pentru efectuarea experienţelor se folosesc două manometre identice fixate pe un panou vertical comun. Ca receptoare de căldură servesc eprubetele. Lungimea tuburilor de cauciuc care unesc eprubetele cu manometrul este de 600...700 mm; înălţimea tuburilor manometrice este de 400...600 mm, iar diametrul interior de 3...4 mm. Pe fundul unuia dintre două pahare conice cu pereţi subţiri, cu o capacitate de 600...700 ml, se pune cu atenţie pe suprafaţa laterală, un cilindru de fontă de 400 g şi se toarnă apă pînă cînd nivelul ei depăşeşte puţin nivelul cilindrului. Paharele se pun pe platanele unei balanţe şi se umple cel de-al doilea pahar cu apă pînă cînd balanţa ajunge la echilibru.

Convingîndu-i pe elevi de egalitatea maselor conţinutului celor două pahare, le aşezăm în mod simetric pe un reşou electric, de o putere suficientă. După cîteva minute termoscoapele indică faptul că în paharul cu cilindru temperatura este sensibil mai mare decît în cel care conţine numai apa.

Pentru realizarea celei de-a doua experienţe încălzim în apă clocotindă o bucată de aluminiu şi una de plumb, avînd cîte 100 g. Apoi, le scufundăm respectiv în două pahare identice cu o capacitate pînă la 100 ml, pline pe jumătate cu apă la temperatura de cameră. Termoscoapele vor arăta că apa din paharul în care s-a introdus aluminiul se încălzeşte mai mult decît apa din paharul cu plumb.

(Această esperienţă este descrisă în cartea lui P. A. Znamenski: Metodica predării fizicii în şcoala medie, Ucipedghiz, 1955, p. 194, însă folosindu-se alte receptoare de căldură.)

Termoscopul dublu reacţionează sensibil la o diferenţă de temperatură de 1—2° (în funcţie de mărimea suprafeţei de contact dintre receptoarele de căldură şi corpul cercetat). Micşorînd secţiunile tuburilor de sticlă şi de cauciuc pînă la aprox. 2 mm în diametru, putem mări şi mai mult sensibilitatea aparatului. O astfel de precizie de comparare a temperaturilor este suficientă în experienţele demonstrative.

Evaporarea. Transformarea energiei mecanice în energie internă. Pentru a demonstra fenomenul de răcire a unui corp care se evaporă şi în care afluxul de energie din exterior nu compensează pierderile de energie internă, ne putem mărgini la un singur termoscop. Este suficient să învelim eprubeta cu tifon umezit cu eter pentru ca monometrul să indice imediat o scădere de temperatură. Dacă vom agita energic eprubeta în aer, răcirea se va intensifica.

Ca receptor de căldură este mai comod să folosim în această experienţă un balon cu fund plat şi cu pereţi subţiri, cu o capacitate de 200 ml, fixat în poziţie răsturnată pe stativ. Tifonul umezit cu eter se întinde pe fundul balonului. Diametrul canalului tubului manometric este de 2...3 mm.

Un astfel de termoscop ne permite să demonstrăm şi transformarea energiei mecanice în energie internă. Pe fundul balonului se pun două bucăţi de lemn, apoi se freacă aceastea între ele şi se pun din nou în locul iniţial cu feţele frecate în jos. Indicaţiile manometrului arată o încălzire a bucăţilor de lemn. Tot astfel se arată încălzirea unei bucăţi de plumb datorită forjării ei.

Procesul adiabatic. Pentru a demonstra variaţiile de temperatură ale unui gaz la extindere sau compresie adiabatică este necesar un termoscop foarte sensibil. Dacă diametrul canalului tubului manometric sau al tubului de legătură este de 2—3 mm răcirea sau încălzirea gazului se detectează chiar la o mică variaţie a presiunii.

Într-un balon sau butelie cu pereți groși, de mare capacitate, se pompează cu pompa lui Komovski, o anumită cantitate de aer (fig. 3), apoi se scoate tubul de cauciuc al pompei. Se produce o extindere adiabatică a aerului în butelie și termoscopul indică o scădere a temperaturii. Creind vid în butelie cu ajutorul unei pompe de vidare (este suficient un număr de 30 de rotații ale manivelei pompei) și deschizînd-o brusc se observă o creștere de temperatură.

Cu același termoscop simplu se poate demonstra încălzirea în timpul dizolvării acidului sulfuric în apă, răcirea datorită dizolvării clorurii de amoniu, degajarea și absorbția de căldură în reacțiile chimice exotermice și endotermice etc.

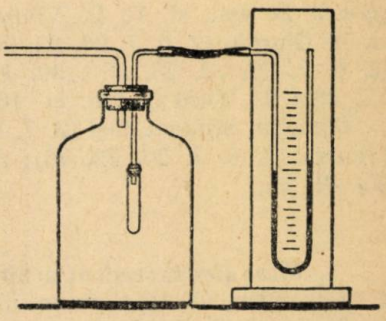


Fig. 3

PREMIILE «GAZETEI MATEMATICE ȘI FIZICE — SERIA B» PE ANUL 1956

Pentru *activitatea deosebită* desfășurată de unii corespondenți evidențiați pe anul 1956 în cuprinsul volumului VII din Gazeta matematică și fizică, seria B, după cum s-a arătat în GMF-B nr. 12 din 1956, s-au acordat *premii* și *mențiuni*. Cărțile cuvenite fiecăruia sînt indicate prin numărul lor de ordine din *lista cărților* anexate mai jos și sînt trecute în paranteză după fiecare nume, astfel:

Premii

1. *Panaitopol Laurențiu*, cl. 9 Giurgiu (2, 3, 4, 12, 16, 17, 18, 19, 23, 31, 33); 2. *Hulubei Valeriu*, cl. 10 Craiova (2, 3, 4, 12, 16, 17, 18, 23, 31, 33); 3. *Pupăzan V. Nicolae*, școala militară Sibiu (2, 3, 7, 9, 12, 18 31, 33, 35); 4. *Bucur D. Gheorghe*, cl. 10 Pucioasa (2, 3, 7, 9, 12, 16, 17, 23, 31); 5. *Stănciulescu Mihai*, cl. 9 Tîrgoviște (1, 3, 6, 10, 12, 22, 33, 34, 35); 6. *Grosu Gh. Florin*, cl. 10 Galați (2, 3, 6, 12, 16, 17, 23, 34); 7. *Focșeneanu I. Ioan*, cl. 9 Piatra Neamț (2, 3, 6, 12, 19, 21, 34, 37); 8. *Gervescu M. Ion*, cl. 7 Piatra Neamț (1, 3, 5, 12, 19, 21, 29, 39); 9. *Emanoil Alexandru*, cl. 10 s.m.1. București (2, 3, 6, 12, 16, 17, 31, 34); 10. *Popescu Paul Roger*, cl. 10 s.m. 11 București (2, 6, 7, 12, 18, 30, 31, 34); 11. *Zilbermann Mircea*, cl. 10 Bacău (2, 6, 7, 12, 16, 17, 30, 31); 12. *Hodor Constantin*, cl. 7 Roznov (1, 7, 8, 13, 19, 30, 37); 13. *Draica Constantin*, cl. 9 s.m. 4 București (1, 7, 8, 9, 13, 21, 30); 14. *Păunescu Lucian*, cl. 10 s.m. 17 București (2, 6, 7, 13, 18, 30, 31); 15. *Nistreanu Valeriu*, cl. 10 s.m. 4 București (2, 6, 7, 13, 30, 31, 35); 16. *Bărbuică Nicolae*, cl. 10 Craiova (2, 6, 7, 13, 19, 30, 31); 17. *Stoian I. Gh.*, student București (2, 4, 7, 13, 18, 30, 32); 18. *Murărescu Gheorghe*, cl. 10 Roman (2, 6, 7, 13, 19, 30, 35); 19. *Roșianu C. Dragomir*, student București (2, 7, 9, 16, 17, 30, 35); 20. *Lupuțiu Ion*, student București (2, 7, 8, 9, 18, 32, 35); 21. *Pleniceanu A. Ion*, student Petroșani (2, 7, 9, 16, 17, 29, 32); 22. *Iorgulescu Alex.* absolvent București (2, 6, 7, 18, 19, 29, 32); 23. *Stăncescu*

N. Emil, cl. 10 Giurgiu (2, 6, 7, 18, 22, 29, 35); 24. *Baltag Vasile*, cl. 9 Ploeşti (1, 7, 8, 9, 19, 29, 35); 25. *Bigan Stan*, absolvent Giurgiu (2, 6, 7, 19, 22, 28, 35); 26. *Bogdan P. Mircea*, cl. 10 Ploeşti (2, 6, 7, 19, 22, 28, 35); 27. *Grigorescu D. Ion*, cl. 10 R. Vîlcea (2, 6, 7, 20, 22, 28, 36); 28. *Botoran Petre*, cl. 10 Giurgiu (2, 6, 7, 20, 22, 28, 36); 29. *Paulescu N. Dan*, cl. 10 R. Vîlcea (2, 6, 7, 20, 22, 28, 36); 30. *Ene I. Ion*, student Bucureşti (2, 7, 8, 9, 20, 32, 36); 31. *Delu Ştefan*, cl. 10 Corabia (2, 6, 7, 20, 22, 33, 36); 32. *Alexa I. Dumitru*, student Iaşi (2, 7, 8, 9, 18, 20, 36); 33. *Stănculescu Adrian*, cl. 10 Craiova (3, 6, 7, 20, 22, 36); 34. *Şarpe I. Dumitru*, cl. 10 Corabia (3, 67, 20, 22, 36).

Menţiuni

1. *Stroe Radu*, student arhitectură Bucureşti (3, 7, 8, 12, 16, 17); 2. *Voinea I. Alexandru*, cl. 10 Craiova (3, 7, 8, 9, 20, 27); 3. *Ioniţă Tudor*, student O. Stalin (3, 7, 8, 15, 16, 17); 4. *Trifu Mircea*, cl. 8 Alba Iulia (1, 7, 8, 15, 20); 5. *Voinea C. Dorin*, cl. 10 s.m. 2, Craiova (3, 7, 8, 9, 27); 6. *Groşşoreanu Tudor*, cl. 7 s.m. 7 Bucureşti (1, 7, 8, 27); 7. *Ţibuleac Florin*, cl. 9 Iaşi (1, 7, 8, 27); 8. *Stepan Ionel*, s.m. hidro Constanţa (3, 7, 8, 27); 9. *Torjescu Florin*, student Bucureşti (3, 7, 8, 27); 10. *Alexa Ion*, absolvent Sibiu (3, 7, 8, 27); 11. *Schileru Dinu*, cl. 10 s.m. 1 Bucureşti (3, 7, 8, 10); 12. *Şaganai Acic Nusfet*, cl. 10 s.m. 13 Bucureşti (3, 7, 8, 11); 13. *Hegedüs Attila*, cl. 9 T. Mureş (1, 7, 8, 11); 14. *Ianuş Stere*, cl. 9 Constanţa (1, 8, 11, 37); 15. *Aniţescu N. Nicolae*, cl. 8 Tg. Jiu (3, 11 14, 37); 16. *Arsenovici Tiberiu*, cl. 10 Timişoara (3, 11, 14, 37); 17. *Ancuţoiu I. Gheorghe*, cl. 9 R. Vîlcea (3, 11, 14, 37); 18. *Colonatti Cristian*, absolvent Moreni (3, 11, 14, 37); 19. *Rotaru N. Constantin*, absolvent Suceava (3, 11, 14, 37); 20. *Tudor M. Gheorghe*, cl. 10 s.m. 13 Bucureşti (3, 11, 14, 37); 21. *Jurcă Valeriu*, cl. 10 Ploeşti (3, 10, 14, 25); 22. *Florescu Gh. Mircea*, student Bucureşti (3, 10, 15, 40); 23. *Bătineţu M. Dumitru*, absolvent Zimnicea (3, 10, 15, 36); 24. *Cristea Aurel*, cl. 10 Focşani (3, 10, 15, 36); 25. *Turiga M. Constantin*, absolvent Urziceni (3, 10, 15, 27); 26. *Hoţa Marcel*, cl. 10 Tg. Mureş (3, 10, 15, 27); 27. *Văgăunescu Gheorghe*, cl. 10 Ploeşti (3, 10, 15, 27); 28. *Guiaşu Silviu*, student Bucureşti (3, 10, 15, 26); 29. *Nerodea Tiberiu*, cl. 10 Timişoara (3, 10, 15, 39); 30. *Predoiescu Marieta*, cl. 8 s.m. 10 Bucureşti (3, 10, 15, 39); 31. *Vişinescu Mihai*, cl. 8 Giurgiu (3, 10, 15, 39); 32. *Zorapapel Tiberiu*, cl. 9 s.m. 17 Bucureşti (3, 10, 15, 39); 33. *Mihăileanu N. Constantin*, cl. 9 Timişoara (3, 10, 15, 39); 34. *Matei Aurel*, cl. 9 P. Neamţ (3, 10, 15, 38); 35. *Nicolau Gh. Cornel*, cl. 9 s.m. 4 Bucureşti (3, 10, 15, 38); 36. *Şor Liber*, cl. 9 Iaşi (3, 10, 15, 24); 37. *Vasiliev Lucia*, s.m. hidro Constanţa (3, 10 15, 38); 38. *Sin C. Alexandru*, cl. 10 Giurgiu (3, 10, 15, 38); 39. *Iftimie Viorel*, cl. 10 Rădăuţi (3, 10, 15, 38).

Lista cărţilor cu numărul de ordine, acordate premianţilor şi menţionaţilor pentru rezolvări de probleme

1. Culegere de probleme de geometrie de *Gh. Ţiţeica* (11 exemplare); 2. Curs special de algebră elementară de *S. I. Novoselov* (26 ex); 3. Curs special de trigonometrie de *S. I. Novoselov* (45 ex); 4. Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică de *P. B. Demidovici* (3 ex.); 5. Culegere de probleme de fizică de *Faur* şi *Buzatu* (1 ex); 6. Curs de matematici pentru statisticieni şi economişti de *Gh. Mihoc* şi *H. Ionescu* (20 ex); 7. Noţiuni de geometrie proiectivă de *C. Borş* (40 ex); 8. Introducere în fizica solidului de *V. Sergiescu* (20 ex); 9. Calculul diferenţial de *N. Luzin* (11 ex); 10. Lumina polarizată şi aplicaţiile ei în tehnică de *I. Agîrbiceanu* (20 ex); 11. Manual de matematici superioare de *N. P. Tarasov* (10 ex); 12. Radiotehnica de *I. P. Jerebţov* (10 ex); 13. Geometrie proiectivă de *N. F. Cetveru-*

hin (9 ex); 14. Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală. Partea I, de *S. P. Strelcov, A. I. Elțin, I. A. Iacovlev* (7 ex); 15. Curs de matematici superioare de *I. F. Suvorov* (20 ex); 16. Curs de mecanică teoretică, vol. I, de *A. I. Necrasov* (10 ex); 17. Curs de mecanică teoretică, vol. 2, de *A. I. Necrasov* (10 ex); 18. Metode matematice în tehnica chimiei de *L. M. Batuner* și *M. E. Pozin* (10 ex); 19. Sistemul practic general de mărimi și unități, teoria și practica, de acad. *C. Budeanu* (10 ex); 20. Culegere de probleme de analiză cantitativă de *A. R. Misakin, A. I. Araplivski, S. P. Saikind și S. M. Efremos* (10 ex); 21. Astronomia (trad. l. rusă) de *I. S. Popov* (3 ex); 22. Calcule chimice, culegere de probleme de *Halmut Fielder* (10 ex); 23. Curs de algebră superioară de *A. G. Kuroș* (4 ex); 24. Sbornik zadaci de *Berman* (1 ex); 25. Kratkii kurs de *Okunev* (1 ex); 26. Sbornik zadaci de *Saharov* (1 ex); 27. Nomografia de *Pentkovski* (10 ex); 28. Teoria modernă a magnerismului de *Vonsovski* (5 ex); 29. Mărimi și unități în fizică de *Mircea Oncescu* (5 ex); 30. Elemente de teoria congruențelor de drepte de *A. Kahane* (10 ex); 31. Introducere în teoria ecuațiilor integrale de *Tr. Lalescu* (10 ex); 32. Calculul vectorial de *Kocin* (5 ex); 33. Geometria diferențială a rețelelor de *Gh. Țițeica* (5 ex); 34. Elemente de teoria mulțimilor de *Sergiu Vasilache* (5 ex); 35. Curs de geometrie diferențială de *Finikov* (10 ex); 36. Calculul probabilităților de *O. Onicescu* (10 ex); 37. Introducere în radioastronomie de *Tirlingher* (10 ex); 38. Introducere în teoria magnetismului (5 ex); 39. Appendix. *Ianos Bolyai* (5 ex); 40. Bazele teoriei numerelor de *Vinogradov* (1 ex) — total 419 exemplare.

Premiații și menționații pe anul 1956 sînt rugați să comunice adresa lor exactă sau să se prezinte la sediul S.S.M.F. din București, strada Academiei 14, pentru a primi cărțile acordate.

DIN VIAȚA «SOCIETĂȚII»

Conferința pe țară a Societății de științe matematice și fizice din R.P.R. din 10 — 12 ianuarie 1957

Pe baza prevederilor statutului Societății de științe matematice și fizice din R.P.R. (S.S.M.F.) și în urma hotărîrii adoptate de Consiliul S.S.M.F., la 14 octombrie 1956, au avut loc la București între 10 și 12 ianuarie 1957, lucrările Conferinței pe țară, organul suprem de conducere al Societății.

Scopurile acestei conferințe au fost: analiza activității desfășurate de S.S.M.F. și consiliul său în ultimii trei ani, dezbaterea unor probleme actuale ale învățămîntului matematicii și fizicii, activizarea comitetelor filialelor și subfilialelor, întărirea Consiliului, a legăturilor dintre învățămîntul superior și cel de cultură generală, dintre cadrele S.S.M.F. din diferite orașe din țară, dintre S.S.M.F. și Ministerul Învățămîntului cu instituțiile sale anexe.

Realizarea acestor scopuri a fost puternic îndrumată de documente de partid (Directivele Congresului al II-lea al P.M.R. cu privire la cel de-al doilea plan cincinal, Rezoluția plenarei din 27—29 decembrie 1956 a C.C. al P.M.R.) și de stat (Hotărîrea cu privire la îmbunătățirea învățămîntului de cultură generală din iunie 1956, Hotărîrea Colegiului Ministerului Învățămîntului cu privire la activitatea S.S.M.F. din septembrie 1956), de experiența prețioasă a activiștilor Societății.

Lucrările primei zile s-au desfășurat în amfiteatrul « Spiru Haret » al facultății de fizico-matematici.

Cuvîntul de deschidere a fost rostit de acad. Gr. C. Moisil. Salutînd pe reprezentanții Ministerului Învățămîntului, ai organizațiilor obștești, ai filialelor și subfilialelor, președintele Consiliului S.S.M.F. enumără sarcinile Societății în lumina directivelor Congresului al II-lea al P.M.R. și în urma ședinței Colegiului Ministerului Învățămîntului, din septembrie 1956. Subliniază în mod deosebit importanța întăririi legăturii dintre învățămîntul superior și cel mediu, care a fost dezbătută în cadrul biroului, atît pe linia informării științifice și a atragerii către o muncă creatoare de specialitate, cît și a bunei pregătiri a elevilor, viitori studenți.

Acad. *Gr. C. Moisil* subliniază faptul că numai datorită sprijinului dat de Partid și Guvern, știința românească a putut obține succesele din ultimul timp, cum sînt: Congresul matematicienilor romîni din iunie 1956 și organizarea Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R. și îndeamnă pe membrii S.S.M.F. să răspundă cu devotament și seriozitate la chemările Partidului și Guvernului pentru ridicarea nivelului de trai material și cultural al poporului.

În prezidiul Conferinței sînt aleși apoi: acad. *Gr. C. Moisil*, *Gh. Atanasiu*, *C. Dinculescu*, *Gh. Mihoc*, membri corespondenți ai Academiei R.P.R.; *A. Popovici*, prof. univ., *Florica Bucurescu* (Arad), *Laszlo Heinrich* (Cluj), *Valentina Nanu* (Pitești), *Traian Pop* (secția școli a C.C. al P.M.R), *Gleb Simionescu* (C.C. al Sindicatului muncitorilor din învățămînt), profesori; *Nina Telescu* (secția școli a C.C. a U.T.M.).

Tov. *C. Dinculescu*, locțiitor al ministrului învățămîntului, aduce salutul Ministerului Învățămîntului și face o succintă analiză a muncii Societății.

Tov. *Gh. Atanasiu* aduce salutul institutelor de fizică ale Academiei R.P.R.; tov. *Gh. Mihoc* aduce salutul institutului de matematică al Academiei R.P.R. și al universității «C. I. Parhon» din București; tov. *T. Vescan* (prof. univ. Iași) și *D. V. Ionescu* (prof. univ. Cluj) aduc saluturile filialelor Academiei și universităților respective, iar tov. *Gleb Simionescu* și *Nina Telescu* pe cele ale organizațiilor pe care le reprezintă. Toți au subliniat contribuția adusă de S.S.M.F. învățămîntului de specialitate și, urînd succes lucrărilor Conferinței pe țară, au arătat că instituțiile și organizațiile respective vor acorda în viitor tot sprijinul activității ei.

Înainte de a se trece la desfășurarea ordinei de zi, se aleg următoarele comisii:

a) comisia de validare, formată din tovarășii: *C. Iacob*, membru coresp. al Academiei R.P.R., *Tereza Ignat* și *V. Rusu* (Oradea);

b) comisia de rezoluții, formată din tovarășii: *T. Vescan* (Iași), *W. Cseke* (Cluj), *O. Sacter*, *Margareta Ailincăi* și *Mircea Negrea* (Ploești);

c) comisia de candidare, formată din tovarășii: *Gh. Mihoc* membru coresp. al Academiei R.P.R. *A. Popovici*, *Zoe Gobjilă* (Iași), *Elemer Kiss* (Tg. Mureș), *Ion Zaharia* (Constanța).

Se dă cuvîntul tov. *Tiberiu Roman*, secretar general al S.S.M.F., să prezinte propunerile și concluziile dării de seamă pe perioada 1954—1956 (inclusiv). Textul integral al dării de seamă fusese distribuit cu anticipație participanților la Conferință.

Tov. *M. Ghermănescu*, prof. univ., prezintă raportul comisiei de cenzori pe perioada 1954—56. Conferința votează în unanimitate descărcarea consiliului pe această perioadă.

La disctuții asupra dării de seamă, care au avut loc între orele $10^1/_2$—13 și 17—19, iar parte tovarășii: *Mircea Negrea* (Ploești), *Eugen Dobrescu* (Petroșani), *Aurelian Petică* (Tecuci), *Ion Grigore* (Ploești), *Gh. Opaiț* (Iași), *Teofil Vescan* (Iași), *Eugen Vișa* (Timișoara), *David Rimer* (Iași), *Iuliu Maurer* (Cluj), *Wilhelm Cseke* (Cluj), *Savin Popescu* (Giurgiu), *Traian Popescu* (Sinaia), *Pavel Perebiceanu* (Alba Iulia), *Cezar Ivănescu* (Tîrgoviște), *Tereza Ignat*, *Gheorghe Bazacov* (Turnu Severin), *Ștefan Berți* (Sighet), *Petre Boldescu* (Craiova), *David Blumen*.

Cei 19 participanți la discuții, subliniind unele realizări din ultima perioadă de activitate a Societății, au ridicat probleme desprinse din munca lor ca profesori, oameni de știință, activiști ai S.S.M.F, au criticat unele lipsuri ale publicațiilor S.S.M.F. și ale informării științifice, au făcut numeroase propuneri pentru îmbunătățirea rezultatelor muncii desfășurate de S.S.M.F. prin conferințe și publicații, prin olimpiade și cercuri, consfătuiri și material documentar.

Au răspuns la propunerile făcute acad. *Gr. C. Moisil*, *O. Sacter* și *A. Petrovanu*.

În încheerea discuțiilor, tov. *C. Dinculescu*, locțiitor al ministrului, după ce răspunde unor întrebări și propuneri, subliniază că S.S.M.F. trebuie să-și îndrepte activitatea în primul rînd spre ridicarea nivelului științific al profesorilor din învățămîntul mediu și spre îmbunătățirea învățămîntului de specialitate.

Proiectul de rezoluție, prezentat de tov. *T. Vescan* în numele comisiei de rezoluție, este aprobat în unanimitate.

Raportul comisiei de validare, prezentat de tov. *C. Iacob*, membru coresp. al Academiei R.P.R., constată că sînt prezenți majoritatea delegaților aleși la adunările filialelor (76 din 115) și 45 invitați. Sînt reprezentate astfel 39 filiale și subfiliale (nu sînt reprezentate: Aiud Bîrlad, Deva, Lugoj, Rădăuți, Sf. Gheorghe). În aceste condiții, Conferința pe țară fiind statutar constituită, poate lua hotărîri valabile.

Între orele 17 și 19, comisia de candidare a ținut o consfătuire cu reprezentanții delegațiilor (cîte unul din fiecare regiune și din orașul București) în vederea alcătuirii propunerilor pentru alegerea noului Consiliu și a comisiei de cenzori.

Tov. *Gh. Mihoc*, membru coresp. al Academiei R.P.R., prezintă aceste propuneri, în numele comisiei de candidare.

Consiliul alege biroul, iar acesta se constituie și alege președintele, vice-președinții și secretarul general.

În ziua de 11 ianuarie 1957, lucrările Conferinței au continuat la Casa universitarilor. Între orele 9 și $11^1/_2$ au fost prezentate extrase din referatele:

— Matematica, element de cultură în gîndirea tehnică, de *D. Dumitrescu*, prof. univ.

— Activitatea extrașcolară la matematică și fizică în școala de cultură generală, de *O. Halunga*, prof. înv. mediu, *A. Negulescu*, prof. înv. mediu, *T. Roman*, conf. univ.,

— Asupra politehnizării învățămîntului de cultură generală la matematică și fizică de *O. Sacter*, conf. univ. și *A. Petrovanu*, prof. înv. mediu.

Aceste referate fuseseră multiplicate și distribuite delegaților și invitaților.

La discuțiile asupra problemelor ridicate de aceste referate au participat tovarășii: *Carol Bucovschi* (Sighișoara), *Constantin Dinculescu*, *Clara Moroianu*, *Eugen Vișa* (Timișoara), *Mircea Țarălungă* (Bacău), *Laszlo Heinrich* (Cluj), *Ion Chivu* (Galați), *Stelian Mărculescu* (Orașul Stalin), *David Blumen*, *Ion Grigore* (Ploești), *Ilarion Zahariciuc* (Suceava), *Valentina Nanu* (Pitești), *Ion Borca*. Aceștia au ridicat probleme în legătură cu procesul de politehnizare a învățămîntului cu activitate practică a profesorilor de specialitate.

Răspund la unele probleme ridicate tovarășii *Caius Iacob* și *O. Sacter*.

După amiază, acad. *Gr. C. Moisil* a ținut conferința intitulată: *Ramuri moderne de matematică aplicată*.

Seara, participanții la Conferință au asistat la un spectacol al Teatrului de operă și balet.

În ziua a treia, lucrările Conferinței au avut loc la facultatea de fizico-matematici. S-a prezentat referatul: *Pregătirea și perfecționarea profesorilor de matematică și de fizică*, de *Gh. Mihoc*, prof. univ. și *A. Hollinger*, profesor emerit al R.P.R.

La discuții asupra acestui referat au participat tovarășii: *Ion Grigore* (Ploești), acad. *Gr. C. Moisil*, *Ion Păunel* (Buzău), *D. Riemer* (Iași), *Eugen Vișa* (Timișoara), care s-au referit la chestiuni privind formarea viitorilor profesori, la calificarea și perfecționarea actualilor profesori.

Înainte de a-și încheia lucrările, Conferința a aprobat trimiterea unor telegrame Comitetului central al Partidului Muncitoresc Romîn și Ministerului Învățămîntului.

Participanții la Conferință au vizitat apoi Institutul de fizică atomică al Academiei R.P.R. unde au văzut, între altele, miscroscopul electronic și mașina electronică de calculat.

*

La prînz, a avut loc o masă tovărășească la care au participat delegații și invitații.

Seara, între orele 18 și 20, a avut loc o consfătuire cu reprezentanți ai filialelor și subfilialelor asupra unor probleme organizatorice și sarcini actuale ca: sesiunea științifică 1957 a S.S.M.F., acțiunea filialelor pentru antrenarea membrilor lor să scrie articole pentru G.M.F.A, G.M.F.-B și M.F.L., asigurarea deplasării conferențiarilor din centrele universitare, organizarea unor noi consfătuiri interregionale, colaborarea profesorilor din provincie la elaborarea subiectelor pentru olimpiade, organizarea unor consfătuiri cu cititorii, grija pentru buna difuzare a periodicelor S.S.M.F. (cu specială atenție pentru M.F.L.), dotarea bibliotecilor, asigurarea condițiilor materiale pentru olimpiade, studierea rețelei actuale și viitoare a subfilialelor, legătura cu filialele, asigurarea odihnei pentru activiștii S.S.M.F.

Biroul S. S. M. F.

Președinte: acad. *Grigore C. Moisil*;

Vice-președinții: *Caius Iacob*, prof. univ., membru corespondent al Academiei R.P.R.; *Andrei Popovici*, prof. univ.; *Aurel Petrovanu*, prof. înv. mediu;

Secretar general: *Tiberiu Roman*, conf. univ.;

Responsabil științific pentru fizică: acad. *Eugen Bădărău*;

Responsabil științific pentru matematică: *Nicolae Teodorescu*, prof. univ., membru corespondent al Academiei R.P.R.;

Redactor responsabil G.M.F. seria A: *A. Hollinger*, conf. univ., profesor emerit al R.P.R.;

Redactor responsabil G.M.F. seria B: *O. Sacter*, conf. univ.;

Membrii: *Ion Agîrbiceanu*, prof. univ.; *Margareta Ailincăi*, prof. înv. mediu; *Olimpia Gheorghiu*, prof. înv. mediu; *Tereza Ignat*, prof. înv. mediu; *Angela Negulescu*, prof. înv. mediu; *Dumitru Sulgerescu*, prof. înv. mediu;

Membri supleanți: *Alexandru Sanielevici*, prof. univ. membru corespondent al Academiei R.P.R.; *G. D. Simionescu*, conf. univ.; *George Brătescu*, lector; *Benone Constantinescu*, lector, Iași; *Victor Apostol*, prof. înv. mediu Craiova; *Florica Bucurescu*, prof. înv. mediu Arad; *Ilie Ilasievici*, prof. înv. mediu, Pitești; *Elemer Kiss*, prof. înv. mediu, Tîrgu Mureș.

Consiliul

Acad. *Gheorghe Demetrescu*, Acad. *Horia Hulubei*, Acad. *Miron Nicolescu*. Acad. *Ilie G. Murgulescu*, Acad. *Simion Stoilow*, Acad. *Șerban Țițeica*, Acad. *Gheorghe Vrănceanu*, *C. Dinculescu*, prof. univ., membru corespondent al Academiei R.P.R., *Traian Gheorghiu*, prof. univ., membru

corespondent al Academiei R.P.R., *Gheorghe Mihoc*, prof. univ., membru corespondent a Academiei R.P.R., *Valer Novacu*, prof. univ., membru corespondent al Academiei R.P.R., *Constantin Drîmbă*, prof. univ., *C. Ionescu-Bujor*, prof. univ., *Arno Kahane*, prof. univ., *Aurel Pîrvu*, prof. univ. (ASIT), *Aurel Potop*, prof. univ., *Aristide Halanay*, conf. univ., *Vasile Mihu*, conf. univ., *Aurel Munteanu*, conf univ., *Gheorghe Petrescu*, conf. univ., *Nicolae Stănescu*, conf. univ., *Mariana Bratu*, prof. înv. mediu, *Octav Florescu*, prof. înv. mediu, *Octavian Halunga*, prof. înv. mediu, *Stela Manolescu*, prof. înv. mediu, *Ştefan Musta* prof. înv. mediu (Editura didactică şi pedagogică), *Elena Nicolaescu*, prof. înv. mediu (Cabinetul pedagogic regional), *Maura Protopopescu*, prof. înv. mediu, *Spiridon Zverca*, prof. înv mediu, *Carol Neumann*, inginer (Editura Tehnică), *Tiberiu Ionescu*, conf. univ, *David Blumen*, prof. înv. mediu (Institutul de ştiinţe pedagogice), *Virgil Atanasiu*, lector (I.P.C.D.), *Traian Negreja* (din Dir. gen. înv. profesional şi tehnic din Ministerul Învăţămîntului), *Simon Petre*, prof. înv. mediu, Tîrgu Mureş, *Emma Biro*, prof. înv. mediu, Tîrgu Mureş (Cabinetul regional), *Zoltan Pater*, prof. înv. mediu, Baraolt, *Sergiu Postolache*, prof. înv. mediu, Bacău, *Aglaia Ctrjă*, prof. înv. mediu, Bacău (cabinetul pedagogic regional), *Constantin Borş* prof. înv. mediu, Piatra Neamţ, *Mariana Popa*, prof. înv. mediu, Roman, *Gheorghe Cosma*, prof. înv. mediu, Baia Mare (cabinetul pedagogic regional), *Vasile David*, prof. înv. mediu, Baia Mare, *Alex. Z. Ionescu*, prof. înv. mediu, Călăraşi, *Gheorghe Müller*, prof. înv. mediu, Turnu Măgurele, *Savin Popescu*, prof. înv. mediu, Giurgiu, *Wilhelm Cseke*, prof. univ. Cluj, *D. V. Ionescu*, prof. univ., Cluj, *Victor Marian*, prof. univ., Cluj, *Tiberiu Popovici*, membru corespondent al Academiei R.P.R. Cluj, *Iuliu Maurer*, lector Cluj, *Ştefan Man*, profesor emerit al R.P.R., Cluj, *Laszlo Heinrich*, prof. înv. mediu, Cluj, *Ştefan Török*, prof. înv. mediu, Cluj, *Iuliu Tatu*, prof înv. mediu, Aiud, *Gabriela Pîslaru*, prof. înv. mediu, Constanţa, *Ion Zaharia* prof. înv. mediu, Constanţa, *Petre Boldescu*, prof. înv. mediu, Craiova, *Gheorghe Bazacov*, prof. înv. mediu, Turnu Severin, *Ion Ciolac*, prof. înv. mediu, Craiova, *Petre Rueneanu*, prof. înv. mediu Craiova, *Emil Laszlo*, prof. înv. mediu, Deva (cabinetul pedagogic regional), *Gheorghe H. Achiţei*, prof. înv. mediu, Deva, *I. Sălăgeanu*, lector, Petroşani, *Ion Ghinea*, lector, Galaţi, *Otilia Stăhiescu*, prof. înv. mediu, Galaţi, *Traian Ionescu*, prof. înv. mediu, Brăila, Acad. *Alexandru Myller*, Iaşi, *Ion Creangă*, prof. univ., Iaşi, *Adolf Haimovici*, prof.univ. Iaşi, *Dimitrie Mangeron* prof. univ., Iaşi, *Constantin Mihul*, prof. univ., Iaşi, *Ilie Popa*, prof. univ., Iaşi, *Teofil Vescan* prof. univ., Iaşi, *Teodor Drăgănel*, prof. înv. mediu (secţia de învăţămînt), Iaşi, *Elena Timpoc*, prof înv. mediu, Iaşi, *Ladislau Beniţki*, prof.înv. mediu, Oradea, *Victor Rusu*, prof. înv. mediu, Oradea, *Ludovic Schwartz*, prof. înv. mediu, Oradea, *Emil Morţun*, prof. emerit al R.P.R., Piteşti, *Valentina Nanu*, prof. înv. mediu, Piteşti, *Ion Grigore*, prof. înv. mediu, Ploeşti, *Mircea Negrea*, prof. înv. mediu, Ploeşti, *Cezar Ivănescu*, prof. înv. mediu, Tîrgovişte, *Ion Brenciulescu*, prof. înv. mediu, Oraşul Stalin, *Stelian Mărculescu*, prof. înv. mediu, Oraşul Stalin, *Maria Vidraşcu*, lector Oraşul Stalin, *Vasile Vasu*, prof. înv. mediu, Sibiu, *I. Zenembisi*, prof. înv. mediu, Botoşani, *G. T. Gheorghiu*, prof. univ., Timişoara, *Nicolae Mihăileanu*, prof. univ., Timişoara, *Elena Cîrstici*, prof. înv. mediu, Timişoara, *Eugen Vişa*, prof. înv. mediu, Timişoara.

Propunerile şi concluziile dării de seamă asupra activităţii S.S.M.F. pe perioada 1953 — 1956

În activitatea *ştiinţifică*, S.S.M.F. va urmări organizarea de sesiuni cel puţin odată la doi ani, deschise cercetătorilor, profesorilor etc.; între sesiuni, vor putea avea loc consfătuiri, colocvii, conferinţe, referate, comunicări, simpozioane etc, pe teme, cu participarea tuturor celor ce lucrează în specialitatea respectivă în ţară.

Buletinul de matematică al Societăţii va apare în viitorul apropiat. Se vor depune stăruinţe şi pentru apariţia Buletinului de fizică.

Se va urmări atragerea spre munca de studiu şi cercetare ştiinţifică a unor pături mai largi, în special din rîndurile profesorilor din învăţămîntul mediu, atît prin organizarea în mai bune condiţiuni a informaţiei ştiinţifice (articole de sinteză, material documentar în G.M.F.-A, cicluri de conferinţe, simpozioane) prin formarea de colective de studiu şi cercetare în centre neuniversitare, cît şi prin îmbunătăţirea programelor IPCD. În acest sens, filialele din centrele universitare sînt îndicate să acorde un sprijin mai substanţial celorlalte filiale şi subfiliale, prin trimiterea de conferenţiari, orientarea studiului individual, îndrumarea organizării unor manifestări publice cu forţe locale etc.

În sectorul *învăţămînt*, S.S.M.F. va sprijini aplicarea Hotărîrii Consiliului de Miniştri cu privire la îmbunătăţirea învăţămîntului de cultură generală. În acest scop, se vor dezbate programele de învăţămînt şi manualele, politehnizarea învăţămîntului; se vor populariza metodele de lucru ale profesorilor fruntaşi din ţară şi străinătate, se va urmări îmbunătăţirea legăturii dintre matematică, fizică şi tehnică. În G.M.F. seria A şi în Biblioteca S.S.M.F.

vor trebui tipărite lucrări pe teme de învățămînt în mod susținut, asigurîndu-se colaborarea unui cerc cît mai larg de profesori din țară. Se va acorda atenție problemelor de învățămînt superior.

Filialele S.S.M.F. vor trebui să participe activ la îmbunătățirea activității cercurilor pedagogice și a consfătuirilor raionale prin popularizarea celor mai bune metode de lucru, a celor mai reușite referate, prin punerea în discuție a temelor celor mai actuale, prin atragerea profesorilor către acțiunile proprii ale S.S.M.F.

S.S.M.F. va trebui să cunoască și să stimuleze cadrele didactice fruntașe, să propună Ministerului Învățămîntului evidențierea acelora ai căror elevi obțin cele mai bune rezultate la examenele de admitere, la olimpiade, în colaborarea la G.M.F. seria B, ca și a acelora care publică lucrări de metodică.

S.S.M.F. va trebui să acorde o atenție susținută pregătirii viitorilor profesori de matematică și de fizică din învățămîntul mediu, creșterii interesului lor pentru această profesiune, atragerii tinerilor profesori în activitățile S.S.M.F.

Filialele S.S.M.F. din centrele mai mari vor organiza cercuri active și interesante de elevi pe oraș, și vor sprijini realizarea schimbului de experiență între cercurile din școli.

Olimpiadele de matematică și fizică trebuie continuate pentru a stimula învățămîntul de specialitate în clasele V—XI, pentru a atrage tineretul mai larg și mai adînc spre însușirea acestor discipline, spre profesiuni legate de tehnică, de științele naturii.

Elevii vor fi solicitați în activitățile S.S.M.F. și ca cititori ai G.M.F., ca rezolvitori și propunători de probleme, ca autori de note și corespondenți. Se va îmbunătăți această activitate a S.S.M.F. în școlile cu limbă de predare maghiară.

Pentru îmbunătățirea activității *publicațiilor* S.S.M.F., Consiliul va discuta anual (septembrie, octombrie) planul tematic al anului următor și va lua măsuri ca aceasta să fie realizat. În fiecare an se va analiza activitatea fiecărei redacții cu sprijinul unui activ mai larg de profesori și de oameni de știință.

Revista în limba maghiară va apare cu începere din ianuarie 1957, cu un sumar și o redacție independente de cele ale G.M.F.-B, sub îndrumarea comitetului filialei S.S.M.F. din Cluj. Se va asigura o permanentă colaborare, schimb de materiale și păreri între cele două redacții pentru îmbunătățirea reciprocă a muncii lor.

Se va stimula întărirea legăturii redacțiilor cu cititorii, organizînd discuții publice în unele centre, consultări în scris, sondaje în unele școli etc.

Se vor lua măsurile cuvenite ca pînă în 1960 să poată apare în Editura Tehnică, volumul 50 al Bibliotecii S.S.M.F., ca o serie de lucrări de metodică și lucrări ce se adresează în special tineretului să apară în Editura Didactică și Pedagogică, respectiv în Editura Tineretului.

În sectorul de *documentare*, S.S.M.F. va urmări lărgirea informării publicului romîn asupra vieții științifice din lumea întreagă și a publicului străin asupra vieții științifice din R.P.R.

Se va urmări înzestrarea în mai largă măsură a bibliotecilor filialelor cu cărți și reviste, păstrarea și folosirea lor în mai bune condițiuni.

Activitatea *organizatorică* a S.S.M.F. va urmări asigurarea periodicității activității organelor de conducere: conferința pe țară, odată la doi ani, ședințele consiliului S.S.M.F. cel puțin anual, ședințele Biroului consiliului S.S.M.F. și ale comitetelor filialelor lunar, pentru a analiza problemele centrale ale muncii și a lua hotărîri.

Ar fi util ca delegații ale S.S.M.F să facă schimburi de experiență cu organizațiile similare din U.R.S.S., din țări de democrație populară și din alte țări, în problemele muncii științifice, de învățămînt, ale publicațiilor etc.

Se va acorda o atenție mai susținută activizării comitetelor filialelor, reorganizării celor ce nu depun o muncă rodnică, limitării rețelei subfilialelor la centrele în care există condiții de activitate proprie. De asemenea, va continua organizarea de schimburi de experiență între reprezentanți ai filialelor. Biroul Consiliului S.S.M.F. va analiza anual munca unora dintre filialele și subfilialele Societății.

Se va urmări degrevarea activiștilor S.S.M.F. de sarcini extrașcolare împovărătoare și atragerea de noi cadre din mijlocul profesorilor de învățămînt mediu al inginerilor, al studenților.

Se va asigura o legătură periodică organizată a Consiliului S.S.M.F. cu Ministerul Învățămîntului, C.C. al S.M.I., U.T.M. și a filialelor cu organele respective locale.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1602

Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3}}=1$$

oricare ar fi a.

* * *

Soluție și generalizare dată de **Paul R. Popescu,** student București. Fie E partea întîia a egalității. Ridicînd la cub avem:

$$E^3=a+\sqrt{a^2-\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3}+3E\sqrt[3]{\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3}+a-\sqrt{a^2-\left(\frac{1-2a}{3}\right)^3},$$

de unde

$$E^3=2a+E(1-2a) \quad \text{sau} \quad E^3-E+2a(E-1)=0$$

și

$$(E-1)(E^2+E+2a)=0 \quad ; \quad \text{iar } E=1.$$

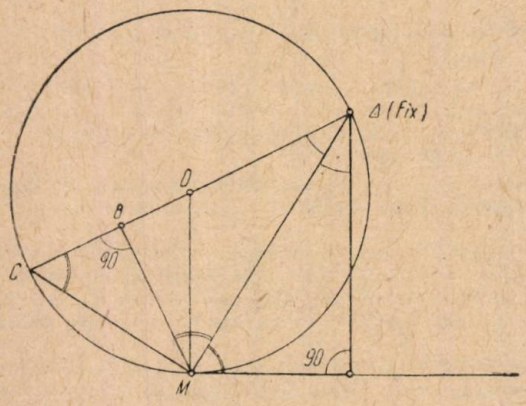
Observare. Cînd $a=2$ obținem

$$E=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1, \text{ problema 1602.}$$

Problema 1789

Fie un cerc O și pe el un punct fix A. Să se găsească pe cercul O punctul M, astfel ca N fiind proiecția lui A pe tangentă la cercul O să avem produsul SN.NM maxim, apoi ca suma AN + NM să fie maximă.

Soluție dată de **V. Hulubei,** Craiova. Avem de aflat maximul funcției $y=AN\cdot MN$. Coborîm o perpendiculară din punctul M pe diametrul ce trece prin punctul A (fix). Triunghiurile AMN și AMB fiind egale, $AN=AB$ și $NM=BM$, deci $y=AN\cdot MN=AB\cdot MB$. Dar $MB^3=AB\cdot BC$, deci,



$$y=AB\sqrt{AB\cdot BC}.$$

Maximul lui y are loc în același timp cu maximul lui y^2, deci vom căuta maximul lui $y^2=AB^3\cdot BC$. Dar $AB+BC=AC$ (constant); deci maximul are lor atunci cînd $AB=3\,BC$. (Maxime și minime geometrice de Ion Ionescu, p. 69).

Punctul M se află deci la intersecția cu cercul O a perpendicularei ridicată în B pe AC, mijlocul lui OC (B). Avem de aflat maximul funcției

$$y=AN+NM \quad \text{sau} \quad y=AO+OB+BM;$$

dar AO este constant, deci trebuie să aflăm maximul funcției $y=OB+BM$.

Dar maximul lui y are loc în același timp cu cel al lui y^2, deci studiem maximul:

$$y^2=OB^2+BM^2+2OB\cdot BM=OM^2+2OB\cdot BM;$$

dar OM este constant, deci avem de studiat maximul funcției $y=OB\cdot BM$.

Deoarece $ON^2 + BM^2 = R^2$ (constant), produsul $OB \cdot BM$ este maxim cînd $OB = BM$, deci triunghiul OBM este dreptunghic isoscel. Avem atunci $\sphericalangle BOM = 45°$.

Punctul M se află deci în acest caz, la intersecţia cu cercul O a razei OM care face un unghi de 45° cu diametrul AC, fix.

Problema 2201

Într-un vas închis şi izolat termic, în care se află doi atomi gram de heliu la temperatura de 500°C se introduc 8 g de ghiaţă la temperatura de 0°C. Să se determine temperatura amestecului.

D. Grosu, Iaşi

Soluţie. — Se ştie că întotdeauna căldura cedată de corpul mai cald este egală cu căldura de topire plus căldura necesară ridicării temperaturii pînă la temperatura finală a corpului rece. Avem:

$$MC\,(T - \theta) = ml + mc\,(\theta - 0°), \text{ unde:}$$

$M = 2$ atomi gr. He $= 8$ g, $T = 500$ C, $m = 8$ g ghiaţă, $l = 80$ cal/g. grad, $c = 0{,}5$ cal/g. grad, $C = 1{,}25$ cal/g. grad.

Deci, 8. $1{,}25(500 - \theta) = 8.80 + 8.0{,}5\,(\theta - 0)$ sau $625 - 1{,}25\,\theta = 80 + 0{,}5\,\theta$ şi $1{,}75\,\theta = 545$; $\theta = 311$°C.

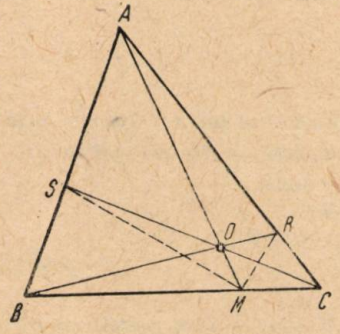
Problema 2203

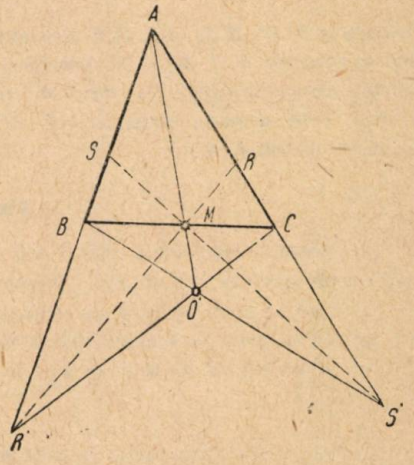
Într-un triunghi oarecare ABC luăm un punct oarecare M pe latura BC. Bisectoarea unghiului AMC taie latura AC în R, iar bisectoarea unghiului AMB taie latura AB în S. Să se arate că dreptele AM, BR şi CS sînt concurente.

* * *

Soluţie — Teorema bisectoarei interioare aplicată în triunghiurile AMC şi AMB ne dă:

(1) $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AR}{RC}$ şi (2) $\dfrac{AN}{MB} = \dfrac{AS}{SB}$.





Aplicăm teorema lui *Ceva*:

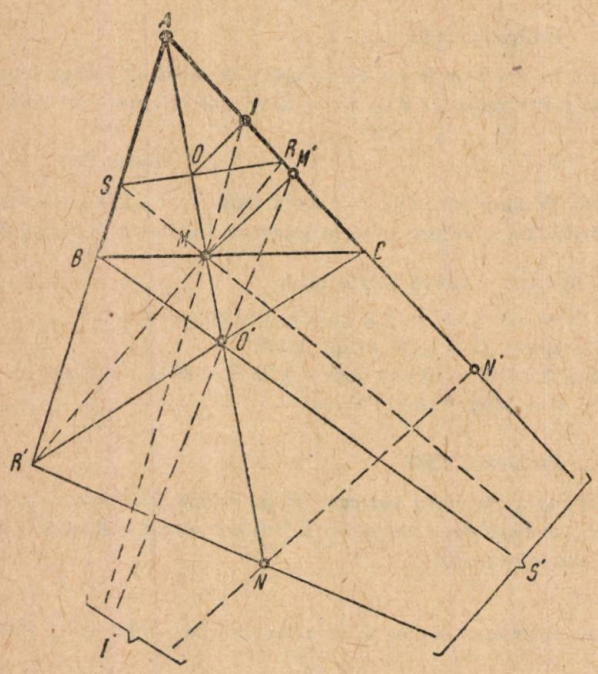
$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{SA}{SB} = 1,$$

ceea ce se verifică conform relaţiilor (1) şi (2):

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{MC}{AM} \cdot \frac{MB}{MC} = 1.$$

Observare. — 1° Bisectoarele exterioare ale unghiurilor AMC și AMB taie prelungirile laturilor AC și AB respectiv în S' și R'. Se poate arăta că AM, BS' și CR' sînt concurente.

Teorema bisectoarei exterioare într-un triunghi ne dă relațiile:



$$(1) \qquad \frac{AM}{MC} = \frac{S'A}{S'C}$$

și

$$(2) \qquad \frac{AM}{MB} = \frac{R'A}{R'B}.$$

Teorema lui Ceva aplicată dreptelor concurente considerate dă:

$$\frac{R'B}{R'A} \cdot \frac{S'A}{S'C} \cdot \frac{MC}{MB} = 1,$$

care devine

$$\frac{MB}{AM} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{MC}{MB} = 1.$$

2° Fie O intersecția dreptelor AM și SR. Notăm cu I proiecția lui O pe AC, cu M' proiecția lui M pe AC și cu N' proiecția lui N pe AC. Se poate arăta că dreptele MI, $O'M'$ și NN' sînt concurente.

În patrulaterele complete $ABO'CR'S$ și $ASMM'R'S'$ punctele A,M,O', N și A,O,M,N formează două diviziuni armonice. Conform teoremei lui Thales, punctele A, I, M' și N' vor forma și ele o diviziune armonică. Dreptele care unesc punctele corespunzătoare a două diviziuni armonice care au un punct comun, sînt concurente. Prin urmare, dreptele IM, $M'O'$ și NN' sînt concurente, punctul comun fiind considerat punctul A.

Problema 2215

Se consideră un cerc, o coardă AB în acest cerc, mijlocul C al lui AB. Se duc prin C două coarde oarecare MN și PQ. Dreapta MP taie AB în S, dreapta NQ taie AB în T.

a) *Cum se poate construi cu rigla polara lui C față de cerc?*

b) *Să se arate că această polară este paralelă cu AB.*

c) *Să se deducă de aici că C este mijlocul segmentului ST.*

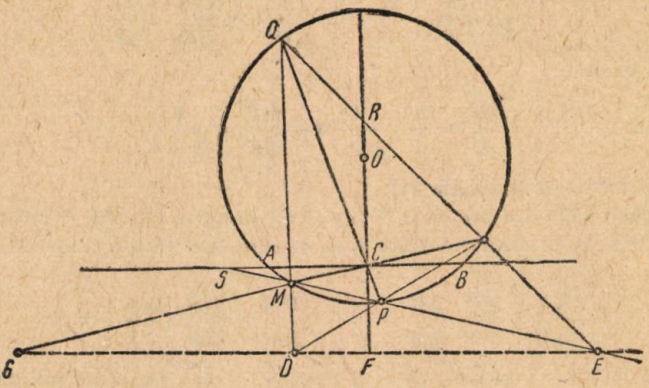
* * *

Soluție. — *a)* Construcția polarei punctului C față de cerc se face astfel: construim două secante oarecare (în cazul nostru folosim coardele MN și PQ) care trec prin punctul C. Dacă avem $D = (MQ; PN)$ și $E = (MP; NQ)$, atunci dreapta DE este polara punctului C față de cerc. Să arătăm acest lucru.

Dreapta DE fiind diagonală a patrulaterului complet $DAQNEP$, determină împreună cu diagonala MN o diviziune armonică pe QP. Punctul F este, prin urmare, conjugatul armonic al lui C față de Q și P. La fel se arată că și G este conjugatul armonic al punctului C față de M și N.

Dreapta GF se confundă însă cu dreapta DE. Deci DE este polara punctului C față de cercul O.

b) Deoarece C este mijlocul coardei AB, rezultă că $AB \perp OC$. De asemenea se știe că polara unui punct față de cerc este perpendiculară pe diametrul cercului ce trece prin acel punct. DE fiind perpendiculară pe DC este evident că AB și DE sînt paralele.



c) Din asemănarea triunghiurilor SCP și PFE pe de o parte, și a triunghiurilor RCT și RFE pe de altă parte, avem:

$$(1)\qquad \frac{SC}{FE} = \frac{PC}{PF}; \qquad (2)\ \frac{CT}{FE} = \frac{CR}{QF}.$$

Deoarece punctele Q, C, P, F formează o diviziune armonică avem:

$$\frac{CQ}{CP} = \frac{FQ}{FP} \text{ sau } \frac{CQ}{FQ} = \frac{PC}{PF}.$$

Rezultă că:

$$\frac{SC}{FE} = \frac{CT}{FE}, \text{ deci } SC = CT.$$

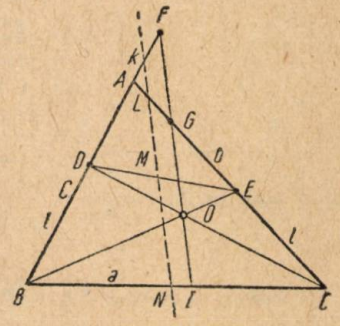
Problema 2218

Se consideră un triunghi ABC; pe laturile lui se iau în același sens, lungimile egale BD și CE; pe latura AB începînd din B spre A se așează $BF = AC$, iar pe AC la fel, $CG = AB$.

a) *Să se arate că FG trece prin intersecțiile dreptelor BE și CD.*

b) *Să se arate că mijloacele segmentelor AF, AG, DE și CB sînt colineare.*

* * *



Soluție dată de **Emanoil Alex.** București. — a) Notăm $BD = CE = l$. Aplicăm teorema lui *Menelaus* transversalei FO în triunghiul AEB:

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{OB}{OE} \cdot \frac{GE}{GA} = 1$$

sau

$$\frac{OB}{OE} = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{GA}{GE},$$

adică, exprimînd, avem:

$$(1)\qquad \frac{OB}{OE}=\frac{b}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-l}\ \text{sau}\ \frac{OB}{OE}=\frac{b}{c-l}.$$

Să arătăm că DC trece prin O. Pentru aceasta trebuie să avem:

$$\frac{CE}{CA}\cdot\frac{DA}{DB}\cdot\frac{OB}{OE}=1;\quad \frac{OB}{OE}=\frac{CA}{CE}\cdot\frac{DB}{DA}$$

sau exprimînd, avem:

$$\frac{OB}{OE}=\frac{b}{l}\cdot\frac{l}{c-l}\ \text{sau}\ \frac{OB}{OE}=\frac{b}{c-l},$$

ceea ce este confirmat prin relația (1).

Deci, dreapta DC trece prin O și în concluzie, dreptele FG, BE și CD sînt concurente.

b) Să arătăm că dreapta KL trece prin M care este mijlocul lui DE. Avem în cazul acesta:

$$\frac{KA}{AD}\cdot\frac{MD}{NE}\cdot\frac{LE}{LA}=1;\qquad \frac{MD}{ME}=\frac{KD}{KA}\cdot\frac{LA}{LE}=1.$$

Se observă că $AF=b-c$ și $AG=b-c$, deci $AF=AG$. Deoarece punctele K *și* L sînt mijloacele segmentelor AF și AG, mai rămîne de arătat că: $LE=KD$, ceea ce se confirmă dacă le exprimăm în funcție de laturi și segmentul l. Avem:

$$LE=b-l-\frac{b-c}{2};\ KD=b-l-\frac{b-c}{2}.$$

În mod analog se poate arăta că dreapta KL trece prin mijlocul lui BC; avem în acest caz:

$$\frac{KA}{KB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{LC}{LA}=1.$$

Avem pe rînd:

$$NB=NC;\quad KA=LA=\frac{AF}{2}=\frac{AG}{2};\ LC=KB=b+\frac{AF}{2}=b+\frac{AG}{2}.$$

Deci, punctele M,N,K,L sînt colineare.

Problema 2228

Dacă:

$$E_1=\frac{(1+\sqrt{1-x^m})^n+(1+\sqrt{1-x^n})^m}{(1-\sqrt{1-x^m})^n+(1-\sqrt{1-x^n})^m},$$

$$E_2=\frac{(1+\sqrt{1-x^m})^n-(1+\sqrt{1-x^n})^m}{(1-\sqrt{1-x^m})^n-(1-\sqrt{1-x^n})^m},$$

să se arate că $E_1+E_2=0$.

Ion I. Cristea, student București

Soluție. — Notînd $\sqrt{1-x^m}=y$ și $\sqrt{1-x^n}=z$, avem:

$$E_1+E_2=\frac{(1+y)^n+(1+z)^m}{(1-y)^n+(1-z)^m}+\frac{(1+y)^n-(1+z)^m}{(1-y)^n-(1-z)^m}=\frac{2(1-y^2)-2(1-z^2)^m}{(1-y)^{2n}-(1-z)^{2m}}.$$

Deci înlocuind:

$$E_1 + E_2 = \frac{2\left[1-(1-x^m)\right]^n - 2\left[1-(1-x^n)\right]^m}{\left(1-\sqrt{1-x^m}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{1-x^n}\right)^m} \text{ sau}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{2x^{mn} - 2x^{nm}}{\left(1-\sqrt{1-x^m}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{1-x^n}\right)^{2m}} = 0.$$

Problema 2221

Într-un cerc, prin mijlocul C al unei coarde AB, se duc coardele MN și PQ. Fie D și E intersecțiile dreptei AB cu dreptele PN și MQ. Să se demonstreze că segmentele DC și CE sînt egale.

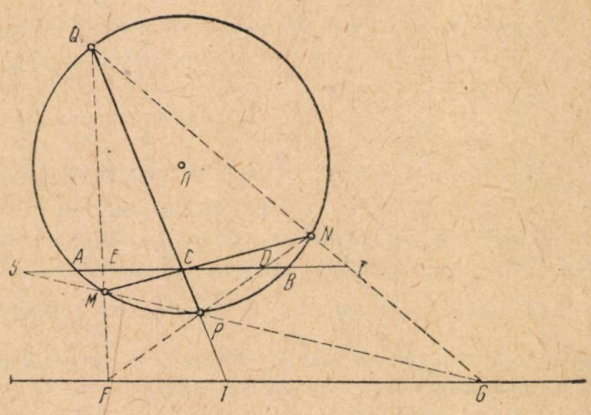
* * *

Soluție. — În patrulaterul complet $FMQNGP$ diagonalele FG și MN determină pe dreapta QP o diviziune armonică. Avem:

(1) $$\frac{CQ}{CP} = \frac{IQ}{IP} = 1$$

sau

$$\frac{CQ}{IQ} = \frac{CP}{IP}.$$



Din asemănarea triunghiurilor QEC și QFI și a triunghiurilor CDP și FIP, avem:

$$\frac{CE}{FI} = \frac{QC}{QI} \text{ și } \frac{CD}{FI} = \frac{CP}{IP}.$$

Conform relației (1) avem:

$$\frac{CE}{FI} = \frac{CD}{FI}$$

și implicit:

$$CD = CE.$$

Observare. — Se observă că problema 2221 este o extindere a punctului c) de la problema 2215.

Pe lîngă segmentele arătate mai sus este evident că vor fi egale și segmentele $AE = DB$ și $AS = DT$.

Problema 2231

Un corp este aruncat de jos în sus, cu viteza de 85 m/s. *După* 12 *secunde este aruncat după el, un alt corp. Care trebuie să fie viteza inițială a acestuia din urmă, pentru ca cele două corpuri să se întîlnească cînd cel de-al doilea se află la înălțimea maximă?*

Cercul de fizică din Capitală

Soluție. — Pentru simplificarea calculelor vom lua $g = 10$ m/s². Să alegem originea spațiilor în punctul de aruncare, sensul pozitiv îndreptat de jos în sus, originea timpurilor în momentul aruncării primului corp. Accelerația fiind îndreptată de sus în jos, este negativă.

Ecuația mișcării primului corp este:

(1) $$s_1 = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2. \qquad (v_1 = 85)$$

Fie v_2 viteza inițială, necunoscută, a celui de-al doilea corp. Acest corp nu pleacă în momentul $t = 0$, ci în momentul $t = t_0$, $(t_0 = 12)$.
Ecuația mișcării sale este deci:

$$s_2 = v_2 (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2. \qquad (t_0 = 12) \tag{2}$$

Ecuația vitezei celui de-al doilea corp este:

$$v = v_2 - g(t - t_0).$$

Corpurile se întîlnesc cînd al doilea corp se află la înălțimea maximă, adică atunci cînd viteza sa este nulă; deci, dacă $v = 0$, $s_1 = s_2$:

$$v_2 - g(t - t_0) = 0, \tag{3}$$

$$s_1 = s_2. \tag{4}$$

Relațiile (1) — (4) constituie un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute, anume t, s_1, s_2 și v_2. Eliminînd s_1, s_2 și v_2, obținem ecuația în t:

$$v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \ (t - t_0)^2.$$

Luînd: $v_1 = 85$, $g = 10$, $t_0 = 12$, și dezvoltînd, găsim:

$$2t^2 - 41\, t + 144 = 0,$$

de unde

$$t = 16 \quad \text{și} \quad t = \frac{9}{2}.$$

1° *Cazul* $t = 16$ s. — Înlocuind în celelalte ecuații găsim:

$$v_2 = 40 \text{ m/s}, \quad s_1 = s_2 = 80 \text{ m}.$$

Corpul trebuie aruncat cu o viteză inițială de 40 m/s; cele două corpuri se vor întîlni la 4 secunde după aruncarea celui de-al doilea, la înălțimea de 80 m.

2° *Cazul* $t = \frac{9}{2} = 4{,}5$ s. — Valoarea lui t fiind mai mică decît 12, corpurile se întîlnesc înainte de aruncarea celui de-al doilea, ceea ce nu are sens. Rezultatul obținut poate fi însă interpretat ca soluția următoarei probleme:

Un corp care se mișcă pe verticală, trece prin fața unui observator care constată că viteza corpului este 85 m/s, de jos în sus. După 12 secunde prin fața aceluiași observator trece un al doilea corp. Știind că cele două corpuri se întîlnesc cînd cele de-al doilea se află la înălțimea maximă, să se spună care este viteza cu care al doilea corp trece prin față observatorului.

Pentru această formulare a problemei, luînd $t = 4{,}5$ s, obținem $v_2 = -75$ m/s, $s_1 = s_2 = 281{,}25$ m.

Problema 2239

Să se construiască un triunghi cunoscînd a) lungimea unei laturi și lungimile a două din laturile triunghiului ortic; b) lungimile a două laturi și lungimea uneia din laturile triunghiului ortic.

Gh. Buicliu

Soluție. — Fie $a, b, c, A, B, C, 2R$ lungimile laturilor, valorile unghiurilor și diametrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar $a', b', c', A', B', C', 2R'$ elementele corespunzătoare ale triunghiului ortic. Deoarece $A' = \pi - 2A$ etc și $2R' = \frac{1}{2} 2R$ rezultă, din relațiile fundamentale între elementele unui triunghi:

$$a = \frac{a'}{\cos A}, \quad b = \frac{b'}{\cos B}, \quad c = \frac{c'}{\cos C}. \tag{1}$$

Cu aceste elemente se trece la rezolvarea problemei.

a) Avem trei cazuri:

α) Se cunosc a, a', b. Din prima relație din (1) se deduce cos A, deci A, și atunci se construește triunghiul $A'B'C'$ în care se cunosc unghiul A' și laturile a', b'.

β) Se cunosc a, a', c'. Ca la α): se cunosc a', c' și A'.

γ) Se cunosc a, b', c'. Avem sistemul de ecuații:

$$a' = b' \cos C' + c' \cos B',$$

$$b'^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c' \cos B',$$

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos [n - (B' + C')],$$

din care se scot a', B' și C' și triunghiul $A'B'C'$ este perfect determinat.

b) Ca la α), schimbînd literele cu accent cu cele fără accent între ele. Se vede că cazul γ) conduce la rezolvarea de triunghi și apoi la construcție.

PROBLEME PROPUSE [1])

2539. — O mașină are de parcurs 290 km. Mașina funcționează în bune condiții pe o distanță de 60 km. După ce a parcurs 60 km motorul se defectează ușor și din această cauză mașina își micșorează viteza cu 20 km/oră, ajungînd după încă 80 km într-o localitate.

Mașina pornește mai departe la drum, dar cu 10 km/oră mai încet decît la prima pornire. Ea ajunge la destinație după un timp egal cu acela de la început pînă cînd a ajuns în localitatea unde a făcut reparația. Să se calculeze vitezele cu care a mers mașina și timpul de la pornire pînă la destinație.

Simon St. Petre, Tg. Mureș

2540. — Se dă un triunghi oarecare ABC. Se prelungește latura AB cu o lungime oarecare BD. Deasemenea se prelungește de la C spre A latura CA cu o lungime $AE = BD = x$. Să se demonstreze că perpendiculara dusă din mijlocul laturii AB pe bisectoarea unghiului A trece prin mijlocul segmentului DE. Să se exprime lungimea ED în funcție de laturile triunghiului ABC și de lungimea BD.

C. Ionescu-Țiu

3541. — Se consideră cercurile de centru O, unul înscris și celălalt circumscris pătratului $ABCD$, și un punct M situat în coroana formată de aceste cercuri. Perpendiculara ridicată în M pe OM intersectează cercul circumscris în punctele T_2 și T'_2, iar tangentele în aceste puncte se intersectează în M'. Coarda ce unește punctele de tangentă T_1 și T'_1 ale tangentelor duse din M la cercul înscris intersectează pe OM în punctul M''.

1. Să se arate că $OM' = 2OM''$.
2. Să se studieze și cazurile cînd M este situat în interiorul sau exteriorul cercurilor O.

Theodor Gh. Cocea

2542. — Un kilogram de cărbune de Petroșani eliberează prin combustie (ardere) 4000 kcal. Admițînd că 20 % din această căldură poate fi transformată în energie electrică, să se calculeze: cîte ore se va putea alimenta cu această energie o lampă electrică de buzunar care consumă 6 wați.

(La Inst. Politehnic, Iași)

---

[1]) Clasa VIII: (2539, 2545, 2549, 2552, 2555, 2560, 2561, 2567, 2568, 2569, 2578, 2579, 2580). La problemele 2539—2582 se primesc soluții pînă la 30 iulie 1957.

2543. — Un balon de sticlă închis ermetic, conține aer saturat la 20° C, presiunea interioară fiind 750 mm. Se întreabă:

a) Care este densitatea acestui aer?

b) Care va fi presiunea interioară dacă balonul se răcește la 10°?

În ambele cazuri se va considera că vaporii de apă se comportă ca un gaz perfect. Se dau tensiunile de vapori ale apei: la 20° ... 17,54 mm; la 10° ... 9,21 mm.

(Cercul de fizică din Capitală)

2544. — *a)* Se consideră un condensator plan ale cărui armături au o suprafață de 1 m^2 și sînt separate printr-un strat de aer de 5 mm. Să se calculeze sarcina și energia acestui condensator cînd se stabilește între armăturile sale o diferență de potențial de 3500 volți.

b) După încărcarea condensatorului se suprimă legăturile cu sursa de încărcare și apoi se leagă fiecare armătură a acestui condensator cu una din armăturile unui al doilea condensator identic cu primul, însă aflat în stare neutră (grupare în paralel). Să se calculeze energia ansamblului de condensatoare și să se compare rezultatul obținut cu energia condensatorului inițial. Cum se aplică în cazul de față principiul conservării energiei?

(Cercul de fizică din capitală)

2545. — Se dă cercul O și diametrii AOB și COD perpendiculari între ei. În planul acestui cerc se mișcă cercul O_1 de rază variabilă, astfel încît punctele A, B, C, D rămîn exterioare lui. Din aceste puncte se duc tangentele la cercul O_1.

1. Să se constate că aceste tangente limitate la punctele lor de contact sînt tot timpul laturile unui patrulater inscriptibil;

2. Să se considere și cazul cînd cercul O_1 trece tot timpul prin D, punctele A, B și C rămînînd exterioare lui.

Stelian Gh. Mărculescu, Orașul Stalin

2546. — Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu x_a, x_b, x_c distanțele dintre picioarele înălțimilor și proiecțiile unui punct situat pe dreapta lui Euler duse respectiv pe laturile a, b, c. Știind că $a>b>c$, să se arate că:

$$ax_a + cx_c = bx_b.$$

Paul Popescu, elev București

2547. — În triunghiul oarecare ABC ($a>b>c$), fie punctul k punctul lui Lemoyne, iar MNP triunghiul podar al acestui punct. Să se arate că volumul obținut prin rotirea triunghiului MNP în jurul laturii a este maxim. (Se poate consulta I. Ionescu «Maxime și minime geometrice»).

Radu Stroe, student București

2548. — Se dă triunghiul oarecare ABC și un punct D pe BC. Pe AD se consideră trei puncte oarecare M, N și L. Fie $B_1 = (AC; BM)$, $C_1 = (AB; CM)$; $B_2 = (AC; BN)$, $C_2 = (AB; CN)$, $B_3 = (AC, BL)$ și $C_3 = (AB; CL)$.

a) Să se demonstreze că dreptele B_1C_1, B_2C_2 și B_3C_3 și precum și cele construite în mod analog trec printr-un punct fix.

b) În cazul cînd AD este bisectoarea interioară a unghiului A, să se arate că punctul fix este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A și reciproc.

Alex. Emanoil, student București

2549. — Se lasă să cadă un corp de la o înălțime de 9,8 m. În același moment se aruncă pe aceiași verticală un alt corp, de la pămînt în sus. Cu ce viteză inițială trebuie aruncat acest corp din urmă, pentru ca el să întîlnească pe primul la egală distanță de pozițiile inițiale?

(Institutul de construcții secția f. frecv. București)

2550. — Un curent de 2,4 A se împarte prin trei rezistențe montate în paralel: $R_1 = 2$ ohmi; $R_2 = 3$ ohmi și $R_3 = 6$ ohmi. Să se calculeze intensitatea curentului din fiecare derivație, tensiunea de la nodurile derivațiilor și puterea consumată în fiecare derivație.

(Institutul de construcții secția f. frecv. București)

2551. — Un circuit este alcătuit din 9 conductori, ale cărui diagonale pleacă din același vîrf. Rezistența fiecărui conductor este de 11 ohmi. Care este rezistența totală a întregului circuit dintre A și B?

(Institutul de construcții, București)

2552. — Un corp cu densitatea de 0,5 g/cm³ este scufundat în apă la o adîncime de 19,6 m. Lăsat liber el se ridică la suprafață. În cît timp ajunge el la suprafață?

(Institutul de construcții, București)

2553. — Să se construiască graficul funcției $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, Ordjonikidze)

2554. — Trinomul patratic $ax^2 + bx + c$ ia pentru $x = 1; 2; 3$; respectiv valorile 0; 1 și 4. Să se demonstreze că pentru $x = n$ valoarea lui este egală cu $(n-1)$.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 9, Ordjonikidze)

2555. — Fie ABC un triunghi în care $A = 60°$ și fie AM bisectoarea unghiului A. Cercul ce trece prin M și B și este tangent cercului circumscris triunghiului ABC taie AM în N. Să se demonstreze că BN și AC sînt perpendiculare.

Eugen Onofraș, Huși

2556. — Să se arate că într-un triunghi oarecare semiperimetrul triunghiului este mai mare decît perimetrul triunghiului său ortic.

* * *

2557. — Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \cos x \cdot \cos x + \cos^2 x \cdot \cos 2x + \cos^3 x \cdot \cos 3x + \ldots + \cos^n x \cdot \cos nx,$$

$$S_1 = \cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \cos^3 x \sin 3x + \ldots + \cos^n x. \sin nx.$$

* * *

2558. — Intersecțiile laturilor unui triunghi oarecare cu laturile triunghiului ortic sînt colineare.

* * *

2559. — Să se arate că:

$$\frac{n^4}{(n^2 + n^4)^2} + \frac{(n^2 + 2\cdot1)(n^2 - 3\cdot2\cdot1) - 2\cdot1}{[n^2 + (n^2 + 2\cdot1)^2]^2} + \frac{(n^2 + 3\cdot2)\ (n^2 - 3\cdot3\cdot2) - 3\cdot2}{[n^2 + (n^2 + 3\cdot2)^2]^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{[n^2 + n(n-1)][n^2 - 3n(n-1)] - n(n-1)}{\{n^2 + [n^2 + n(n-1)]^2\}^2} = \frac{1}{4n^3},$$

unde n este număr întreg. (A se vedea și nota matematică nr. 4 din G.M.F.B, febr. 1957)

Fl. Nedelcu, inginer

2560. — Într-un cerc sînt date două raze. Să se traseze o coardă astfel încît ea să fie împărțită de aceste raze în 3 părți egale.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2561. — Un număr de n cărămizi se pun una peste alta cu un decalaj egal în același sens. Cît trebuie să fie acest decalaj pentru ca coloana astfel construită să nu cadă și totodată, să aibă cea mai mare lungime?

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2562. — Un participant la olimpiada de matematică a predat lucrarea de concurs între orele 12 și 13. Cît timp i-a trebuit pentru rezolvarea problemei, dacă olimpiada a început între orele 10 și 11, iar acele ceasornicului și-au schimbat în acest timp, locurile lor.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 9, Ordjonikidze)

2563. — Să se demonstreze că distanța minimă între două drepte este egală cu distanța uneia dintre ele pe planul perpendicular respectiv, pînă la proiecția celeilalte drepte pe acest plan.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 9, Ordjonikidze)

2564. — Să se demonstreze prin metoda inducției matematice, următoarea egalitate:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2565. — Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$ în care $q > 0$. Să se scrie ecuația de gradul doi pentru care o rădăcină să fie medie aritmetică, iar cealaltă medie geometrică a valorilor reciproce ale rădăcinilor ecuației date.

(Olimpiada matematică, etapa I, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2566. — La ce frecvență un condensator de capacitate 9000 cm are o reactanță capacitivă de 160 ohmi. Dielectricul condensatorului este aerul.

Tiberiu V. Colibaba, student București

CHESTIUNI DE EXAMEN

2567. — Să se simplifice fracția:

$$\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x + 2}.$$

(La admiterea în Inst. c. f. r., 1956)

2568. — Doi motocicliști pleacă în același moment, unul din București spre Sinaia, altul de la Sinaia spre București. Ei se întîlnesc prima dată la 45 km de Sinaia, apoi continuîndu-și drumul, ajung la Sinaia, respectiv la București, și se întorc fără oprire, întîlnindu-se a doua oară la 15 km de București. Știind că a doua întîlnire a avut loc 3 ore după prima, se cere să se calculeze iuțelile cu care au mers cei doi motocicliști, precum și distanța București-Sinaia.

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2569. — Se dă ecuația:

$$x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$$

în care m este un parametru real. Se cere:

a) Să se determine valorile lui m pentru care o rădăcină a ecuației este cuprinsă între zero și cinci, iar a doua rădăcină este mai mare decît 5;

b) să se determine valorile lui m pentru care avem următoarea relaţie între rădăcinile ecuaţiei:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2 = 2(x_1 x_2 + 1).$$

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2570. — Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{cotg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x} + \frac{\sin^2 x \sec x}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x} = \frac{1 + \sin 2x}{\sqrt{2}\cos(x - 45°)}.$$

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2571. — Să se găsească suma numerelor

$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots11}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

(Olimpiada matematică, etapa I, cl. 9, Ordjonikidze)

2572. — Să se calculeze fără tabele, $\log 2$ şi $\log 5$ ştiind că

$$\log 2 \cdot \log 5 = 0{,}214.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 9, Ordjonikidze)

2573. — Să se găsească valoarea maximă şi să se construiască graficul funcţiei

$$y = \frac{6}{x^2 + x + 1}.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, cl. 9, Ordjonikidze)

2574. — Câţi termeni identici există în următoarele două progresii aritmetrice: 2, 7, 12, 17,... şi 2, 5, 8, 11, ... dacă fiecare din ele constă din 121 termeni?

(Olimpiada matematică, 1956, Lwow, cl. 10)

2575. — Să se demonstreze că:

$$\sin + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{a}}.$$

(Olimpiada matematică, 1956, Lwow, cl. 10)

3576. — Să se rezolve ecuaţia:

$$4^x - 13 \cdot 6^{x-1} + 9 = 0.$$

(Olimpiada matematică, 1956, Lwow, cl. 10)

2577. — Se dă un con cu raza bazei de 4 şi înălţimea 12. Să se determine dimensiunile cilindrului înscris în con dacă suprafaţa lui are valoare maximă.

(Olimpiada matematică, 1956, Lwow, cl. 10)

2578. — Latura unui triunghi, egală cu 8 dm, este de două ori mai mare decît mediana lui. Unul din unghiuri dintre mediană şi celelalte laturi ale triunghiului este de 30°. Să se găsească aria acestui triunghi.

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2579. — Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = b.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2580. — Să se construiască graficul funcției $y = \sqrt{x(x-2)+1}$.

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2581. — Înălțimea, bisectoarea și mediana trasate prin vîrful unui triunghi, împart unghiul din acest vîrf în patru părți egale. Să se demonstreze că unghiul este dreptunghic.

(Olimpiada matematică etapa I, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2582. — Doi școlari, A și B, trebuie să ajungă din Ordjonikidze în satul Balta situat la 15 km de Ordjonikidze. Ei pot merge pe jos cu o viteză de 6 km pe oră. Școlarii au o bicicletă pe care se poate merge cu o viteză de 15 km/oră. Elevul A pleacă din Ordjonikidze pe jos; iar B merge pe bicicletă pînă cînd se întîlnește cu colegul său C care vine din Balta în spre Ordjonikidze și căruia îi cedează bicicleta. Mai departe B merge pe jos, iar C merge pe bicicletă pînă se întîlnește cu A și îi cedează bicicleta, pe care acesta din urmă merge pînă la Balta. Cînd trebuie să plece C pentru ca A și B să ajungă la Balta în același timp, dacă C merge pe jos și pe bicicletă cu aceleași viteze?

(Olimpiada matematică etapa I, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI [1])

E: 935. — Două găini și o rață costă 55 lei. Două rațe și o gîscă costă 80 lei. Două gîște și o găină costă 75 lei. Cît costă fiecare în parte?

Simon Șt. Petre, Tg. Mureș

E: 936. — Să se simplifice

$$\frac{(a+b)^4 + 2(a^4+b^4)}{a^2+b^2}.$$

* * *

E: 937. — Fie un dreptunghi $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor AC și BD. Perpendiculara dusă din B pe AC taie pe AD în F, iar perpendiculara ridicată în D pe AD o taie în E. Perpendiculanta dusă din E pe AD taie pe AD în G. Să se arate că BF și OG sînt paralele.

I. Strătescu, Călărași

E: 938. — Se consideră expresiile:

$$E_1 = (a+x)(b+x)^2 + (b+x)(c+x)^2 + (c+x)(a+x)^2,$$

$$E_2 = (a+x)^2(b+x) + (b+x)^2 + (c+x)^2(a+x)$$

Să se arate că $E_1 - E_2 = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Gheorghe I. Stoian, student București

---

[1]) Clasa V: (E: 935, 940, 941, 944), VI: E: 937, 939, 943, 946), VII: (936, 938, 942, 945, 947, 948). La aceste probleme se primesc soluții pînă la 30 iulie 1957.

E: 939. — Eu aveam vîrsta sorei mici cînd sora mare avea vîrsta pe care eu o voi avea cînd sora mică va avea vîrsta mea. Sora mare avea vîrsta mea cînd sora mică avea jumătatea vîrstei pe care sora mare o avea cînd sora mică va avea vîrsta mea. Iar sora mare avea vîrsta sorei mici cînd eu aveam jumătatea vîrstei pe care sora mică o va avea peste 8 ani. Ce vîrstă avem fiecare?

Paul R. Popescu, student Bucureşti

E: 940. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\cfrac{79}{3-\cfrac{2}{5-\cfrac{4}{7+\cfrac{1}{x}}}} = 31.$$

C. I. Ţ.

E: 941. — Un părinte spune fiului său: « cînd tu vei avea vîrsta pe care o aveam eu la naşterea ta, vom avea împreună 105 ani »; iar cînd vei avea vîrsta pe care o am eu acum, vom avea împreună 120 ani ». Care este vîrsta lor?

Bogdan I. Baieră, Prof. Păuneşti

E: 942. — Să se arate că dacă avem relaţiile:

$$y = mx \quad \text{şi} \quad my + x = mc + b.$$

atunci avem şi relaţia

$$x^2 + y^2 = \frac{(cm + b)^2}{m^2 + 1}.$$

Şt. Donescu, student Bucureşti

E: 943. — Fie un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$). Perpendicularele ridicate din B şi A pe BC şi AC se taie în D, iar perpendiculara dusă din B pe DC taie pe AC în E. Să se arate că BE şi BC sînt egale.

* * *

E: 944. — Să se efectueze expresia:

$$E = \frac{0{,}6 + \frac{7}{6} - 2\frac{3}{4} : (2 + 0{,}085 : 037)}{3 : 4\frac{4}{7} - 0{,}0025 : 0{,}4875} + 1{,}875 \cdot \left(\frac{23}{18} - \frac{67}{90}\right).$$

Const. Săndulache, profesor Bacău

E: 945. — Să se arate că dacă a, b, c, d, e, f, g sînt şapte numere întregi consecutive, avem relaţia

$$\frac{(a + b)^2 - (c + d - e)^2}{f + g} = \frac{c(f - 5) + 2(g - 6)^2}{c + e + f + a}.$$

V. Grigoraş, elev Bacău

E: 946. — Trei muncitori primesc împreună pentru munca depusă, 1600 lei. Primul a lucrat 200 ore, al doilea 208 ore şi al treilea 180 ore. Ştiind că primul este plătit cu 20 bani pe oră mai mult decît al doilea, iar al treilea cu $\frac{1}{5}$ mai mult pe oră decît al doilea, să se afle ce sumă primeşte fiecare.

Mircea Ionescu, student Bucureşti

E: 947. — Un număr de două cifre întrece răsturnatul său cu 27. Suma cifrelor fiind 15 să se afle numărul.

* * *

E: 948. — Să se arate că:

$$\frac{xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)}{(ax+by)(ay+bx)} = \frac{xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2)}{(ax-by)(ay-bx)} = 1.$$

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚII

Pînă la 25 ianuarie 1957 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Mihalache Adrian (clasa 10 s.m. 3 Iași), *Panaitopol V. Laurențiu* (clasa 10 Giurgiu), *Crețu Mihai* (clasa 10 s.m. 3 Iași), *Bulucea D. Constantin* (clasa 10 R. Vîlcea), *Costinescu Anca* (clasa 10 s.m. 2 Iași), *Ianuș I. Stere* (clasa 10 s.m.1 Constanța), *Popescu Claudiu* (clasa 10 s.m. 3 Iași), *Rădulescu D. Marin* (clasa 10 Pitești), *Nicolau T. Smaranda* (clasa 9 s.m. 10 București) *Tudorache Mihai* (clasa 10 școala militară Galați), *Rădescu Eugen* (clasa 9 s.m. 1 Focșani), *Cîrnu Lucian* (clasa 7 Tîrgoviște), *Lucan Mihai* (clasa 10 s.m. 3 Iași), *Homutescu Adrian* (clasa 10 s.m. 3 Iași), *Lungu N. Liviu* (clasa 10 Ploești), *Teodorescu Nicolae* (clasa 10 s.m. 2 București), *Baltag Vasile* (clasa 10 Ploești), *Tudor M. Gheorghe* (clasa 10 s.m. 13 București), *Popescu Victor* (clasa 10 s.m. 1. «N. Bălcescu» București), *Anghel Constantin* (clasa 10 s.m. 1 Constanța), *Berdan Margareta* (clasa 10 Bacău), *Ștefănescu V. Florica* (clasa 8 Ploești), *Șerbănescu C. Florin* (clasa 10 Giurgiu), *Tudose Traian* (clasa 10 Tecuci), *Rășcanu Radu* (clasa 8 s.m. 1 «N. Bălcescu» București), *Glasberg Vladimir* (clasa 9 s.m. 12 București).

Pînă la 25 ianuarie s-au primit soluții bune la cel puțin cîte 10 probleme propuse din ultimele trei numere apărute în GMF — B, după cum urmează:

ABRUD. — Clasa 10. Ursu S. Cornel (2359, 63, 70, 71, 79, 95, 404, 05, 07—09, 11).

ADJUD (Bacău),— *Școala de 7 ani Păunești.* Clasa 7. Berbece C. Vasile (E: 852, 53, 56, 57, 65, 68, 71, 76, 84, 88), Novac Gh. Gheorghe (E: 853, 56, 72, 88, 89, 92—94, 97, 98), Panaite Adrian (E: 851, 52, 56, 57, 63, 65, 69—71, 76, 84), Pintilie Florica (E: 852, 53, 56, 57, 59, 65, 67, 71, 76, 84, 98), Vasilache Z. (2380, E: 853, 56—58, 88, 89, 92, 97, 98). *Școala de 7 ani Orbeni.* — Clasa 6. Grigoraș Didi (E: 874, 76, 77, 79, 81, 84, 87, 93, 94, 97, P).

ALEXANDRIA. — Clasa 9. Beșu Gheorghe (2348, 59, 72, 74, 92, 400, 06, 09, 10, 16). Clasa 10. Ionescu Gelu (2349, 57, 78, 92, 404—10, 14, 17), Ploeșteanu S. Ion (2316, 49, 54, 56, 57, 59, 62, 72, 78, 79, 84, 95).

ARAD. — Clasa 10 Ghilezan Doina (2357, 64, 77, 78, 92, 95, 99, 404, 05, 07, 09, 10, 11, 13), Sipoș Maria (2326, 54, 57, 60, 70—75, 78, 85, 92, 95, 402, 04—06, 08—10, 15, 16). *Școala de 7 ani nr. 1 Pîncota.* Clasa 7. Sipoș Maria (E: 866, 69, 72, 74, 76, 78—80, 83, 84, 88, 90, 94, 97, 98, P).

BACĂU. — *Școala medie nr. 1.* Clasa 8. Grill Alfred (2356, 59, 61, 80, E: 872, 75, 77, 83, 85, 89), Mîrțu Dan (E: 874—76, 78, 79, 84, 89, P), Postolache Corneliu (2349, 56, 80, 92, 404, E: 875, 85, 89, 90, 98). Clasa 9. Grigoraș Vasile (2349, 56, 57, 59, 61, 74, 80, 92, 95, 96, 404—07, 09, 10, 11, 16, P), Sîrbu Mihai (2349, 56, 60, 63, 74—77, 92, 95, 404—411), Oprea P. Leonida (2356, 60, 92, 95, 404—06, 09—11), Clasa 10. *Berdan Margareta* (2346—49, 53, 65, 57, 59, 62—64, 71, 73, 77, 78, 80, 86, 89, 92, 94, 95, 97, 99, 400, 04—10, 15), Măgdălina C. Ioan (2357, 78, 92, 404—10, 15, 17), Munteanu Emil (2357, 78, 79, 92, 95, 404—07, 09, 11, 15).

BAIA MARE. *Școala medie nr. 1.* Clasa 8. Atanasiu Moisă (2405, 08, 865, 67, 85, 86, 90, 93, 94, 97), Bota Zenoviu (E: 875, 76, 79, 80, 83—86, 88—90, 92), Prodan Dorina (E: 885, 86, 88—97). Clasa 9. Vornicescu Nicolae (2356, 57, 60, 63, 64, 80, 92, 404—06, 09, 10, 13).

BEIUȘ. — *Școala medie nr. 1.* Clasa 8. Bodeanu Corneliu (E: 863, 65, 69, 70, 72, 76, 79, 80, 83, 84, 86, 90). Clasa 10. Bodeanu Valeriu (2347, 52, 56, 57, 59, 60, 72—74, 77—80), Partenie Valeriu (2347, 49, 52, 53, 56, 59, 60, 63, 70, 72—74, 76—79), Huplea Cornel (2352, 59, 60, 72, 76, 78, 79, 83, 404—08).

BOTOȘANI (Suceava). *Școala medie nr.* 1. Clasa 9. Bădiliță M. Alex. (2349, 57, 60, 92, 94, 404—07, 09, 10), Călinescu Dumitru (2357, 59, 60, 92, 94, 404—07, 09, 10), Croci Z. (2230, 349, 59, 63, 64, 92, 404—07, 09, 10), Grosu Ion (2349, 57, 59 60, 64, 74, 80, 92, 94, 404—07, 09, 10). Clasa 10. Prăjinaru Vasile (2348, 56, 57, 59, 60, 63, 78, 79, 404, 06, 10).

BRĂILA. *Școala medie nr. 1.* Clasa 10. Gomolea Aurelia (2317, 19, 38, 49, 54, 56, 57, 79, 92, 95, 97). *Școala medie nr.* 2. Clasa 9. Danciu Viorel (2356, 57, 92, 94, 95, 404—11), Gagu R. Victor (2356, 92, 94, 95, 404, 05, 07—10), Gheorghiu C. Dan (2356, 95, 404—09, 11), Petre A. Gheorghe (2356, 63, 92, 404—11), Stroe Valentin (2356, 57, 92, 95, 404—10). Clasa 10. Ciocan N. Mihai (2353, 57, 59, 63, 64, 72, 78, 92, 95, 97, 404—11, 17), Comănici Petre (2316, 21, 40, 53, 95, 97, 405, 06, 08—10), Delighioz Chiril (2322, 28, 57, 59, 63, 64, 78, 97, 98, 404—10), Tomescu Octavian (2335, 40, 63, 78, 404—07, 09—11).

BREAZA (Cîmpina). Școala militară «D. Cantemir». Clasa 9. Roșca C. Valentin (2349, 57, 59, 404-11).

BUCUREȘTI. — *Studenți*: Anghelescu Alex. (2349, 53, 56, 57, 59, 60, 63, 72, 73, 77, 78-80, 92, 95—97, 402, 04, 10, 12, 14, 15, 17), Cochințoiu Ion (Inst. constr.) (2316, 17, 19, 37, 38, 40, 57, 59, 78, 95, 97, 406, 07, 10), Dobrescu C. Alex. (Stud. C.F.R.) (2395, 405, 07,—12, 48, 53 P. N.), Popovici I. Radu (an 2 fac. Mecanică) (2356, 57, 59, 72, 77, 79, 95), 97, 405, 09, 10, 11, 15, 33, 38) 45 — 48, 55, 56, 61 — 63), Frățiloiu C. Gheorghe (Fac. Mecanică) (2349, 56, 57, 59, 68, 71, 72, 76 — 80, 86, 94, 95, 404 — 10, 12; 14, — 18, 24, 30, 33, 46, 48 — 50, 52—59, 60—63), Boambeș Gabriel (2316, 40, 57, 59, 60, 63, 64, 66, 71, 78, 79), Drăgușin Mircea (2352, 53, 56,.57, 59, 60, 70—72, 77—79), Angheluș M. Ioan (Fac. Drumuri și Poduri) (2378-80, 92, 93, 95, 405, 07, 09, 11, 24, 33, 45, 47—49, 55, 60, 63), Grigore Aurel (2357, 59, 72, 78, 95, 404 — 07, 09 — 11).

Școala medie nr. 1. «N. Bălcescu». Clasa 8. Caciuc Adrian (2363, 409, E: 854, 56, 60, 64, 65, 71, 77, 79—81, 90, 93), Cocîrlan Paul (2357, 72, 94, 95, 404, 05, 07 — 11), Răşcanu Radu (2358, 64, 80, 92, 95, 404, 05, 06, 09, 38 55, E: 876, 77, 81, 84, 85, 88, 89, 91, — 94, 96, 97), Mareș Mihai (E: 874-81, 83, 84). Tănăsescu Gabriela (2340, 56, 59, 406, E: 825, 51, 55, 56, 69,62, 63, 65 — 68, 70—72, 74, 78—80, 85, 86, 94, 97, 98). Clasa 9. Dumitriu Dan (2349, 57, 59, 60, 63, 64, 76, 78—80, 92, 95, 404—11), Isbășescu Mihai (2293, 301, 07, 10, 22, 60, 63, 64, 72, 74), Moisa Ion 2340, 56, 63, 95, 404, 05, 07—11). Clasa 10. Velicu Vasile (2349, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 92, 404, 05, 06, 07, 09, 10). Bodea C. Mircea (2367, 70, 72, 75, 77, 84, 86, 89, 92, 95—97, 99, 400, 05—07, 09—15), Catrina Dumitru (2396, 60, 95, 407, 11, 45—48, 51, 52, 55, 56, 61, 62). Brînzan Mihai (2349, 53, 56, 57, 60, 62, 63, 78—780), Pașcanu C. (2353, 55, 59, 60, 92, 97, 99, 404, 06, 07, 10), Stănescu I. (2395, 404, 05, 07—10, 45, 46, 56, 59, 61, 62), Pătrășcoiu I. Adrian (2349, 53—57, 63 64, 67, 68, 77—80, 86, 92, 94, 95, 404—07, 10), Klecner V. Adrian (2394, 96, 97, 400, 12, 15, 17, 45, 46, 48, 52, 55, —57, 61—63), *Popescu Victor* (2321, 40, 49, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 66, 67, 72, 74, 78—80, 92, 95, 404-11, 14, 15, 17), Mihăilescu Ștefan (2356, 78, 79, 95, 448, 49, 52, 55, 57, 62, 63), Stănculescu Romulus (2392, 94—97, 99, 402, 04—07, 09—11, 13). Cipere I. Lucian (2348, 49, 56 57, 59, 70, 78—80, 84, 92, 9596, 400, 10, 11, 38, 48, 52, 57), Boldea V. Vasile (2407, 15, 41, 44—46, 48, 52, 56, 57, 61—63), Moldoveanu Călin (2444—48, 52, 55—57, 61—63).

Școala medie nr. 2. Clasa 10. *Teodorescu Nicolae* (2147, 290, 317, 21, 24, 32, 35, 36, 38, 40, 41, 44, 73, 78—80, 84, 86, 92, 94—97, 99, 401, 04, 05, 06, 09—11, 14, 15, P).

Școala medie nr. 4 «*Aurel Vlaicu*». Clasa 8. Firuță Mircea (E: 863—65, 67—69, 72, 74, 78, 79, 83, 84, 86, 88, 89, 93, 94, 97). Clasa 9. Nicolau Gh. Cornel Virgil (2364, 67, 70, 72, 74, 79, 84, 92, 95,400, 04, 12, 15, P). Clasa 10. Rădulescu Constantin (2288, 97, 99, 309, 16, 17, 22, 49, 56, 57, 59, 72, 74, 92, 95, 97, 404, 05, 07, 09, 10).

Școala medie nr. 7. «*I. L. Caragiale*». Clasa 10. Bușilă A. Ioana (2346, 49, 56, 70—80), Ciohodaru Lucia (2316, 56, 57, 72, 78, 79, 95, 404, 05, 07, 10), Marinaș M. Liliana (2356, 40, 57, 59, 60, 78, 79, 95, 404, 05 07—10, 15). Clasa VII-a. Mazilu Luminița (2359, 369, E: 885, 886, 889—98).

Școala medie nr. 8. Clasa 8. Isbășescu Mircea (2404, 05, 08, 09, E: 856, 57, 71—73, 77 83, 89, 90, 94, 98).

Școala medie nr. 10. Clasa 8. Predoiescu Marieta (2404, 08, 11, E: 872, 76, 78—80, 83, 84, 86, 88). Clasa 9. Banu Ecaterina (2356, 59, 60 75, 77, 78, 95, 404, 05, 09—12), Brînzaru C. Elena (2349, 53, 56, 57, 59, 95, 404—07, 10), Costrov Tatiana (2356, 57, 59, 60, 70, 72, 77, 78, 87, 95, 404, 05, 07, 09—11), Hoang Ze Ran (2349, 53, 56, 57, 59, 78, 92, 94, 95, 405, 06, 09, 10, 11), Iulian Maria (2335, 40, 70, 72, 77, 78, 85, 401, 05, 07, 09, 11), Marica Mariana (2356, 59, 95, 404, 05, 09, 10, 46, 56, 62), Mihăilescu Florina (2330, 39, 40, 56, 57, 72, 77, 78, 405, 07), Mititelu Zoica (2008, 223, 316, 35, 56, 57, 59, 92, 95, 405, 07, 09,10), *Nicolau T. Smaranda* (2002, 08, 11, 86, 102, 11, 20, 29, 42, 48, 62, 86, 203, 16, 42, 46, 47, 316, 35, 56, 60, 404, 05, 09, 11, 20, 24 28, 316, 20, 35, 40, 46, 56, 60, 78, 79, 92,

94, 95, 97, 402, 04, 05, 07—10), Rădulescu Livia (2339, 40, 57, 72, 77, 78, 405, 07, 09, 10), Repciuc Rodica (2326, 39, 56, 57, 61, 63, 93—95, 407), Savu Dana (2304, 56, 57, 59, 63, 70, 72, 92, 95, 404, 05, 07, 09—11, 13, 16, 50), Staroș Emilia (2335, 39, 49, 53, 57, 78, 92, 400, 05, 10,11). Haret Georgete (2335, 40, 57, 59, 60, 78, 86, 95, 407, 10), Teodoreanu Anca (2335, 54, 60, 78, 95, 404, 05, 07, 09, 10), Uță Mihaela (2309, 11, 20, 35, 39, 40, 56, 47, 60, 62, 64, 70, 72, 78, 80, 95, 401, 05—07, 09—11, 52, 55, 56, 61, 62), Veniamin Mariana (2008, 11, 23, 42, 102, 11, 20, 24, 29, 304, 20, 35, 78, 95, 405—07, 11, 58, 55).

Școala medie nr. 12. Clasa 9. *Glasberg Vladimir* (2304, 16, 17, 23, 37, 40, 47, 49, 53, 56—61, 63, 64, 68, 70, 73, 79, 80). Clasa 10. Cantuniari Șerban (2316, 17, 32, 39, 49, 54, 56, 57, 59, 61, 64, 70—72, 78—80).

Școala medie nr. 13. Clasa 8. Popescu I. Ovidiu (E: 857, 67, 64, 72, 84—86, 93, 94, 97, 98). Clasa 9. Chirică Kaurian (2395, 400, 04—11, 15). Clasa 10. *Tudor M. Gheorghe* (2290, 94, 309, 16, 19, 37—40, 45, 49, 54, 56, 57, 63, 72, 74, 78—80, 94, 95, 97, 99, 407, 10, 11, 13, 15, 16, P).

Școala medie nr. 15. Clasa 8. Enescu M. Anca (E: 865, 66, 72, 73, 75, 77, 79, 81, 84, 93, 97), Ripeanu V. Victoria (2349, 56, 85, 92, 94, E: 851, 55, 56, 86, 94, 98).

Școala medie nr. 17 «Matei Basarab». Clasa 6. Mavromatis Alexandru (E: 863—73, 75—81, 83, 84). Clasa 7. Mavromatis Euripide (E: 866—73, 78, 80, 81, 83). Olteanu S. Victor (E: 867, 69—73, 83, 85, 86, 88, 89, 91, 92, 97). Clasa 8. Crețu Nicolae (2349, 80, 404, 05, E: 871, 73, 85, 89, 94, 98), Dumitrescu T. Florina (E: 863—65, 67, 69—72, 86, 88, 93, 98), Matei Bogdan (E: 864—69, 74, 76, 77, 93, 98), Panait Nicoleta (E: 865, 67, 69, 71, 72, 86, 88, 89, 91, 93, 97). Clasa 9. Pașa Florin (2349, 53, 57—59, 61, 65, 405—07, 09, 10). Clasa 10. Biță Șerban (2356, 57, 60, 72, 78, 79, 92, 95, 97, 402, 04—07, 09—11). Elian Dinu (2354, 56, 57, 60, 78, 79, 92, 95, 97, 405, 07, 10, 11), Ionescu V. Corneliu (2316, 56, 57, 60, 72, 78, 79, 92, 95, 97, 404, 05, 07, 09—11), Pop R. Andrei (2349, 54, 56, 57, 59, 77—79, 80, 91, 92, 95, 400, 05—07, 09, 10, 14).

Școala medie nr. 18 «*M. Eminescu*». Clasa 8. Enisteanu N. Nicolae (E: 885, 86, 89, 90, 92—94, 96—98), Tănase Ștefan (E: 886, 90, 91, 93, 98). Tohăneanu Florin (E: 874, 76, 78—80, 83, 84, 86, 91, 93, 97). Clasa 10. Caloianu Vasile (2357, 59, 60, 95, 97, 404—06 08, 09), Zamfirescu A. Martin (2349, 56, 57, 60, 63, 64, 68, 72, 74, 78, 80, 92, 94, 407, P).

Școala medie nr. 20. «*Gh. Șincai*». Clasa 8. Bogdan Mircea (E: 864, 65, 69, 72, 74, 76, 79, 80, 83, 84, 92). Clasa 10. Demayo Adriana (2288, 309, 16, 21, 49, 51, 57, 75, 78—80, 92, 95, 404, 10, 14).

Școala medie nr. 22. Clasa 8. Raicea Liana (E: 863—71, 72—81, 83—90, 92). Clasa 10. Gheorghiță Mariana (2340, 53, 54, 57, 59, 60, 72, 77, 95, 404, 05, 07, 09, 10).

Școala medie nr. 23. Clasa 8. Koch Constantin (2392, 94, E: 874, 76, 77, 79—81, 83—86, 89—91, 93—95, 97, 98).

Școala de 7 ani nr. 31. Clasa 5. Berceanu O. (E. 879, 80, 84, 93). Clasa 6. Dinu A. Ioan (E: 879, 80, 84).

Școala de 7 ani nr. 145. Ghencea. Clasa 6. Raif Mircea (E: 852, 53, 55, 57, 64, 65, 67, 68, 74, 76, 77, 79, 80). Clasa 7. Marin Doina (E: 824, 76, 77, 79, 81, 83—86, 88—91, 93, 94, 97). Țințaru Letiția (E: 874, 76, 77, 79—81, 83, 84, 86, 90, 93, 94, 97).

Școala de 7 ani nr. 150. Clasa 7. Grigore Nicolae (E: 874—81, 83, 84, 89—91, 93—95, 97, 98).

BUZĂU. *Absolvent* Bătireanu Gheorghe (2346, 53, 64, 72, 74, 83, 92, 94, 95, 97—99, 404, 08, 12—17).

Școala medie nr. 1. Clasa 8. Gheorghe A. Cezar (2339, 40, E: 863, 65—73, P).

Școala medie nr. 2. Clasa 10. Suciu Tita (2371, 72, 77, 79, 95, 404—10, P).

CALAFAT. Clasa 9. Șerban Adrian (2349, 80, 92, 94, 95, 405, 06, 09, 10). Clasa 10. Vișinică Maria (2347, 49, 54, 56, 57, 60, 63, 64, 67—69, 72—74, 78—80).

CĂLĂRAȘI. Clasa 9. Petruș Octavian (2347, 49, 56, 63, 64, 68, 80, 92, 95, 96, 404, 05, 09, 10). Clasa 10. Ionescu Crișan (2349, 54, 56, 64, 78, 92, 94, 96, 404—08, 10, 13). Absolvent Demciuc Anatolie (2394, 95, 97, 405—07, 09, 10, 12, 14—17).

CARACAL. Clasa 9. Dincă Gh. (2392, 94, 95, 404—12, P), Stratan Gheorghe (2349, 59, 72, 80, 94, 95, 404—07, 10), Basturescu D. Mugurel (2392, 94—96, 99, 400, 04—11, 16).

CIMPULUNG — Muscel. Clasa 6. Savin Alexandru (E: 886, 88, 90—97).

Clasa 8. Simionică I. Traian (E: 843, 51—57, 60, 62—65, 67—76). Clasa 9. Vaida Cornel (2382, 85, 86, 92—95, 400, 01, 04—11, 16).

CÎMPINA. Nicolescu Valentin (2354, 78, 86, 92, 406, 08, 14). *Școala de 7 ani Dițești*, profesor Tache Ștefan (2343, 52, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 78, 80, P).

CLUJ. *Școala medie nr* 4. Clasa 9. Severeanu S. Adrian (2339, 40, 49, 56, 57, 59, 92, 94, 96, 405, 09).

Şcoala medie nr. 6. Clasa 8. Lungu Şerban (2404, E: 856, 57, 67, 69, 72, 83, 86 90, 98). Clasa 9. Păcurariu Radu (2307, 40, 92, 95, 98, 400, 04—06, 08, 10).

Şcoala medie nr. 9. Clasa 10. Paladi Mircea (2348, 57, 71, 78, 79, 92, 404—10).

Şcoala pedagogică nr. 2. Anul IV. Hanet Constantin (2349, 56, 63, 64, 72, 74, 80, E: 874, 76—81, 84).

CONSTANŢA. *Şcoala medie nr.* 1 «*Mircea cel Bătrîn*». Clasa 10. *Anghel Constantin* (2327, 35, 38, 40, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 71, 72, 78, 79, 92, 94—97, 99, 400, 02, 05—07, 09—12, 14, 17, P), Dobriţoiu Petre (2377—79, 404—11, 14, 15, 17). *Ianuş I. Stere* (2240, 301, 19, 32, 37, 45, 46, 48, 50, 54, 56, 57, 59-64, 70—72, 74, 78, 79, 84, 85, 92, 94—97, 99—408, 10—13, 19, 17, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 8. Rădulescu Mircea (2380, E: 863, 67, 70, 71, 76, 80, 81, 83, 86, 89, 93, 98). Clasa 10. Crăiţă M. Ana (2352, 63, 66, 78, 404, 05, 07, 09—11), Iordache Gh. Elena (2378, 92, 95, 404—10, 12, 15, 16), Mocanu Silvia (2352, 57, 78, 95, 402, 04, 05, 07, 09—11).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 8. Coman G. Dragoş (E: 874—76, 78—80, 83, 84, 89, 93). Clasa 10. Abduraim Aiten (2279, 309, 16, 22, 40, 54, 60, 78, 86, 88, 92, 95), Dumitrescu C. Gheorghe (2404—71). Stepan Ionel (2352, 59, 62, 68, 95, 404—12, 14—17, E: 863—92, P).

(urmare în numărul următor)

ERATA. — La problema 2437 în loc de $\frac{1}{AB^3}$ se va scrie $\frac{2}{AB^3}$;

— La problema 2439 enunţul este acelaşi cu al problemei 1930 şi se va considera fără autor.

— La problema 2379 propusă la admiterea în facultatea de chimie 1956, enunţul este acelaşi cu cel al problemei 1575 rezolvată în G.M.F.-B ianuarie 1956.

— La problema E : 907 enunţul este şi în manualul de geometrie pentru clasele VI—VII, nr. 66, pag. 75.

— Problema 2472 fiind cunoscută în culegeri de probleme se consideră fără autor.

— La problema 2381 în loc de $S' = 50\ cm^2$, se va scrie $S' = 5\ cm^2$ (discul astupă golul tijei).

— La problema 2500 în loc de: intervalul (0,4) se va scrie: în afara intervalului (0,4).

— La problema 2501 în loc de: $(-1 < b < 7)$ se va scrie: $(1 < b < 9)$.

— La problema 2538 în loc de primul — (minus) de la numitor se va scrie + (plus).

— La problemele cu erată se mai primesc soluţii timp de trei luni de la publicarea eratei.

POŞTA REDACŢIEI

— *Cochinţoiu Ion*, Bucureşti.— Reclamaţii de neprimirea revistelor puteţi adresa Oficiului poştal de expediere a presei, arătînd numărul chitanţei şi oficiul poştal unde aţi făcut abonamentul.

— *Prefac C.* Cislău, Ploeşti.— Chestiunile suplimentare de algebră cerute la olimpiadă ultima etapă, se găsesc în cursul de algebră de Novoselov; însă pentru chestiunile de geometrie se pot folosi unele articole din GMF-B sau alte cărţi de geometrie. Broşurile din Bibliotecă SSMF care vă interesează sînt epuizate.

— *Herşcovici Clara*, elevă Tulcea. — Aţi fost publicată cu problemele rezolvate în numărul 11, însă trecută la Tg.Ocna.

— *Bărboiu Mircea*, s.m.2 Craiova.— În privinţa apariţiei GMF-B nu vă putem da o dată precisă a lunii întrucît imprimeria nu poate să-şi respecte termenul fixat pentru diferitele faze de imprimare. Indiferent de data apariţiei se primesc oricînd soluţii la problemele propuse în ultimele trei numere apărute în afara numărului ultim apărut, iar chestiunile de examen sînt socotite tot probleme propuse la care se primesc soluţii.

— *Mastan I. Ioan*, Zalău.— De netrimiterea GMF-B în localitatea dv. vă puteţi adresa Centrului de difuzare a presei din Piaţa Scînteii nr.1 Bucureşti.

— *Ciurezu C. Radu*, Calafat. — Nu trebuie să expediaţi plicul cu mai puţin de 10 probleme rezolvate.

— *Merchez Constantin.*— Ne-am adresat la timp Academiei tehnice militare, facultății de arhitectură și Institutului de mine București pentru a ne trimite enunțurile problemelor date la admitere în 1956, însă nu am primit nici un răspuns, vom mai reveni.

— *Dinu Ioan*, clasa 6 școala de 7 ani nr. 31 București.— Problemele scrise la mașină nu se iau în considerare, rezolvările trebuie să fie scrise de mînă de către rezolvitor și semnate.

— *Grigore Viorel*, Dorohoi.— Propunerea ce ați făcut de a apare la rubrica «Caleidoscop» și cuvinte încrucișate nu este acceptată.

— *Klecner I. Adrian*, s.m.1 București—Introducerea unei rubrici «Din istoria matematicii» nu este încă trecută în planul nostru.

— *Frăsineanu Const.*, elev Alexandria.— Pentru dezvoltarea cunoștințelor dv. vă recomandăm să urmăriți și soluțiile problemelor rezolvate și unele articole pe care le-ați putea urmări, în afara activității de rezolvitor.

— *Morati Cornel*, elev Zalău.— Am primit datele trimise asupra cercului de fizică, nu însă și pentru cercul de matematică.

— *Grigorescu D. Ion*, R.Vîlcea.— Am primit datele asupra cercurilor de matematică și asupra olimpiadei de matematică.

— *Popescu Mircea*, Tîrgoviște.— Am primit datele asupra activității extrașcolare la matematică și angajamentul de a fi un rezolvitor activ.

— *Bulucea Gh.*, R.Vîlcea. — Am primit informațiile asupra olimpiadei de matematică. Așteptăm date suplimentare și pentru etapele ce urmează.

— *Rețecanu D. Ion*, cl. 5, Caracal.— Am primit datele trimise asupra desfășurării cercului de matematică și a olimpiadei.

— *Lăscuțoiu Virgil*, Hunedoara. — Chestiuni speciale de fizică în afara programei școlare nu se publică permanent în gazetă, deci puteți consulta manualele de specialitate. Problema 2377 a) este în algebra de Manicatide, pagina 176; problema 2364 nu este originală.

— *Pantzer Herbert*, Alba Iulia.— Am primit observarea făcută că problema 1970 este aceeași cu problema 16, pagina 8 din manualul de fizică de clasa VIII; iar E: 747 este la fel cu problema 22, pag. 77 din cartea «Probleme și jocuri recreative» de F. Barbu.

— *Popescu I. Paul*, Craiova. — Am luat cunoștință că problema 2204 și 2143 au același enunț.

— *Berinde Gheorghe*, Negrești. — Problema E: 569 este aceeași cu problema din manualul vechi de algebră de clasa 8, pag. 21.

— *Florea Dorel*, Lugoj.— Problema E: 765 propusă de G. Stoica este aceeași cu problema 279 pag. 71 din algebra de F.G.M., iar problema 2340 propusă de D.Schileru se găsește în algebra de F.G.M. pag. 428.

— *Stoica Fulga*, elevă și Gh. Marchitan, elev Suceava. — Se primesc soluții și la chestiunile de examen publicate în GMF-B, fiind socotite probleme propuse pentru rezolvat.

— *Popeangă V. Ion*, absolvent Tg. Jiu.— Învățămîntul individual are mare rol în dobîndirea cunoștințelor; continuați și numai în cazul că observați chestiuni noi și cunoașteți bine proprietățile figurilor puteți trimite și probleme propuse sau generalizări. Dacă nu găsiți numerele noi din GMF-B ce apar la chioșcuri, este bine să vă abonați.

— *Anghel Vili*, elev. clasa 7 s.m.2 București.— Ați trimis numai probleme propuse fără a trimite și probleme rezolvate, de aceea cele propuse nu pot fi luate în seamă.

— *Albu Marin*, Constanța.— Revista GMF-B publică probleme propuse de astronomie și fizică sau de calculul probabilităților, însă acestea trebuie să corespundă realității, să fie legate de practică; însă problema ce ați trimis «cu grenada» fixată la roată, nu corespunde.

— *Ardeleanu Gh.*, Lipova.— Problemele propuse, indicate pe clase V—VIII, nu se referă la materia făcută la zi, însă ele fac parte din programa analitică a întregului an școlar.

— *Hoitan Cornel*, strungar Uzinele «I.C.Frimu» Sinaia.— Soluțiile trimise sînt corespunzătoare și ne bucură angajamentul ce ați luat de a deveni un harnic colaborator la GMF-B.

— *Stănescu Dumitru.*— Dacă programa analitică la matematică și fizică nu corespunde cu cea din școlile civile, puteți cere să ni se comunice oficial pentru a se ține seamă la viitoarele etape ale olimpiadei.

— *Ciubotaru Constantin*, student medicină Iași la premierile evidențiaților în afară de numărul soluțiilor bune ce trimite corespondentul se mai ține seamă și de calitatea soluțiilor și de felul cum ele au fost redactate.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea* fiecărei probleme trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu *îngrijire*. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute*.

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni*.

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a și a *X*-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante*. Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au *dat generalizări* și observații interesante sub formă de *note*.

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor *extrașcolare* la matematică și la fizică, asupra *cercurilor de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei *se vor face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*: să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate*.

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*. sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. MARCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROVIEV	**Numerile lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţilor diferenţiale.**
22. NICOLAE STĂNESCU	**Electronul.**
23. V. SERGIESCU	**Introducere în fizica solidului.**
24. G. N. BERMAN	**Cicloida.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**
26. AL. SANIELEVICI	**Introducere în radioactivitate**

ABONAMENTUL LA GMF-B PE ANUL 1957, ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE)

C. 114 – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4

Preţul Lei 1 exemplarul

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Instituţ. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - СЕРЕ
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII — aprilie 1957

4

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VIII, nr. 4 — aprilie 1957

SUMARUL:

		Pag.
1.	*„1 Mai" ziua solidarităţii internaţionale a celor ce muncesc*	169
2.	*Construcţia poligoanelor regulate cu rigla şi compasul de Gh. Buicliu*	170
3.	*Mişcarea oscilatorie rectilinie de N. D. Rădulescu*	176
4.	*Aspecte istorice asupra dezvoltării teoriei atomului de I. Maurer*	183
5.	*Note matematice de C. Coşniţă şi C. Georgescu*	190
6.	*Caleidoscop fizic*	196
7.	*Noutăţi din ştiinţă şi tehnică*	200
8.	*Probleme rezolvate (2246; 2250; 2264; 2268; 2271; 2275; 2368; 2356; 2359; 2360; 2363; 2365; 2401; 2411; 2421; 2430; E: 755; E: 788)*	202
9.	*Probleme propuse (2583—2609)*	211
10.	*Chestiuni de examen (2610—2632)*	215
11.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani (E: 949—E: 961)*	218
12.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	220

ANUL VIII 4 APRILIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Mérnöki Könyvtár BUDAPEST

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VIII * Nr. 4 aprilie 1957

„1 MAI" ZIUA SOLIDARITĂŢII INTERNAŢIONALE A CELOR CE MUNCESC

La 1 Mai 1886 în marele oraş american Chicago a avut loc demonstraţia a mii de muncitori care-şi cereau dreptul la o viaţă omenească; o represiune violentă a fost răspunsul dat de guvernul clasei exploatatorilor. În amintirea acelei zile sîngeroase muncitorii din lumea întreagă au hotărît să facă din 1 Mai o zi de luptă pentru drepturile clasei muncitoare. Astfel, ziua de 1 Mai a devenit zi de sărbătoare pentru oamenii muncii de pretutindeni, a devenit simbolul unităţii şi solidarităţii internaţionale a celor ce muncesc, ziua frăţiei muncitorilor din toate ţările.

În tradiţia sărbătorii de 1 Mai a intrat obiceiul ca oamenii muncii să treacă în revistă cu acest prilej forţele lor, să facă bilanţul succeselor şi să scruteze perspectivele de viitor.

Alături de oamenii muncii de pretutindeni poporul nostru muncitor sărbătoreşte ziua de 1 Mai din acest an în condiţiile întăririi continue a lagărului socialismului, în condiţiile creşterii forţelor păcii, în condiţiile avîntului impetuos al luptei pentru pace, democraţie şi socialism.

În alegerile de la 5 februarie poporul nostru a votat pentru politica înţeleaptă a partidului şi guvernului, politică de apărare a intereselor naţionale, a independenţei şi suveranităţii naţionale a ţării noastre, pentru înflorirea şcolii, pentru pace şi bună stare, pentru viitorul luminos al patriei.

În timp ce lagărul mondial al socialismului, care numără peste 900.000.000 de oameni dezvăluie cu fiecare zi ce trece uriaşele sale forţe interne, superioritatea hotărîtă a orînduirii socialiste, sfera capitalismului se restrînge tot mai mult, iar contradicţiile dintre diferitele ţări capitaliste se ascut din ce în ce mai puternic.

În zilele noastre, cînd sistemul mondial al economiei socialiste s-a statornicit şi s-a consolidat definitiv pe a treia parte a globului pămîntesc, ideile internaţionalismului proletar îşi găsesc în practică, noi confirmări. Între ţările lagărului socialist au loc cooperări în interesul comun, pentru folosirea mai raţională a resurselor economice, a capacităţii lor de producţie şi al ridicării nivelului de trai al popoarelor.

În timp ce economia ţărilor socialiste se dezvoltă în direcţia satisfacerii tot mai mare a nevoilor materiale şi culturale a oamenilor muncii, a extinderii şi perfecţionării neîncetate a producţiei pe baza întăririi colaborării şi întrajutorării reciproce, economia ţărilor capitaliste se dezvoltă în direcţia îmbogăţirii tot mai mari a monopolurilor, a înăspririi exploatării, a militarizării crescînde a economiei şi a scăderii nivelului de trai al oamenilor muncii.

Poporul romîn sărbătoreşte acest 1 Mai sub semnul luptei pentru traducerea în viaţă a hotărîrilor celui de-al II-lea Congres al partidului. Dezvoltînd mai departe

industria socialistă și cu precădere industria grea, în cel de-al doilea cincinal trebuie să se asigure întărirea și lărgirea sectorului socialist în agricultură, astfel ca el să devină proponderent ca suprafață și ca producție-marfă. Insuflețirea pe care a trezit-o în inimile oamenilor muncii s-a oglindit în avîntul întrecerii socialiste în cinstea lui 1 Mai.

Realizările obținute sînt o expresie a hotărîrii maselor de muncitori și tehnicieni din întreprinderi de a asigura îndeplinirea întocmai a sarcinilor importante puse de cel de-al doilea cincinal. Partidul cheamă pe oamenii muncii să acorde întreaga atenție îndeplinirii necondiționate a sarcinilor pe anul 1957, cel de-al doilea an al celui de-al doilea cincinal.

O atenție deosebită acordă partidul creșterii productivității muncii, reducerii prețului de cost și introducerii tehnicii noi. Școlii noastre noi, cadrelor didactice la revine sarcina de a crește cadrele necesare economiei naționale, oameni noi ai societății socialiste. Sub conducerea partidului, marea majoritate a slujitorilor școlii și-au făcut și își fac cu cinste datoria față de patrie, față de poporul muncitor dînd patriei an de an cadre tot mai temeinic pregătite. Anul acesta lucrătorii din învățămînt întîmpină ziua de 1 Mai în condițiile dezvoltării problemei politehnizării învățămîntului de cultură generală, factor principal pentru educația armonioasă și multilaterală a tineretului.

Tineretul patriei noastre întîmpină ziua de 1 Mai cu eforturi sporite în măreața operă de construire a socialismului, a luptei pentru pace.

Tineretul din R.P.R., care se bucură de depline drepturi și libertăți, în fața cărora socialismul deschide mari perspective, muncește și învață cu avînt pentru îndeplinirea hotărîrilor Congresului al II-lea al PMR și ale Plenarei CC al PMR din decembrie 1956. Ei obțin mereu noi și noi succese în fabrici și pe ogoare, în facultăți și în școli. Munca lor este însuflețită în aceste luni de pregătirea în vederea întîmpinării Festivalului Mondial al Tineretului și Studenților de la Moscova.

Ziua de 1 Mai este considerată de tineretul din școli și facultăți ca un prilej pentru mobilizarea elevilor și studenților la muncă susținută în vederea încheerii cu succes a anului școlar, pentru întărirea disciplinei în școli și facultăți.

Privind cu încredere viitorul, poporul nostru sărbătorește ziua de 1 Mai unit prin legături trainice de prietenie cu gloriosul popor sovietic, cu marele popor chinez, cu popoarele tuturor țărilor de democrație populară, întărind legăturile de solidaritate internațională cu oamenii muncii din întreaga lume, conștient că nu există forță care să poată opri mersul înainte al popoarelor libere.

Sub steagul marxism-leninismului, sub conducerea partidului, înainte spre victoria socialismului în Republica Populară Romînă!

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

CONSTRUCȚIA POLIGOANELOR REGULATE CU RIGLA ȘI COMPASUL

GH. BUICLIU

CONSTRUCȚIA poligoanelor regulate de 3, 4 și 6 laturi este dată în toate manualele și culegerile de geometrie. De asemenea, se găsește în multe manuale și tratate de geometrie construcția cu rigla și compasul a decagoanelor regulate din care se deduce construcția pentagoanelor regulate.

Fie $\overline{AB}$ latura unui poligon regulat oarecare înscris în cercul O. Luînd intersecția C a cercului O cu apotema $\overline{OP}$, perpendiculară pe latura $\overline{AB}$, se deduce latura $\overline{AC}$ a poligonului cu un număr dublu de laturi. De aici rezultă că se pot construi cu rigla și compasul poligoanele regulate de 8, 16,... sau de 12, 24..., sau de 20, 40,... laturi și în general, pologoanele regulate cu un număr de laturi egal cu un multiplu comun al numerelor 3, 5, 2; în plus, după o teoremă a lui *Gauss*, se pot construi exact cu rigla și compasul, poligoane regulate al căror număr de laturi este de forma $2^{2^n}+1$, cum ar fi de exemplu poligonul regulat de $17 = 2^{2^2}+1$ laturi sau altele de felul acestuia.

Se poate observa că dacă p și q sînt numere întregi, prime între ele, se poate construi un poligon de pq laturi, problema reducîndu-se la cazurile $n = p$ și $n = q$, pentru că este totdeauna posibil să se găsească două numere întregi pozitive α și β astfel ca

$$\frac{1}{pq} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$

Nu sînt așa de cunoscute construcțiile exacte cu linia și compasul sau construcțiile aproximative ale poligoanelor cu un număr de laturi diferit de numerele indicate mai sus, dar se pot face construcții apropiate cu o eroare e destul de mică, ceea ce este o necesitate pentru tehnicieni și desenatori.

În cele ce urmează dăm construcția exactă a poligoanelor regulate de 10 și de 15 laturi și construcția aproximativă cu o eroare destul de mică a poligoanelor al căror număr de laturi nu divide cercul într-un număr exact de părți, cum ar fi poligoanele regulate de 7, 13, 17,... laturi.

Decagonul regulat. Presupunînd problema rezolvată, fie $A_1A_2\ldots A_9A_{10}$ decagonul regulat înscris în cercul cu centrul în O și cu raza R. Din cauza simetriei diagonala A_2A_7 trece prin O. Fie M intersecția diagonalelor A_2A_7 și A_1A_4. Se vede că unghiul $\widehat{A_1MA_2}$ are ca măsură jumătate din suma arcelor A_1A_2 și A_4A_7 adică este egal cu două din cele 10 diviziuni ale cercului și că unghiul la centru $\widehat{A_2OA_4}$ are ca măsură arcul $A_2A_3A_4$, adică tot două din cele 10 diviziuni ale cercului.

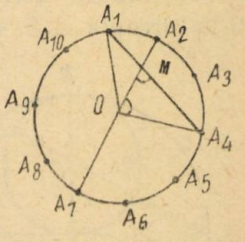


Fig. 1

De asemenea, unghiul $\widehat{A_1A_2A_7}$ are ca măsură jumătate din arcul $A_7A_8\ldots A_1$, deci tot două din cele 10 diviziuni ale cercului. Deci:

$$\widehat{A_1A_2M} = \widehat{A_1MA_2} = \widehat{OMA_4} = \widehat{MOA_4}$$

ceea ce arată că triunghiurile MA_1A_2 și MOA_4 sînt isoscele și că

(1) $$\overline{A_1M} = \overline{A_1A_2},\ \overline{MA_4} = \overline{OA_4} \text{ sau } \overline{A_1A_4} - \overline{A_1M} = \overline{OA_4} = R.$$

Pe de altă parte, măsura unghiului $\widehat{OMA_4}$ fiind egală cu două diviziuni, măsura unghiului $\widehat{OMA_1}$, suplimentul lui, va fi egală cu trei diviziuni, adică egală cu măsura unghiului $\widehat{A_1OA_4}$. Rezultă că

$$\widehat{A_1MO} = \widehat{A_1OA_4}$$

și deci, triunghiurile A_1OM, A_1OA_4 având unghiurile egale sînt asemenea, iar din asemănarea lor se deduce:

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1M} = \overline{AO}^2 = R^2. \tag{2}$$

Egalitățile (1) și (2) arată că laturile $\overline{A_1A_2}$ și $\overline{A_1A_4}$ se obțin construind două segmente de dreaptă a căror diferență se fie egală cu R și al căror produs să fie egal cu R^2, ceea ce revine la a construi cu rigla și compasul media și extrema rație a razei OA_2, problemă cunoscută. Fie M și M' punctele care împart pe OA_2 în medie și extremă rație, M fiind cuprins între O și A_2. Se ia pentru $\overline{A_1A_2}$ segmentul cel mai scurt $\overline{OM}$, cum a reeșit din demonstrație. Se duc corzile $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{10}A_1}$ egale între ele și egale cu $\overline{OM}$ și se obține decagonul regulat înscris în cercul O. Unind vîrfurile acestui decagon din trei în trei se obține decagonul regulat stelat $A_1A_4A_7A_{10}A_3A_6A_9A_2A_5A_8$.

Odată cu aceste decagoane se obțin și pentagoanele regulate $A_1A_3A_5A_7A_9$ convex și $A_1A_5A_9A_3A_7$ stelat.

Prin calcule se găsește

$$\overline{OM} = \overline{A_1A_2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R \text{ și } \overline{OM'} = \overline{A_1A_4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} R$$

pentru pentagoanele regulate înscrise în cercul de rază R și

$$\overline{A_1A_3} \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} R \quad \text{și} \quad \overline{A_1A_5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} R,$$

pentru pentagoanele regulate înscrise în același cerc.

Aceasta este construcția clasică a celor două poligoane. Iată și o altă construcție independentă de cunoașterea mediei și extremei rații.

În cercul O de diametru $\overline{A_1A_7}$ (fig. 2) se duce raza $\overline{OB}$ perpendiculară pe acest diametru. Cercul de diametru $\overline{OB}$ și cu centrul în C este întîlnit în D și E de dreapta A_1C. Lungimile $\overline{A_1D}$ și $\overline{A_1E}$ sînt laturile celor două decagoane regulate, după cum se poate dovedi ușor din relația

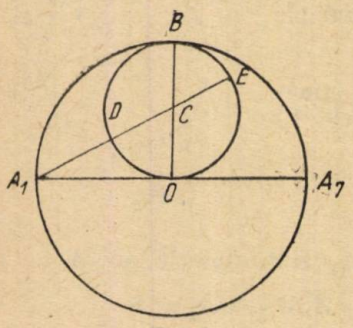


Fig. 2

$$\overline{A_1O}^2 = \overline{A_1D} \cdot \overline{A_1E}$$

în care

$$\overline{A_1D} = \overline{A_1C} - R \text{ și } \overline{A_1E} = \overline{A_1D} + 2R$$

Pentadecagonul regulat. — Fie $A_1A_2 \ldots A_{15}$ poligonul căutat înscris în cercul cu centrul în O (fig. 3). Notăm cu B mijlocul arcului A_3A_4 și observăm că dacă c este lungimea cercului circumscris poligonului, atunci avem de pe figură

$$\text{arc } A_1B = \text{arc } A_1A_3 + \text{arc } A_3B = \left(2c + \frac{c}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{c}{6},$$

$$\text{arc } A_2B = \text{arc } BA_5 = \frac{c}{15} + \frac{c}{15 \cdot 2} = \frac{c}{10}.$$

Din aceste relaţii se deduce că $\overline{A_1B}$ = latura exagonului regulat înscris în cercul O de rază R şi $\overline{A_2B}$ = latura decagonului regulat înscris în O.

Rezultă din această observaţie următoarea construcţie a pentadecagonului regulat înscris în cercul O: Dintr-un punct A_1 de pe O se duce coarda $\overline{A_1B} = R$, iar din B se duce coarda $\overline{BA_2} = \overline{BA_5}$ = latura decagonului regulat înscris în O şi construită prin una din metodele precedente. Se găseşte astfel, latura $\overline{A_1A_2}$ a pentadecagonului regulat şi latura $\overline{A_1A_5}$ a unuia din pentadecagoanele regulate stelate. Prin consideraţii geometrice, pe care le lăsăm pe seama cititorului, se găsesc şi următoarele valori numerice ale laturilor celor 4 poligoane regulate de cîte 15 laturi, înscrise în cercul de rază egală cu unitatea:

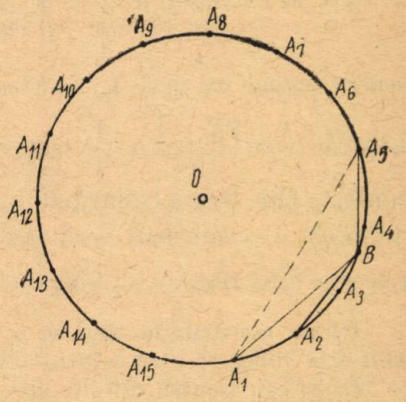


Fig. 3

A_1A_2 = latura poligonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}$ =

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right),$$

A_1A_3 = latura poligonului $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}A_{15}A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$ =

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right),$$

A_1A_5 = latura poligonului $A_1A_5A_9A_{13}A_2A_6A_{10}A_{14}A_3A_7A_{11}A_{15}A_4A_8A_{12}$ =

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} + \sqrt{15}\right),$$

A_1A_0 = latura poligonului $A_1A_9A_2A_{10}A_3A_{11}A_4A_{12}A_5A_{13}A_6A_{14}A_7A_{15}A_8$ =

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

Diferite alte poligoane regulate care nu se pot construi exact. Dacă $\overline{A_1A_2} = l_n$ este latura poligonului regulat de n laturi înscris în cercul cu centrul în O şi cu raza R, atunci din triunghiul isoscel A_1OA_2 avem:

$$\widehat{A_1OA_2} = \frac{360^\circ}{n} = \alpha \text{ şi } \widehat{A_2A_1O} = \widehat{A_1A_2O} =$$

$$= \frac{180^\circ}{2} - \frac{360^\circ}{2n} = \frac{(n-2)\,90^\circ}{n}.$$

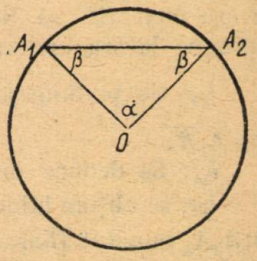


Fig. 4

Tot din acelaşi triunghi scoatem

$$(3) \qquad \overline{A_1A_2} = R\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = l_n.$$

Înlocuind în (3) pe α şi pe β prin valorile lor şi dînd lui n diferite valori întregi se obţin cu ajutorul calculului logaritmic diferitele valori ale lui l_n cu ori cîte zecimale voim. Apropiind valorile astfel găsite de valorile expresiilor

care dau laturile unor poligoane cunoscute se poate deduce construcția cu rigla și compasul a poligoanelor de n laturi din construcția poligoanelor regulate exacte, după cum se vede din exemplul următor:

Fie de exemplu, $n = 7$. Se găsește din (3)

$$l_7 = 0{,}86776$$

pentru cercul de rază 1. Se observă cu ușurință că $0{,}86602\cdots \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $0{,}86803\cdots \approx \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{4}$ ceea ce înseamnă că l_7 este aproximativ egală cu jumătate din latura triunghiului echilateral cu o eroare $e < 0{,}002$ sau se poate obține cu o eroare mai mică decît 0,0003 dacă se prelungește latura $\overline{A_1A_2}$ a decagonului regulat cu lungimea $\overline{A_2B} = \frac{l_{10}}{4}$ și se ia pentru l_7 lungimea $\overline{A_1B}$.

Prima construcție cînd se ia l_7 cît jumătatea laturii triunghiului echilateral este calea pe care o întrebuințează desenatorii și constructorii. Procedînd pe aceiași cale pentru diferite alte valori ale lui n se obțin rezultatele din tabela următoare pentru poligoanele pînă la $n = 31$.

Se poate continua pe această cale pentru ori ce număr voim. Am găsit în Manualul Inginerului, vol. I (Editura Tehnică 1954,) pag. 112) valori corespunzătoare celor din coloana 2 a tabelei precedente pînă la $n = 194$, însă mai puțin apropiate de cît cele date aici pentru $n = 1,2,\ldots,31$.

Este de observat că poligoanele de 9, 14, 18,... laturi se pot construi și cu ajutorul acelora de 3, de 7, de 9,... laturi pe baza observațiilor din primele rînduri ale acestui articol.

Valorile expresiilor din coloana 3 se pot construi geometric după metoda generală de construcție a expresiilor numerice. Dacă însă le apropiem de valorile laturilor poligoanelor cunoscute anterior atunci găsim construcția directă a poligoanelor regulate cu un număr de laturi dat în prima coloană, după cum se vede în cele ce urmează, la care se pot adăuga și alte metode de construcții pe baza principiilor care au condus la stabilirea tabelei precedente.

Lăsăm la o parte pe l_7 pentru care am dat două construcții.

l_9: Se vede că este sensibil egal cu diferența dintre jumătatea laturii decagonului regulat convex și 1/8 din rază;

l_{11}: în extremitatea A a diametrului $\overline{AB}$ se duce tangenta $\overline{AC}$ egală cu $3R$, se ia pe $\overline{BC}$ punctul D așa încît $\overline{BD} = 2\,BC$, apoi se determină pe BD punctul E așa încît BE să fie de 4 ori diametrul cercului, atunci 1/5 din DE este aproape latura endecagonului regulat;

l_{13}: Se prelungește latura $\overline{A_1A_2}$ a patratului cu $\overline{A_2B} = \frac{R}{2}$ și se ia 1/4 din $\overline{A_1B}$;

l_{14}: Se deduce din l_7 construindu-se apotema;

l_{17}: se obține luînd pe latura $\overline{A_1A_2}$, între A_1 și A_2 a triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ punctul B așa încît $\overline{BA_2} = R$. Jumătate din $\overline{A_1B}$ este latura l_{13} pentru prima expresie cu $e < 0{,}002$. A doua expresie conduce la următoarea construcție: pe latura $\overline{A_1A_2}$ a decagonului regulat se ia punctul B astfel încît $BA_2 = \frac{R}{4}$ și se obține $\overline{A_1B} = l_{17}$ cu o eroare mai mică decît 0,0006!

n	Valoarea lui dedusă din (1)	Expresia apropiată de (1) şi	de valoare:	Eroarea ε
7.	0,86776 ..	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = l_3$	= 0,86602	$< 0{,}002$
		$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}$	= 0,86803	$< 0{,}0003$
9.	0,684040..	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)$	= 0,684016....	$< 0{,}00003$
11.	0,56346 ..	$\frac{1}{5}(3\sqrt{13}-8)$	= 0,56333	$< 0{,}0002$
13.	0,478631..	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$	= 0,478553....	$< 0{,}00008$
14.	0,445041..	$\frac{3}{5}(\sqrt{14}-3)$	= 0,444 994 ..	$< 0{,}00005$
17.	0,36749 ..	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$	= 0,36602	$< 0{,}002$
		$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{4}$	= 0,36803	$< 0{,}0006$
18.	0,347296..	$\frac{1}{5}\left(\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$	= 0,347213....	0,00009
19.	0,32918 ..	$2\sqrt{2}-\frac{5}{2}$	= 0,32842	0,00008
21.	0,29808 ..	$\frac{3}{4}\sqrt{3}-1$	= 0,29903	0,0001
22.	0,28462 ..	$\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$	= 0,28451	0,0002
23.	0,27233 ..	$\sqrt{13}-\frac{10}{3}$	= 0,27221	0,0002
25.	0,25066 ..	$\frac{1}{4}$	= 0,25	0,007
26.	0,241073..	$\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{8}$	= 0,241025 ..	$< 0{,}00005$
27.	0,23218 ..	$\sqrt{3}-\frac{3}{2}$	= 0,23205	$< 0{,}0002$
28.	0,22392 ..	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	= 0,22360	$< 0{,}0004$
29.	0,21623 ..	$\frac{1}{8}\sqrt{3}$	= 0,21650	$< 0{,}0003$
31.	0,202336..	$\frac{\sqrt{2}}{7}$	= 0,202030....	$< 0{,}0004$

l_{18}. Se prelungeşte latura $\overline{A_1A_2}$ a decagonului regulat cu $\overline{A_2B} = \frac{R}{4}$ şi se obţine l_{18} luînd 2/5 din $\overline{A_1B}$. Se poate observa din tabela precedentă că l_{18} valorează aproximativ 2/5 din l_{17} ceea ce dă o nouă construcţie a lui l_{18};

Latura l_{19} este diferenţa între diagonala patratului şi de 5 ori jumătatea razei;

Latura l_{21} este diferenţa între 3/4 din l_3 şi R;

Latura l_{22} se obține prelungind raza $\overline{OA_1}$ cu $\overline{A_1B}$ egal cu 1/2 din latura patratului, apoi se ia 1/6 din $\overline{OB}$;

Latura l_{23} nu poate fi legată de vre-un alt poligon regulat de aceea îi dăm construcția următoare: în extremitatea A a diametrului $\overline{AB}$ se duce tangenta $\overline{AC} = 3\,R$. Pe $\overline{BC}$ se ia $BN = \frac{10R}{3}$ și se obține $\overline{CN} = l_{23}$. În adevăr, avem în triunghiul BAC

$$\overline{BC}^2 = 9R^2 + 4R^2 = 13R^2$$

de unde

$$\overline{BC} = R\sqrt{13}$$

și cum

$$\overline{CN} = \overline{BC} - \overline{BN} = R\sqrt{13} - \frac{10R}{3},$$

rezultă că $\overline{CN}$ este latura căutată;

Latura l_{25} este egală cu aproape $R/4$;

Latura l_{26} este egală aproximativ cu diferența dintre jumătatea laturii unui triunghi echilateral și 5/8 din rază;

l_{27} se obține micșorînd pe l_3 cu $3\,R/2$;

l_{28} se poate obține din latura eptagonului regulat, dar se poate construi foarte simplu și în felul următor: se duce tangenta în punctul A al cercului dat și se ia pe ea lungimea $\overline{AB} = R$. Dreapta care unește pe B cu diametralul opus lui A în O taie pe O în C. Lungimea BC este lungimea l_{28};

l_{29} este aproape egală cu a 8-a parte din l_3;

l_{31} este aproximativ egală cu 1/7 din latura patratului.

Se poate urma pe această cale și pentru alte poligoane regulate cu un număr mai mare de laturi. Singura dificultate este în găsirea unor expresii convenabile analoge cu cele din coloana 3 a tabelei precedente și aproape egale în valoare cu numerele înscrise în coloana a doua a aceluiași tabel.

Este de observat că odată cu construirea poligoanelor regulate am construit geometric și o serie de expresii numerice, construcții care pot servi ca exerciții îndrumătoare pentru construcții de expresii numerice în general.

Notă. — Odată construite poligoanele regulate înscrise în cercul de rază R, se deduc imediat și laturile poligoanelor circumscrise aceluiași cerc. Se duce apotema laturii $\overline{A_1A_2}$ a poligonului înscris și i se ia intersecția cu tangenta în A_1 la cerc. Această intersecție este unul din vîrfurile poligonului regulat circumscris.

MIȘCAREA OSCILATORIE RECTILINIE

Prof. **N. D. RĂDULESCU,** s.m.b.l

În mișcarea rectilinie, fie uniformă, fie variată, mobilul nu mai revine prin punctele prin care a trecut odată. Se întîlnesc însă, în natură și în tehnică, mișcări în care mobilul revine după un anumit interval de timp prin punctele prin care a mai trecut odată. Astfel de mișcări se zic periodice. În studiul fenomenelor fizice, mișcările periodice au un rol important, deoarece astfel de mișcări stau la baza a numeroase fenomene naturale și sînt întîlnite în tehnică.

După cum s-a mai arătat, un punct material aflat în mișcare periodică se va găsi în aceiași stare (aceiași poziție, viteză, forță, accelerație etc)

după un interval de timp T, sau după un număr întreg de T (T = perioada mișcării).

Mișcarea pendulară, mișcările corpurilor cerești, mișcarea termică a moleculelor unui corp solid, sînt mișcări periodice întîlnite în natură; dar nu numai în natură, ci și în tehnică se întîlnesc mișcări care se repetă cu regularitate. Astfel, în timpul funcționării diferitelor mașini și dispozitive mecanice anumite piese ale acestora execută mișcări periodice.

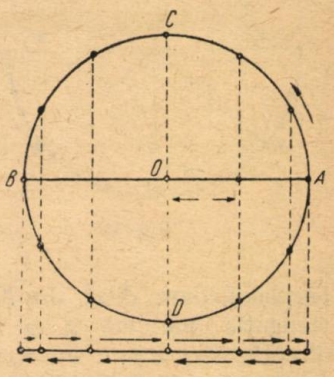


Fig. 1

Studiul fenomenelor periodice stă la baza acusticii, seismologiei, mecanicii construcțiilor, teoriei mașinilor, dar mai ales este de mare importanță în optică, în tehnica curenților alternativi și în radiotehnică.

Diferitele mișcări periodice se deosebesc între ele, fie prin forma traiectoriei descrise de mobil, fie prin caracterul ce-l are mișcarea însăși.

Cea mai simplă formă de mișcare periodică este mișcarea oscilatorie rectilinie.

Să presupunem că mobilul A (fig. 1) descrie o circonferință, adică sîntem în cazul unei mișcări circulare și uniforme. Originea mișcării este în A, iar sensul, invers mișcării acelor de ceasornic.

În timp ce mobilul se mișcă pe circonferință proiecția sa m pe diametrul AB se va mișca de la A spre O, iar mai departe, de la O spre B și în sfîrșit, din B se întoarce iarăși în A trecînd din nou prin O. Proiecția mobilului pe diamentrul AB execută astfel o mișcare la dreapta și la stînga punctului O, considerat poziție de echilibru. Mișcarea proiecției mobilului m pe diametrul AB între limitele A și B, cînd mobilul execută o mișcare circulară uniformă o numim mișcare oscilatorie rectilinie. Putem considera originea mișcării și în punctul C, proiecția mobilului pe diametrul AB va executa aceiași mișcare oscilatorie rectilinie.

Împărțind arcul ACB în părți egale, iar mișcarea mobilului fiind considerată uniform circulară, adică se parcurg arce egale în intervale de timp egale, se observă că proiecția m execută de la A la O o mișcare uniform accelerată, de la O la B mișcarea sa este uniform încetinită, în B viteza sa se anulează, iar de la B la O mișcarea sa va fi uniform accelerată, în A viteza se anulează ș.a.m.d. Se ajunge la această concluzie dacă se observă că segmentele de pe AB corespunzătoare unor arce egale, sînt neegale.

Mărimile pe care le întîlnim în mișcarea oscilatorie rectilinie sînt:

— oscilația simplă, adică mișcarea oscilatorului m de la A la O și de la O la B,

— oscilația completă, adică mișcarea de la A la B și de la B înapoi la A,

— perioada de oscilație (T) este timpul în care se face o oscilație completă,

— frecvența de oscilație (ν) este numărul de oscilații pe secundă sau numărul de perioade dintr-o secundă ($\nu = 1/T$). Unitatea de măsură a frecvenței este hertzul (1 Hz este o oscilație pe secundă). Dacă frecvența ar fi 100 Hz înseamnă că oscilatorul m face 100 oscilații într-o secundă.

— elongația oscilației (x) este depărtarea oscilatorului m la un moment dat t față de poziția de echilibru O ($OM = x$),

— amplitudinea oscilației (a) este elongația maximă ($OA = a$).

Să presupunem acum că mobilul ar parcurge cercul de la B la A prin D și înapoi de la A, tot prin D, la B, în același timp T; proiecția m pe același diametru oscilează în aceleași condiții ca și în primul caz.

Dacă în O ar fi suspendat un pendul (fig. 2) și l-am considera că oscilează între pozițiile extreme ON și OM, simetrice față de poziția de echilibru OD, atunci în timp ce pendulul oscilează între cele două poziții extreme, proiecția m pe diametrul AB oscilează rectiliniu între limitele N' și M'.

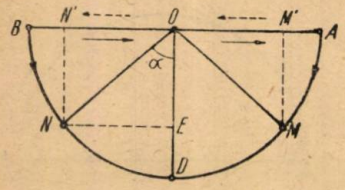


Fig. 2

În cazul oscilației pendulului numim amplitudine unghiulară, unghiul de deviație maximă $NOD = \alpha$.

Amplitudinea liniară în acest caz este depărtarea maximă (elongația maximă) a poziției extreme ON față de poziția de echilibru OD. Această depărtare (elongație) $NE = x$ va fi perpendiculara dusă din N pe poziția de echilibru OD. Din cauză că între elongația maximă x și amplitudinea unghiulară α este proporționalitate directă, căci $x = a \sin \alpha$, obișnuit se ia una în locul alteia. Chiar se spune, după cum s-a văzut mai sus, că elongația maximă este egală cu amplitudinea de oscilație.

Cînd amplitudinea $\alpha = 90°$, atunci $x = a$, în care a este lungimea pendulului. Ecuația

$$x = a \sin \alpha \tag{1}$$

sau

$$y = a \cos \alpha \tag{2}$$

($OE = y$) constituie legea mișcării oscilatorii rectilinii, deoarece oricare din aceste expresii leagă între ele mărimile întîlnite în mișcarea oscilatorie și pentru că însuși α este funcție de timp după cum se va vedea mai jos. Amplitudinea α scade cu timpul către zero astfel că oscilația se stinge treptat; ea este o oscilație amortizată. Dacă am lua măsuri ca amplitudinea să se păstreze constantă comunicînd pendulului treptat energia pe care el inerent o consumă în timpul oscilației, mișcarea oscilatorie ar fi întreținută sau neamortizată.

Viteza unghiulară ω a mobilului în rotație uniformă o putem exprima, fie referindu-ne la oscilația completă de la B prin D la A și înapoi, în care caz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rad/s, fie referindu-ne la oscilația de la N la D pe care s-o presupunem că se face în timp de t secunde, în care caz este descris tocmai unghiul α, iar $\omega = \frac{\alpha}{t}$. Rezultă deci, că $\frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ de unde $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$ sau $\alpha = \omega t$.

Legea de mișcare (oricare din relațiile 1 sau 2) ia aspectul

$$x = a \sin \frac{2\pi t}{T} = a \sin \omega t \tag{3}$$

sau

$$y = a \cos \frac{2\pi t}{T} = a \cos \omega t. \tag{4}$$

Mișcarea pendulului se datorește forței care lucrează asupra lui, adică greutății sale G. În timpul oscilației unui pendul se observă că firul stă bine

întins, deci o forță trebuie să lucreze asupra lui; de asemenea corpul cade din B spre D (fig. 3), deci există o altă forță care provoacă această cădere.

Aceste două forțe rezultă în realitate din descompunerea greutății pendulului. În timpul oscilației, componența G_1, care este singura forță activă, este continuu tangentă la circonferință, iar forța G_2 acționează de-a lungul firului fiind anulată de rezistența sprijinului. Componenta activă $G_1 = G \sin \alpha$; cînd pendulul este în poziția de echilibru OD, $\alpha = 0$ și deci G_1 se anulează, ea este maximă numai în pozițiile extreme ON și OM.

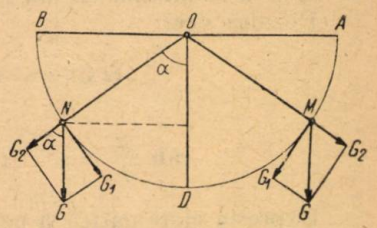


Fig. 3

Viteza pendulului este maximă în poziția de echilibru OD, adică tocmai în poziția în care forța activă G_1 s-a anulat.

În oscilația pendulului se observă că dacă x crește spre dreapta lui OD, sau spre stînga lui OD, forța activă G_1 rămîne continuu îndreptată către poziția de echilibru.

Accelerația imprimată pendulului de componenta G_1 va fi g_1, iar ca valoarea $g_1 = g \sin \alpha$, deoarece $G_1 = G \sin \alpha$, iar $mg_1 = mg \sin \alpha$.

Accelerația imprimată de componenta activă se anulează odată cu ea. Mișcarea oscilatorie care se efectuează după legea $x = a \sin \alpha$ se numește armonică, iar reprezentarea ei grafică este o sinusoidă. Într-o mișcare oscilatorie armonică forța activă este continuu îndreptată spre poziția de echilibru OD și continuu variabilă, astfel că totdeauna în poziția de echilibru ea se anulează, fiind maximă în pozițiile extreme.

În afară de pendul poate oscila orice corp elastic. Astfel, într-o lamă de oțel fixată cu un capăt în menghine, după deformarea ei datorită unei forțe exterioare, se naște o forță elastică f, îndreptată tot către poziția de echilibru și care căutînd să aducă lama la starea inițială, provoacă oscilația ei.

De asemenea, un corp gazos după comprimare oscilează sub acțiunea unei forțe elastice îndreptată spre poziția inițială (de echilibru). Rezultă deci, că nu numai greutatea poate fi o forță care să provoace oscilația unor corpuri, ci și forțele elastice.

Perioada de oscilație a unui pendul se poate deduce folosind un pendul conic (oscilația pendulului considerat pînă acum se făcea în același plan, aveam deci, un pendul plan).

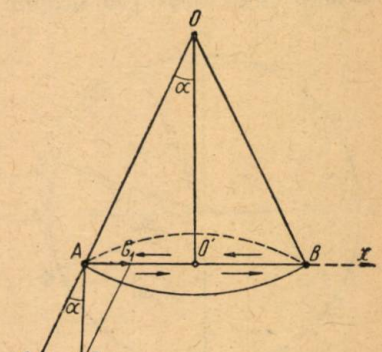


Fig. 4

Să presupunem că avem un pendul de lungime l care în mișcarea sa generează un con cu vîrful în O (fig. 4). În aceste condiții corpul greu face o mișcare circulară uniformă, iar proiecția sa pe diametrul AB execută o mișcare oscilatorie rectilinie cu aceiași perioadă ca și cea a mișcării circulare. Și în acest caz firul stă bine întins în timpul rotației conice, iar corpul greu tinde să cadă în O'. Forțele care provoacă aceste efecte provin tot din greutatea pendulului, care se descompune după direcțiile Ax și Ay. Componenta G, îndreptată spre O',

este o forță centripetă, așa că $G_1 = m\,\omega^2\,R$ în care $R = O'A$, iar m este masa pendulului. Scriem tangenta unghiului α din triunghiul AGG_2:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{G_1}{G}; \quad G_1 = G\operatorname{tg}\alpha.$$

Dăm însă pendulului o rotație conică cu amplitudinea α foarte mică; în acest caz tg α se confundă cu sin α, iar $G_1 = G \sin\alpha$.

Rezultă deci:

$$G\sin\alpha = m\omega^2 R \quad \text{sau} \quad mg\frac{R}{l} = m\omega^2 R$$

$$\text{sau } \frac{g}{l} = \omega^2 \; ; \quad \frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \text{iar } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

Expresia matematică a perioadei de oscilație exprimă trei legi ale pendulului; perioada de oscilație este proporțională cu rădăcina patrată a lungimii pendulului, este invers proporțională cu rădăcina patrată a accelerației gravitației și, deoarece în această expresie nu figurează masa pendulului înseamnă că perioada de oscilație nu depinde de masa și nici de substanța din care este confecționat pendulul. A patra lege — legea izocronismului micilor oscilații — se demonstrează numai experimental. Din cele arătate pînă aci se observă strînsa legătură între mișcarea oscilatorie uniformă și mișcarea oscilatorie rectilinie; ambele mișcări sînt periodice.

Ne vom ocupa acum de cazul cel mai general în care recunoaștem mișcarea oscilatorie rectilinie. Pentru aceasta să considerăm ca și pînă acum, originea mișcării circulare tot în A, iar $OA = a$ (fig. 5).

Să presupunem că la momentul zero, corpul s-ar afla în M_0. În acest caz unghiul dintre poziția de echilibru OA și poziția la momentul zero (OM_0) pe care-l notăm cu φ, se numește faza inițială (faza = poziție). Acest unghi φ determină poziția mobilului la timpul zero în raport cu originea mișcării OA. Mobilul fiind deasupra originii mișcării spunem că este în «avans de fază» căci el s-ar putea găsi la timpul zero și sub OA (în M'); în acest caz, spunem că este în «intîrziere de fază». La momentul t (adică după t secunde), presupunem că mobilul se află în M. În acest caz unghiul dintre poziția de echilibru OA și poziția la momentul t (îl notăm cu α) se numește «fază de mișcare». Din fig. 5 se vede că $\alpha - \varphi = \omega t$ de unde $\alpha = \omega t + \varphi$.

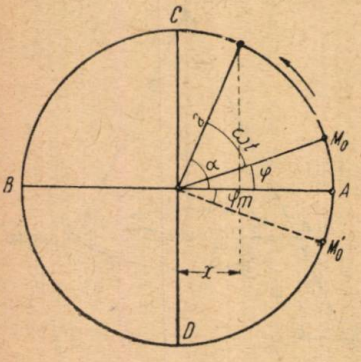


Fig. 5

Considerînd mișcarea mobilului pe circonferință în sensul de la A la C, proiecția sa m se va mișca după cum am mai arătat, de la A spre O etc. Din fig. 5 observăm că

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

cînd proiecția mobilului se face pe diametrul AB, sau

$$y = a\sin(\omega t + \varphi), \tag{7}$$

cînd proiecția mobilului se face pe diametrul CD. Dacă mobilul ar fi în întîrziere de fază — notînd și în acest caz, faza inițială tot cu φ — se vede

că $\alpha + \varphi = \omega t$ (mişcarea corpului de la M_0' la M făcîndu-se tot în t secunde). Rezultă că $\alpha = \omega t - \varphi$, şi în acest caz obţinem ecuaţiile:

$$x = a \cos (\omega t - \varphi), \tag{8}$$

iar

$$y = a \sin (\omega t - \varphi). \tag{9}$$

Oricare din ecuaţiile (6), (7), (8), (9) constituie legea mişcării oscilatorii rectilinii în cazul general. Dacă $\varphi = 0$, atunci sîntem în cazul particular şi avem $x = a \cos \omega t$ şi $y = a \sin \omega t$.

Să calculăm acum viteza şi acceleraţia în mişcarea oscilatorie rectilinie. Pentru a găsi viteza lui m vom face proiecţia vitezei liniare a mobilului aflat în mişcare circular uniformă pe acelaşi diametru AB. Notînd viteza lui m cu v', din fig. 6 se vede că

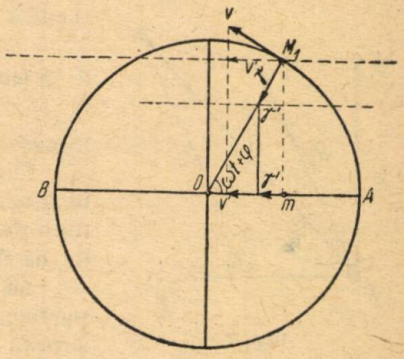


Fig. 6

$$v' = v \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi)\right],$$

sau

$$v' = v \sin (\omega t + \varphi), \qquad 10),$$

iar dacă $\varphi = 0$,

$$v' = v \sin \omega t. \qquad (11)$$

Din relaţia (10) se vede că m are viteza maximă cînd $(\omega t + \varphi) = 90°$, adică atunci cînd m trece prin O (poziţia de echilibru). Dacă $v = \omega R$, iar $R = a$, relaţia (11) devine

$$v' = -\omega a \sin \omega t$$

sau

$$v' = -\omega a \sin \alpha ; \tag{12}$$

viteza v' se ia cu semnul minus, deoarece este îndreptată spre 0.

Acceleraţia centripetă γ pe care o suferă viteza liniară v în mişcarea de rotaţie este îndreptată după cum se ştie, spre O, de-a lungul razei. Proiecţia acestei acceleraţii centripete pe diametrul AB este tocmai, acceleraţia lui m pe care notînd-o cu γ' vom avea

$$\gamma' = \gamma \cos (\omega t + \varphi), \tag{13}$$

dar

$$\gamma = \frac{v^2}{R}$$

deci

$$\gamma' = \frac{v^2}{R} \cos (\omega t + \varphi). \tag{14}$$

Dacă $\varphi = 0$, $v = \omega R$, iar $R = a$, relaţia (14) devine

$$\gamma' = -\omega^2 a \cos \alpha . \tag{15}$$

Acceleraţia γ' se ia cu semnul minus, deoarece este îndreptată spre O. Dacă în relaţiile (6) şi (8) $\varphi = 0$, atunci $x = a \cos \omega t$, iar (15) devine

$$\gamma' = -\omega^2 x. \tag{16}$$

Această relaţie ne arată că acceleraţia unei particule în mişcare oscilatorie rectilinie este în orice moment direct proporţională cu elongaţia şi îndreptată spre poziţia de echilibru (ca şi forţa activă).

Ca să determinăm energia unei particule în oscilaţie (vibraţie) ne vom referi la energia maximă pe care o are m cînd trece prin poziţia de echilibru O (cînd viteza sa este maximă) sau cînd $(\omega t + \varphi) = 90°$.

$$W = \frac{mv'^2}{2}, \text{ iar } v' = v \sin \alpha = -\omega a \sin \alpha, \ \alpha = \omega t + \varphi = 90°$$

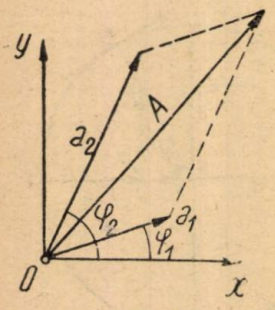


Fig. 7

rezultă că

$$v' = \omega a, \text{ iar } W = \frac{m\omega^2 a^2}{2} = \frac{4\pi^2 a^2 m}{2T^2} = 2\pi^2 \nu^2 a^2 m \qquad (17)$$

în care ν este frecvenţa $(1/T)$.

Din relaţia (17) se vede că energia unei particule în oscilaţie este proporţională cu patratul amplitudinii de oscilaţie, cu masa oscilatorului şi cu frecvenţa de oscilaţie (ridicată la patrat).

Să presupunem că la un moment dat una din particulele mediului elastic (de exemplu, aerul) este supusă la două mişcări oscilatorii simultane (de exemplu, din partea a două unde): prima mişcare oscilatorie ar da particulei o amplitudine a_1, iar a doua ar da aceleiaşi particule o mişcare cu amplitudinea a_2. Fazele iniţiale ale acestor două oscilaţii să fie φ_1 şi φ_2. În acest caz, particula respectivă va fi antrenată într-o mişcare oscilatorie rezultantă cu o amplitudine oarecare A. Această amplitudine rezultantă poate fi găsită prin regula paralelogramului (fig. 7).

Fie o particulă supusă la cele două oscilaţii simultane cu amplitudinile a_1 şi a_2. Din figură se vede că: $A^2 = a^2_1 + a^2_2 + 2a_1a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$. Dacă $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0°$, atunci $A = a_1 + a_2$, adică cele două oscilaţii componente se întăresc, iar dacă $(\varphi_2 - \varphi_1) = 180°$, atunci se slăbesc reciproc, iar dacă în plus, în acest din urmă caz $a_1 = a_2$ atunci cele două oscilaţii s-ar stinge complet, adică $A = 0$.

Ultima concluzie că, două mişcări oscilatorii se pot întări sau slăbi sau stinge complet este de mare importanţă pentru studiul naturii luminii.

La studiul luminii se vor întîlni fenomene în urma cărora prin suprapunerea a două raze de lumină poate să rezulte fie o rază de lumină întărită, fie una slăbită, sau se poate întîmpla ca cele două raze de lumină, prin întîlnirea lor, să se nimicească reciproc rezultînd întuneric.

Acest fenomen real n-ar putea fi explicat decît în concepţia că lumina este o formă a materiei dotată cu mişcarea oscilatorie, deoarece am văzut că numai două oscilaţii se pot stinge, slăbi sau întări reciproc. Acest fapt face ca mişcarea oscilatorie să fie de mare importanţă în studiul fenomenelor naturii, pentru explicarea lor. Corpurile în natură neputînd fi izolate unele de altele este de aşteptat ca oscilaţia unui corp să treacă la corpurile din imediata sa apropiere; particulele acestora intrînd succesiv în oscilaţie la un moment dat vom avea de-a face cu o mişcare de ansamblu a unui multitudini de particule, mişcare de ansamblu, pe care o vom numi undă; studiul acestor unde nu intră în cadrul articolului de faţă.

ASPECTE ISTORICE ASUPRA DEZVOLTĂRII TEORIEI ATOMULUI

I. MAURER,
lector Universitatea «Bolyai» Cluj

IDEEA că materia este construită din particule mici nu este nouă; o întîlnim încă în antichitate, la Democrit (filozof grec cca. 460—370 î.e.n). Atomii lui Democrit nu sînt însă formaţiuni fizice, ci numai noţiuni metafizice. După părerea sa, numai grupurile de atomi, adică corpurile, au proprietăţi.

În perioada renaşterii s-au făcut încercări pentru reluarea teoriei atomice Bacon (1620), dar dezvoltarea ei este legată de numele lui Dalton (1808). El susţine — bazat pe cercetarea fenomenelor chimice — că atomii care formează corpul sînt indivizibili. Teoretic el nu a exclus ideea că în alcătuirea corpurilor simple intră un element comun.

La întrebarea dacă atomii sînt divizibili sau nu a dat răspuns progresul uriaş realizat în ştiinţă către sfîrşitul secolului trecut în urma descoperirii electronului, a razelor X şi mai ales a radioactivităţii.

Descoperirea electronului a dovedit că atomul trebuie să fie format din cel puţin două părţi şi anume, din particule cu sarcini pozitive şi particule cu sarcini negative. Faptul că atomul se manifestă neutru din punct de vedere electric a dus la concluzia că aceste particule intră în cantităţi egale în constituirea atomului.

S-a pus apoi întrebarea, cum sînt aranjate aceste două feluri de sarcini în interiorul atomului şi cum se pot explica diferite fenomene pe baza structurii atomului. Astfel apare problema teoriei atomice. Ţinîndu-se seamă de descoperirea electronului s-a construit prima imagină a alcătuirii atomului: modelul static de atom al lui Thomson (1903). Conform cu această ipoteză, atomul este prezentat ca o sferă, uniform umplută cu electricitate pozitivă, înăuntrul căreia sînt scufundaţi electroni negativi. Electronii interacţionează cu diferite volume elementare ale sferii, după legea lui Coulomb. Dacă în interiorul acestei sfere se găseşte un electron el s-ar afla în centrul ei, iar dacă se găsesc mai mulţi electroni ei s-ar afla dispuşi după unghiurile unei anumite figuri simetrice (fig. 1).

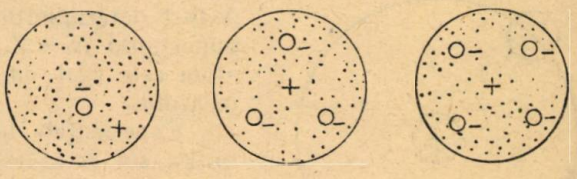


Fig. 1. — Modelul atomului după Thomson. Atomi alcătuiţi din 1, 3 şi 4 electroni.

Electronii efectuează mişcări circulare fără ca să-şi schimbe poziţiile reciproce. În acest fapt constă caracterul static al acestui model. Poziţia de echilibru a electronilor este determinată de 3 forţe: forţa electrostatică de atracţie îndreptată spre centru, forţa electrostatică repulsivă manifestată între electroni şi forţa centrifugă apărută în urma mişcării de rotaţie. În timpul rotaţiei electronii se pot îndepărta sau apropia de centru, după cum atomul pierde sau cîştigă energie. Acest model avea un caracter artificial, deoarece atribuia naturi diferite sarcinilor pozitive şi celor negative: sarcinile negative erau reprezentate ca particule distincte, electronii, iar cele pozitive se distribuiau

în limitele unor volume mult mai mari, avînd o densitate de sarcină continuă.

Deşi modelul lui Thomson s-a dovedit a nu fi just, el a jucat un rol pozitiv în istoria ştiinţelor. În particular, această concepţie a atomului a fost foarte fecundă în chimie. Thomson a analizat condiţiile de echilibru ale electronilor în atom şi a arătat că în funcţie de numărul lor se obţin configuraţii stabile sau nestabile. Modelul lui Thomson a uşurat astfel explicarea cîtorva fenomene, dar s-a dovedit cu totul nepotrivit pentru explicarea legilor spectrale. Mai mult, ideile lui Thomson referitoare la caracterul repartiţiilor sarcinilor pozitive şi negative în atom nu se bazează pe experienţă.

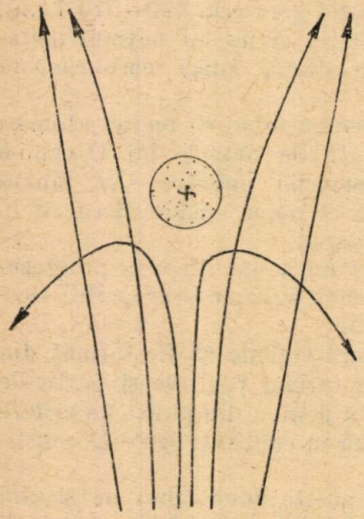


Fig. 2. — Deviaţia particulelor α în cîmpul unui nucleu.

Un pas înainte îl constituie încercarea de a sonda experimental regiunile interne ale atomului. Ph. Lenard (1903) studiind trecerea electronilor rapizi prin corpuri materiale, ajunge la concluzia că atomul nu poate fi conceput ca fiind constituit din materie încărcată electric şi uniform distribuită peste tot volumul lui, ci mai degrabă trebuie să i se atribuie o structură granulară. La aceiaşi concluzie ajunge mai tîrziu (1913) şi E. Rutherford, însă mult mai fondat.

Folosind descoperirea radioactivităţii, Rutherford a studiat pătrunderea razelor alfa (particule materiale cu sarcină pozitivă) prin lame subţiri şi a observat că o parte din aceste particule este absorbită, altă parte se dispersează, altele trec prin lamă fără deviere, iar restul suferă o reflexie (fig. 2). Bazîndu-se pe aceste observaţii a tras concluzia că sarcinile pozitive ale atomului sînt concentrate într-un spaţiu restrîns, nucleul atomic. Numărul acestor sarcini a fost găsit ca fiind foarte aproape de numărul întreg care indică locul ocupat de substanţa din care este făcută lama, în sistemul periodic al elementelor (numărul de ordine Z). A fost determinată de asemenea legea extrem de importantă $N = Z$, adică numărul electronilor din atom este egal cu numărul de ordine al elementului.

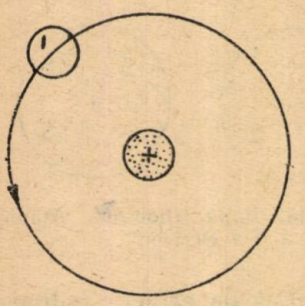


Fig. 3. — Modelul nuclear al atomului după Rutherford.

Experienţele lui Rutherford şi ale colaboratorilor săi au arătat de asemenea că dimensiunile nucleului pozitiv sînt foarte mici (nu trec de 10^{-12} cm). În jurul acestui nucleu atomic circulă Z electroni pe traiectorii închise asemenea planetelor în sistemul solar. Viteza lor de rotaţie este astfel, încît forţa centrifugă rezultată să fie egală cu forţa electrostatică de atracţie dintre nucleu şi electroni. În opoziţie cu Thomson, Rutherford susţine că poziţia reciprocă a electronilor poate să sufere schimbări în interiorul atomului. Astfel s-a format modelul nuclear şi dinamic al atomului lui Rutherford (fig. 3).

Cu ajutorul acestui model atomic se pot explica o serie de fenomene, dar acest model nu corespunde legilor electrodinamicii. Într-adevăr, mişcarea electronilor pe traiectorii curbe este o mişcare accelerată şi trebuie să fie însoţită — conform legilor electrodinamicii — de o emisie de lumină de frecvenţă corespunzătoare. În particular, la o rotaţie circulară uniformă frecvenţa radiaţiei este egală cu cea de rotaţie. O consecinţă a acestei emisii este faptul că energia sistemului atomic se va micşora şi împreună cu aceasta şi distanţa între electron şi centrul nucleului, deci va creşte şi perioada de rotaţie.

În felul acesta, frecvenţa de rotaţie şi deci cea a radiaţiei creşte mereu şi atomul va emite un spectru continuu; în acelaşi timp electronul se apropie mereu de nucleu şi peste o mică fracţiune de secundă trebuie să cadă pe nucleu. Aceasta înseamnă că atomul ca atare îşi pierde existenţa. Deci, după legile electrodinamicii clasice, atomul lui Rutherford ar trebui să fie instabil şi să emită un spectru continuu în tot decursul existenţei sale. Ambele concluzii sînt în completă contradicţie cu experienţa.

Conform legilor electrodinamicii clasice, unui electron îi corespunde numai o singură linie spectrală, iar aceasta îşi schimbă poziţia după cum electronul se mişcă pe o orbită sau pe alta, datorită stării sale de energie. Chiar hidrogenul care nu dispune decît de un singur electron, are mai multe spectre: în lumina vizibilă seria lui Balmer, în ultravioletă seria lui Lyman, iar în cea infraroşie seria lui Paschen.

Pentru înlăturarea acestor dificultăţi, Bohr (1913) a procedat la tratarea modelului lui Rutherford prin prisma concepţiilor noi ale teoriei lui Planck, care presupune că lumina este emisă în cantităţi discrete de energie ε numite cuante $\varepsilon = h\nu$, unde $h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg.s (h este constanta lui Planck), iar ν este frecvenţa radiaţiei. Bohr a păstrat valabilitatea legilor mecanicii şi electrostaticii clasice, dar a introdus postulatul, că electronii se rotesc pe orbite circulare bine determinate, pe acelea pe care momentul impulsului electronului este un multiplu întreg al cantităţii $\frac{h}{2\pi}$:

$$mr^2\omega = \mu \frac{h}{2\pi},$$

unde r este raza orbitei electronului, ω viteza unghiulară, m masa şi μ un număr întreg.

Dacă presupunem (pentru simplificare luăm cazul atomului de hidrogen) că electronul este reţinut pe o astfel de orbită, datorită faptului că forţa de atracţie electrostatică a nucleului este egală cu forţa centrifugă de rotaţie a electronului, se obţine:

$$\frac{e^2}{r^2} = mr\omega^2.$$

Din aceste două ecuaţii putem calcula pe r şi pe ω:

$$r = \frac{\mu^2 h^2}{4\pi^2 me^2} (\mu = 1, 2, \ldots) \qquad \omega = \frac{8\pi^3 me^4}{h^3 \mu^3} (\mu = 1, 2, \ldots),$$

Dacă $\mu = 1$, raza r corespunzătoare este de ordinul 10^{-8}, care coincide cu rezultatele experimentale. Acest fapt în sine arată că teoria lui Bohr conţine adevăruri esenţiale.

Energia electronului constă în suma energiei sale cinetice şi potenţiale. Măsura energiei potenţiale este lucrul mecanic efectuat cînd îndepărtăm electronul la infinit, învingînd forţa de atracţie a nucleului:

$$E_p = -\frac{e^2}{r}.$$

Energia cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} K\omega^2 = \frac{1}{2} mr^2 \omega^2,$$

unde $K = mr^2$, este momentul de inerţie al electronului. Înlocuind pe r şi pe ω prin valorile lor obţinem:

$$E_p = -\frac{4\pi^2 me^4}{h} \cdot \frac{1}{\mu^2} \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

$$E_c = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

Energia totală:

$$E = E_p + E_c = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

Observînd că valorile lui h, e, m care figurează în formulele lui r, ω şi E sînt constante pentru un acelaşi sistem şi numai μ (aşa zis, număr cuantic) variază, luînd valorile 1, 2,..., rezultă că raza r a orbitei, viteza unghiulară ω şi energia E a electronului nu variază continuu, ci după valori discrete, sau ceea ce înseamnă acelaşi lucru: pentru μ = const. electronul se mişcă pe aceiaşi obită, cu aceiaşi viteză unghiulară şi păstrează o energie constantă. Menţionăm că în dezvoltarea acestei teorii de către Sommerfeld sînt posibile şi orbite eliptice (1915).

Să vedem pe scurt cum se explică spectrul hidrogenului cu ajutorul modelului de atom al lui Bohr. La diferite distanţe de nucleu electronul dispune de diferite energii şi anume, energia este cu atît mai mare cu cît electronul este mai îndepărtat. Orice sistem are tendinţa să ocupe cea mai joasă stare de energie. În consecinţă, electronul s-ar mişca pe orbita cea mai apropiată de nucleu, dacă nu ar fi supus niciunei acţiuni exterioare. Dacă însă, atomul absoarbe o radiaţie oarecare sau se ciocneşte cu un alt atom, şi energia astfel primită echivalează cu diferenţa de energie corespunzătoare orbitei sale şi a uneia dintre orbitele exterioare, atunci atomul însuşindu-şi această energie, electronul va sări pe orbita corespunzătoare. Orbitele exterioare nu sînt însă stabile şi deci electronul va reveni pe o orbită mai apropiată de centru, radiind diferenţa de energie corespunzătoare celor două orbite. După ordinea în care electronul ocupă orbitele obţinem diferite serii spectrale.

Aşadar pe orbita de număr cuantic μ_a energia electronului este $E_{\mu a}$ pe orbita cu rază mai mică şi de număr cuantic μ_b, energia este $E_{\mu b}$; dacă electronul sare de pe orbita aparţinînd numărului cuantic μ_a pe cea definită de μ_b, variaţia de energie (energia radiantă) va fi:

$$\Delta E = E_{\mu a} - E_{\mu b} = h\nu.$$

Înlocuind valorile corespunzătoare, găsim:

$$h\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{\mu_b^2} - \frac{1}{\mu_a^2}\right).$$

Dacă introducem numărul de undă $n = \frac{1}{\lambda}$ (λ este lungimea de undă), care e în strînsă legătură cu frecvenţa ν şi anume $\nu = \frac{c}{\lambda}$, deci $n = \frac{\nu}{c}$, obţinem ecuaţia generală care ne dă liniile spectrului hidrogenului:

$$n = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{\mu_b^2} - \frac{1}{\mu_a^2}\right).$$

Aceasta cuprinde formulele seriilor spectrale ale hidrogenului deduse în mod empiric de Balmer, Paschen şi Lyman. Astfel, dacă punem

$\mu_b = 1, \quad \mu_a = 2, 3, 4, \ldots$
$\mu_b = 2, \quad \mu_a = 3, 4, 5, \ldots$
$\mu_b = 3, \quad \mu_a = 4, 5, 6, \ldots$

obţinem pe rînd seriile lui Lyman, Balmer şi Paschen. În aceste formule figurează constanta lui Rydberg (R) definită în mod empiric; ea corespunde cantităţii $\frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}$ din ecuaţia dedusă în mod teoretic de Bohr.

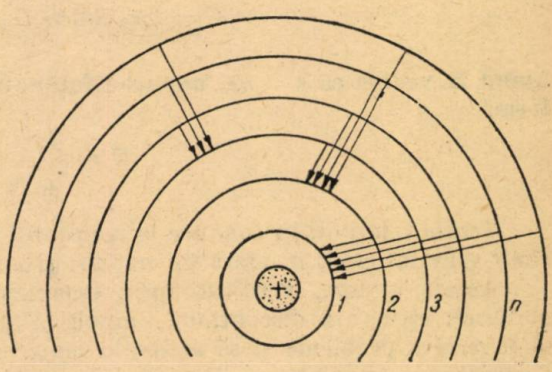


Fig. 4. — Schema nivelelor de energie ale atomului de hidrogen dată de Bohr.

Deci, dacă electronul sare de pe orbita exterioară pe cea de număr cuantic 1 (fig. 4), obţinem o linie din seria lui Lyman; dacă sare pe orbita de număr cuantic 2 avem o linie din seria Balmer, iar pe orbita de număr cuantic 3, o linie din seria Paschen. Frecvenţa este cu atît mai mare (lungimea de undă mai mică), cu cît orbita pe care o părăseşte electronul are număr cuantic mai ridicat (este mai îndepărtată). Aceste fapte au dat posibilitatea să se explice origina diferitelor linii spectrale ale hidrogenului. Astfel seria lui Lyman se află în cea mai mare parte în regiunea ultravioletă a spectrului, seria lui Balmer în cea vizibilă, iar a lui Paschen în regiunea infraroşie a spectrului.

Observăm că teoriile lui Bohr şi ale lui Bohr-Sommerfeld, care au dat rezultate bune în cazul atomului de H, nu pot să explice diferite fenomene care se produc în atomii mai complicaţi, cum ar fi de exemplu, stabilitatea ionului H_2^+. Ulterior, cercetările au fost continuate în această direcţie de către Bohr şi alţi fizicieni (W. Pauling, K. Niessen). Aceste încercări—pornite din teoria lui Bohr-Sommerfeld—au condus la rezultatul că ionul de H_2^+ ar fi, din punct de vedere energetic nestabil (adică energia ionului H_2^+ ar avea o valoare mai mică decît energia atomului de H), ceea ce nu corespunde cu realitatea. Nici alte încercări făcute pe baza teoriei lui Bohr-Sommerfeld pentru a explica spectrul atomului de He, n-au avut succes.

Aceste dificultăţi au constituit un imbold pentru căutarea altor căi în rezolvarea problemei atomului. Ccrcetările întreprinse sînt strîns legate de dorinţa de a da o explicaţie concepţiei lui Bohr, care este incompatibilă cu punctul de vedere al fizicii clasice. Să ne oprim un moment la această problemă.

Pornind de la proprietatea cuantică a luminii, un anumit fenomen — efectul lui Compton — a dat naştere la ideea, că unei cuante de lumină (foton) îi aparţine nu numai energia $h\nu$, ci şi impulsul G, mărime căreia aplicîndu-i relaţia $E = mc$ sau $h\nu = mc^2$ şi luînd în consideraţie faptul că viteza de propagare a unui foton este c (viteza luminii), obţinem:

$$G = mc, \text{ adică } G = \frac{h\nu}{c}.$$

Avînd în vedere că $c = \nu\lambda$, impulsul fotonului se poate scrie şi în următoarea formă:

$$G = \frac{h}{\lambda}.$$

Teoria relativităţii conduce la rezultatul că fotonul trebuie să aibă într-un cîmp gravitaţional, în afară de impuls, şi energie potenţială.

Aceste ipoteze, verificate prin experienţă, atribuie luminii proprietăţile materiei: structură discontinuă, impuls şi greutate. Prin urmare, ar fi firesc să inversăm problema şi să atribuim materiei proprietăţile luminii, în special proprietatea ondulatorie. Această idee aparţine lui **Louis de Broglie** (1924) şi ea stă la baza teoriei mecanicii ondulatorii.

După această teorie, mişcarea oricărei particule materiale este totdeauna legată de un proces ondulatoriu, lungimea de undă fiind în acelaşi raport faţă de impulsul particulei, în care este lungimea de undă a fotonului faţă de impulsul acestuia. Corespunzător ecuaţiei $G = \frac{h}{\lambda}$ trebuie să avem:

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

dacă m este masa particulei iar v viteza ei.

De Broglie a arătat că ipoteza undelor materiale duce la un rezultat important, dacă o aplicăm unei particule. Astfel, se ştie că de-a lungul unei unde, acele puncte se găsesc în concordanţă de fază la un moment dat, a căror distanţă este un număr întreg de lungimi de undă. Pe de altă parte, într-un punct al unei unde nu pot exista concomitent două stări de mişcare. Rezultă — pe baza ipotezei undelor materiale — că numai atunci poate exista o mişcare uniformă pe o traiectorie închisă, dacă lungimea traiectoriei este un număr întreg de lungimi de undă:

$$l = \mu\lambda \quad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Într-adevăr, dacă această condiţie n-ar fi satisfăcută, atunci ar exista un punct sau chiar mai multe puncte ale traiectoriei, în care am avea două stări de mişcare în acelaşi timp. Aceasta însă contrazice proprietatea de bază a undei.

În cazul unei orbite circulare de rază r avem: $l = 2\pi r$ deci,

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

şi avînd în vedere că pe baza datelor anterioare avem $\lambda = \frac{h}{mv}$, rezultă:

$$mrv = \mu \frac{h}{2\pi} \quad \text{sau} \quad mr^2\omega = \mu \frac{h}{2\pi} \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

care nu este altceva decît postulatul lui Bohr.

Deci concepţia lui Bohr este o consecinţă necesară a aceleia a lui L. de Broglie.

Ipoteza lui L. de Broglie conform căreia microparticulele posedă atît proprietăţi corpusculare, cît şi proprietăţi ondulatorii, a făcut posibilă, după cum am văzut, crearea unei noi teorii şi anume aceea a mecanicii ondulatorii. Această teorie a fost dezvoltată de Schrödinger (1926) şi de către Dirac (1928) ducînd la mecanica ondulatorie relativistă. Metoda ei de cercetare este o metodă statistică: ea studiază sisteme compuse dintr-un număr foarte mare de atomi. Această teorie permite să se determine valorile posibile de energie ale atomului de H, dar nu poate preciza poziţia electronului într-un atom de H ales din mulţimea statistică. Pe baza metodei statistice, mecanica ondulatorie poate preciza numai probabilitatea de a găsi electronul într-o anumită porţiune a spaţiului. Pentru acest motiv nu putem vorbi în cadrul macanicii ondulatorii, despre poziţia şi traectoria electronului. Totuşi, mecanica ondulatorie constituie o treaptă importantă în dezvoltarea teorilor despre atom.

În studiul mulţimilor statistice intervin întotdeauna abateri (dispersii) de la valorile medii statistice. Dacă în mecanica clasică se poate determina în orice moment poziţia (coordonatele centrului de greutate) unei particule şi viteza — deci impulsul ($p = mv$), nu tot aşa stau lucrurile cînd este vorba de o microparticulă (de exemplu, un electron), deoarece în acest caz existenţa proprietăţilor ondulatorii ale micropaticulei aduce o limitare a acestei posibilităţi. Din faptul că poziţia microparticulei este cunoscută cu o anumită precizie Δx şi impulsul corespunzător Δp_x de asemenea, Heisenberg (1927) a ajuns ia stabilirea unei relaţii

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqq \frac{h}{2\pi},$$

unde h este constanta lui Planck. Această inegalitate este cunoscută sub numele de *relaţia de nedeterminare a lui Heisenberg.*

Această relaţie reprezintă acea limitare a aplicabilităţii noţiunilor clasice la microparticule. Ea exprimă în fond faptul că, cu cît este determinată mai bine poziţia microparticulei, cu atît este mai puţin determinată valoarea impulsului ei, şi invers. Acest rezultat a dat naştere la multe interpretări idealiste în fizica modernă. Astfel, deseori se întîlneşte următoarea interpretare: Microparticulele — electronii, protonii, fotonii — sînt foarte mici, însă ele au în fiecare moment coordonate bine determinate şi un impuls bine determinat. Rădăcina acestei concluzii greşite rezultă din faptul că relaţia lui Heisenberg nu este privită de unii fizicieni din punctul de vedere statistic.

Determinarea traiectoriei electronului necesită elaborarea unei mecanici ondulatorii nestatistice. Necesitatea elaborării unei astfel de teorii a fost subliniată în ultimii ani de către L. de Broglie şi Vigier; aceşti fizicienii se străduiesc de cîţiva ani, să elaboreze o teorie generală care să aibă acest caracter. Rezultatele lor n-au fost încă aplicate la cazuri speciale. În această ordine de idei menţionăm că şi la noi se fac astfel de cercetări (Z. Gábos, R. Deutsch şi I. Maurer). Ca rezultat al acestor cercetări s-a explicat stabilitatea ionului H_2^+, pornind de la existenţa obiectivă a traiectoriei electronului; s-a determinat forma acestei traiectoiei şi distanţa electronului faţă de cei doi protoni din ionul H_2^+.

Ideile noastre despre atom se dezvoltă continuu. Nici un model atomic nu poate fi privit ca definitiv, deoarece ca orice teorie ştiinţifică şi teoria despre atom este aproximativă şi relativă.

Scopul acestui articol este să dea o imagină a dezvoltării teoriei atomului arătîndu-se pe cît posibil, şi cauzele care au determinat elaborarea diferitelor teorii.

NOTE MATEMATICE

Asupra fascicolelor de cercuri

1. Se dau în acelaşi plan, două cercuri de centre O_1, O_2 şi raze R_1, R_2; se ştie că locul geometric al punctelor M din acelaşi plan, astfel ca raportul puterilor lor faţă de cele două cercuri să fie constant, este un cerc aparţinînd fasciculului (O_1, O_2). Într-adevăr, din definiţie:

$$\frac{\overline{MO_1}^2 - R_1^2}{MO_2^2 - R_2^2} = k = \text{constant, sau} \tag{1}$$

$$\overline{MO_1}^2 - k \cdot \overline{MO_2}^2 - (R_1^2 - k \cdot R_2^2) = 0. \tag{2}$$

Fie O punctul care împarte segmentul O_1O_2 în raportul k, adică $\frac{OO_1}{OO_2} = k$ (punctul O se află între O_1 şi O_2 sau în exterior, după cum k este negativ sau pozitiv). Dacă socotim segmentele de pe linia centrelor orientate, se arată uşor că avem:

$$\overline{OO_1} = \frac{k}{1-k}\,\overline{O_1O_2}\,; \qquad \overline{OO_2} = \frac{1}{1-k}\,\overline{O_1O_2}\,,$$

iar relaţia lui *Stewart* aplicată punctelor M, O, O_1, O_2 dă:

$$\overline{MO_1}^2 \cdot \overline{OO_2} + \overline{MO}^2 \cdot \overline{O_2O_1} + \overline{MO_2}^2 \cdot \overline{O_1O} + \overline{O_1O} \cdot \overline{OO_2} \cdot \overline{O_2O_1} = 0.$$

Înlocuind pe $\overline{OO_1}$, $\overline{OO_2}$ cu valorile precedente şi ţinînd seamă de semne, rezultă:

$$\overline{MO}^2 = \frac{\overline{MO_1}^2 - k\,\overline{MO_2}}{1-k} + \frac{k}{(1-k)^2}\,\overline{O_1O_2}^2 \quad \text{sau} \tag{3}$$

$$\overline{MO}^2 = \frac{R_1^2 - kR_2^2}{1-k} + \frac{k}{(1-k)^2}\,\overline{O_1O_2}^2 = \text{constant}. \tag{4}$$

Deci, locul geometric al punctului M este cercul (Γ) cu centrul în O și raza ρ dată de egalitatea:

$$(5) \qquad \rho = \frac{\pm 1}{1-k}\sqrt{k^2 R_2^2 - k(R_1^2 + R_2^2 - d^2) + R_2^2}$$

(am notat cu d distanța centrelor cercurilor date).
Cercul loc gemetric este real dacă trinomul:

$$T(k) = k^2 R_2^2 - k(R_1^2 + R_2^2 - d^2) + R_1^2$$

este pozitiv; rezultă că numărul k nu poate fi arbitrar. Discriminantul este:

$$S = (R_1^2 + R_2^2 - d^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 =$$

$$= (R_1 + R_2 + d)(R_1 + R_2 - d)(R_1 - R_2 - d)(R_1 - R_2 - d).$$

Dacă cercurile sînt tangente, unul din ultimii trei factori este nul, $\delta = 0$, $T(k)$ este pozitiv oricare ar fi k și deci cercul (Γ) este în acest caz real, ori care ar fi k.

Dacă cercurile sînt secante, atunci ultimul factor este negativ, iar toți ceilalți sînt pozitivi, $\delta < 0$, $T(k)$ este totdeauna pozitiv și rezultă aceiași concluzie ca și în cazul precedent.

Dacă cercurile sînt exterioare, atunci al doilea factor este negativ, al treilea este pozitiv și al patrulea este negativ (primul factor este totdeauna pozitiv), $\delta > 0$, trinomul $T(k)$ are rădăcinile reale și distincte, ambele negative, căci produsul lor este evident pozitiv, iar suma este negativă, așa cum rezultă din inegalitățile

$$R_1 + R_2 < d; \quad (R_1 + R_2)^2 < d^2 \text{ și } a\ fortiori,\ R_1^2 + R_2^2 - d^2 < 0.$$

În acest caz, k nu poate lua decît valori în afara rădăcinilor trinomului $T(k)$.

Dacă cercurile sînt interioare ($R_1 > R_2$) avem:

$$R_1 + R_2 - d < 0;\ R_1 - R_2 + d > 0,\ R_1 - R_2 - d < 0;$$

rezultă $\delta > 0$, $T(k)$ are rădăcinile reale și distincte, ambele pozitive, căci produsul lor este pozitiv, iar suma lor este deasemenea pozitivă, așa cum rezultă din inegalitățile:

$$R_1 - R_2 > d, \quad (R_1 - R_2)^2 > d^2 \text{ și } a\ fortiori,\ R_1^2 + R_2^2 - d^2 > 0.$$

Și în acest caz, k nu poate lua decît valori în afara rădăcinilor trinomului $T(k)$.

În fine, dacă cercurile sînt concentrice avem $d = 0$ și $\delta = (R_0^2 - R_2^2)^2$, deci $T(k)$ este pozitiv oricare ar fi k.

Puterea unui punct P din planul cercurilor față cu cercul (Γ) are expresia: are expresia:

$$\overline{PO}^2 - \rho^2 = \frac{\overline{PO_1}^2 - k\cdot\overline{PO_2}^2}{1-k} + \frac{k}{(1-k)^2}\overline{O_1O_2}^2 - \frac{R_1^2 - kR_2^2}{1-k} - \frac{k}{(1-k)^2}\overline{O_1O_2}^2,$$

$$\text{sau } (6)\ \overline{PO}^2 - \rho^2 = \frac{(\overline{PO_1}^2 - R_1^2) - k(\overline{PO_2}^2 - R_2^2)}{1-k}.$$

(Am ținut seamă de relația (3), care este valabilă pentru orice punct M).

Dacă acum presupunem că punctul P se află pe axul radical al cercurilor O_1, O_2 și notăm cu h puterea lui față de cele două cercuri, adică:

$$\overline{PO_1}^2 - R_1^2 = \overline{PO_2}^2 - R_2^2 = h,$$

rezultă, $\overline{PO}^2 - \rho^2 = h$, deci punctul P are puteri egale față de cele trei cercuri O_1O_2, O și cum ele au centrele coliniare, înseamnă că au același ax radical sau formează un fascicol.

Dacă cercurile O_1, O_2 sînt concentrice, se vede din (1) că locul geometric este un cerc concentric cu ele.

2. — Să considerăm punctele M ale cercului (Γ) exterioare cercurilor O_1, O_2; notînd cu α_1, α_2 unghiurile sub care se văd aceste cercuri din punctul M, avem:

$$\overline{MO_1} = \frac{R_1}{\sin\frac{\alpha_1}{2}}; \qquad \overline{MO_2} = \frac{R_2}{\sin\frac{\alpha_2}{2}}.$$

Înlocuind în (1) și făcînd calculele, se obține:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2}} = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{k}. \tag{7}$$

Relațiile (1), (7) sînt echivalente dacă toate punctele lui (Γ) sînt exterioare cercurilor O_1, O_2; altfel (7) corespunde numai punctelor lui (Γ) exterioare lui O_1, O_2 (dacă astfel de puncte există).

Presupunînd $k = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, rezultă din (7) că $\alpha_1 = \alpha_2$ adică, *din punctele cercului* (Γ) *cercurile* O_1, O_2 *se văd sub unghiuri egale*; acest cerc este *cercul de similitudine* al cercurilor date. Relația (1) arată că el *este locul punctelor pentru care raportul puterilor față de* O_1, O_2 *este egal cu raportul patratelor razelor lor.*

Această definiție este preferabilă celei precedente care folosește unghiuri și deci consideră numai anumite puncte; cele două definiții de altfel coincid pentru anumite situații speciale (de exemplu, cercurile exterioare).

Revenind la relația (1) o putem scrie în cazul de față

$$\frac{\overline{MO_1}^2 - R_1^2}{\overline{MO_2}^2 - R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

sau

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{8}$$

Avem astfel, altă definiție a cercului de similitudine: *Locul punctelor astfel ca raportul distanțelor la centrele* O_1, O_2 *să fie egal cu raportul razelor cercurilor.*

Dacă S_1, S_2 sînt centrele de similitudine ale celor două cercuri cercul de similitudine este chiar cercul de diametru S_1S_2. Dacă presupunem că cercurile date sînt secante în A, B, iar $k = \pm\frac{R_1}{R_2}$, obținem două cercuri din fasci-

colul (O_1, O_2) şi avînd centrele S_1 S_2; tangentele în A, B la aceste cercuri sînt tocmai bisectoarele unghiurilor formate de tangentele în aceste puncte la cercurile date. De aici şi denumirea care se dă acestor cercuri, de *cercuri bisectoare* ale cercurilor date.

3. — *Se dau cercurile O_1, O_2 de raze R_1, R_2 secante în A şi B; o secantă variabilă dusă prin A taie cele două cercuri în M_1, M_2. Locul punctului M de pe această secantă, astfel ca* $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = k = constant$, *este un cerc din fasciculul (O_1, O_2).*

În adevăr, relaţia de definiţie se mai scrie astfel:

$$\frac{\overline{MM_1} \cdot \overline{MA}}{\overline{MM_2} \cdot \overline{MA}} = k,$$

deci, punctul M este astfel că raportul puterilor faţă de cele două cercuri O_1, O_2 este constant şi teorema este demonstrată.

Vom dovedi acum reciproca: *Dacă luăm un cerc oarecare* (Γ) *din fasciculul (O_1, O_2), o secantă variabilă dusă prin A taie cercurile O_1, O_2 (Γ) respectiv în M_1, M_2, M astfel ca* $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \text{const.}$

Această reciprocă este o consecinţă a reciprocei primei teoreme. *Dacă (Γ) este un cerc din fasciculul (O_1, O_2), atunci raportul puterilor unui punct variabil de pe (Γ) faţă cu O_1, O_2 este constant.*

Demonstraţia este imediată; fie O centrul lui (Γ) şi $k = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}$. Locul punctelor pentru care raportul puterilor faţă de O_1, O_2 este constant, k, am văzut că este un cerc (Γ') din fascicolul (O_1, O_2) avînd centrul în O. Dar este aproape evident că nu există decît un singur cerc aparţinînd unui fascicol şi avînd centrul într-un punct dat de pe linia centrelor, deci cercurile (Γ'), (Γ) coincid şi propoziţia este stabilită.

4. — Mai elementar, propoziţia precedentă se poate demonstra astfel: Fie C,D punctele unde perpendiculara în B pe AB taie cercurile O_1, O_2; este clar că unghiurile AM_1C, AM_2D sînt drepte, deci dreptele CM_1, DM_2 sînt paralele. Dreapta CD taie cercul (Γ) în I, diametral opus lui A; dreapta IM este, evident, perpendiculară pe secantă, deci paralelă cu dreptele CM_1, DM_2 şi avem $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{IC}{ID}$.

Punctele C, D fiind diametral opuse lui A în cercurile O_1, O_2, iar O_1O_2 fiind paralelă cu CD, rezultă:

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{IC}{ID} = \frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}},$$

O fiind centrul cercului (Γ). Din aceste relaţii se deduce că raportul $\frac{MM_1}{MM_2}$ este constant, atunci cînd M descrie cercul (Γ); reciproc, dacă M variază astfel ca acest raport să fie constant, perpendiculara în M pe AM taie pe CD

în punctul fix I (care împarte pe CD în același raport constant) și deci, locul geometric este un cerc din fasciculul (O_1, O_2) — cercul de diametru AI.

Dacă în locul punctului A am fi dus secanta prin punctul B, locul geometric al noului punct este evident același cerc.

În particular, avem următoarea teoremă cunoscută: *Dacă prin unul din punctele A,B, comune la două cercuri se duce o secantă variabilă care taie cercurile în punctele M_1, M_2, locul geometric al mijlocului segmentului M_1M_2 este un cerc trecînd prin A,B și avînd centrul la mijlocul distanței centrelor.*

Dacă cercurile sînt tangente, $A \equiv B$, iar cercul loc geometric este tangent acestora în punctul A.

Aplicații de tot felul se pot face în legătură cu teoremele generale demonstrate; iată una din ele:

Două cercuri O_1, O_2 se taie în A și B; tangentele în A la cele două cercuri le taie a doua oară în punctele A_1, A_2, iar tangentele în B la cercuri, le taie a doua oară în B_1, B_2. Mijloacele segmentelor $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BB_2}$ împreună cu punctele A, B sînt șase puncte așezate pe același cerc.

Cezar Coșniță, Conferențiar Inst. Construcții

Demonstrarea unor teoreme folosind arii

1. Teorema lui Pappus. *Produsul distanțelor unui punct oarecare de pe cerc, la două laturi opuse ale unui patrulater înscris în acel cerc, este egal cu produsul distanțelor aceluiași punct la celelalte două laturi.*

Fie $ABCD$ patrulaterul înscris și M un punct oarecare pe cerc; d_1, d_2, d_3, d_4 sînt distanțele de la M la AB, BC, CD și AD. Triunghiurile MAD și MCD, avînd unghiurile din A și din C egale (corespund la arce egale), raportul ariilor lor este egal cu raportul produselor laturilor acestor unghiuri, adică

$$\frac{\text{aria } MAD}{\text{aria } MCD} = \frac{MA \cdot AD}{MC \cdot CD} = \frac{d_4 \cdot AD}{d_3 \cdot CD}, \text{ de unde}$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{d_4}{d_3}. \tag{1}$$

De asemenea, unghiul MCB fiind suplementul lui MAB, avem:

$$\frac{\text{aria } MBC}{\text{aria } MBA} = \frac{MC \cdot CB}{MA \cdot AB} = \frac{d_2 \cdot CB}{d_1 \cdot AB} \text{ de unde}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{2}$$

Înmulțind (1) cu (2), găsim: $d_1d_3 = d_2d_4$.

2. Teorema lui Ptolomeu: *În orice patrulater înscriptibil produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.*

Fie $ABCD$ patrulaterul inscriptibil. Ducem coarda $AE = BC$ și fie F intersecția dreptelor AB și EC. Se observă că triunghiul AEF este egal cu triunghiul BCF ($BC = AE$ și unghiurile egale). Rezultă că patrulaterele $ABCD$ și $AECD$ sînt echivalente. Dacă notăm cu α unghiul diagonalelor primului patrulater, aria lui este $\frac{AC \cdot BD \sin \alpha}{2}$; pe de altă parte, aria celuilalt patrulater este:

$$\frac{AE \cdot AD \sin EAD}{2} + \frac{DC \cdot CE \sin DCE}{2} = \frac{\sin \alpha}{2} (BC \cdot AD + DC \cdot AB),$$

căci $AE = BC$, $CE = AB$, unghiul EAD este suplementar cu unghiul DCE, iar acesta este egal cu $\frac{\text{arc } BC + \text{arc } AD}{2} = \alpha$.

Egalînd expresiile ariilor celor două patrulatere și simplificînd cu $\frac{\sin \alpha}{2}$ rezultă

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + DC \cdot AB.$$

3. Teorema lui Robert Simpson: *Proiecțiile unui punct oarecare de pe un cerc pe laturile unui triunghi înscris sînt în linie dreaptă.*

Fie ABC triunghiul înscris și A_1, B_1, C_1 respectiv proiecțiile unui punct M de pe cerc pe laturile BC, AC și AB. Considerăm relația lui Ptolomeu demonstrată în teorema precedentă, aplicată la patrulaterul $ABCM$:

(3) $$MA \cdot BC + MC \cdot AB = MB \cdot AC.$$

Împărțim egalitatea (3) cu $MA.MB \,.\, MC$ și obținem:

(4) $$\frac{BC}{MB \cdot MC} + \frac{AB}{MA \cdot MB} = \frac{AC}{MA \cdot MC}.$$

Ținînd seamă că unghiul BMC = unghiul BAC avem:

$$\text{aria } BMC = \frac{MB \cdot MC \sin A}{2} = \frac{BC \cdot MA_1}{2}, \text{ de unde}$$

(5) $$MB \cdot MC = \frac{BC \cdot MA_1}{\sin A},$$

(6) $$MA \cdot MB = \frac{AB \cdot MC_1}{\sin C}$$

și

(7) $$MA \cdot MC = \frac{AC \cdot MB_1}{\sin B}.$$

Înlocuind în (4) numitorii prin valorile lor din (5) ,(6) și (7) găsim:

$$\frac{\sin A}{MA_1} + \frac{\sin C}{MC_1} = \frac{\sin B}{MB_1}$$

sau:

$$MB_1 \cdot MC_1 \sin A + MA_1 \cdot MB_1 \sin C = MA_1 \cdot MC_1 \sin B$$

sau:

$$\text{aria } MB_1C_1 + \text{aria } MA_1B_1 = \text{aria } MA_1C_1.$$

Această relație arată că punctele A_1, B_1 și C_1 sînt colineare.

4. Teorema lui Pitagora generalizată: *Într-un triunghi oarecare pătratul unei laturi care se opune unui unghi ascuțit (obtuz) este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus (plus) de două ori una din aceste două laturi înmulțită cu proiecția celeilalte pe ea.*

Fie triunghiul ABC cu unghiul obtuz. Notăm $BC = a$, $AC = b$, AD = proiecția lui AC pe AB. Trebuie să găsim egalitatea:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD.$$

Construim pătratul ACB_2B_1 în afara triunghiului ABC și avem următoarea egalitate între arii:

$$S(ABB_1) + S(AB_1B_2) + S(AB_2C) - S(ABC) = a^2$$

sau:

(1) $$c.B_1E + a(a + AF) + b \,.\, B_2G - a.\, AF = 2a^2.$$

B_1E este înălțimea corespunzătoare bazei AB în triunghiul ABB_1; B_2G este înălțimea corespunzătoare bazei AC în triunghiul $AB_2\ C$, iar AF este înălțimea pe BC în triunghiul ABC

Din egalitatea triunghiurilor BCD şi BB_1E rezultă $B_1E = BD = c + AD_1$ iar din egalitatea triunghiurilor BCH şi B_2CG rezultă $B_2G = CH = b + AH$, BH fiind perpendiculară pe AC. În acest caz, (1) devine:

$$c(c + AD) + a^2 + b(b + AH) = 2a^2$$

sau:

$$b^2 + c^2 + c \cdot AD + b \cdot AH = a^2.$$

Rămîne de arătat că $b.AH = c \cdot AD$, ceeace este evident deoarece aceste produse reprezintă puterea punctului A faţă de cercul cu diametrul BC; dar să dovedim, tot prin arii, şi egalitatea acestor două produse:

$$\frac{S(ABH)}{S(ACP)} = \frac{c \cdot BH}{b \cdot CD} = \frac{BH \cdot AH}{CD \cdot AD};$$

împărţind ultimele rapoarte cu $\frac{BH}{CD}$, rămîne $\frac{c}{b} = \frac{AH}{AD}$, deci $b \cdot AH = c \cdot AD$.

Să considerăm acum cazul laturii AC care se opune unui unghi ascuţit (fig. 4). Construim patratul AA_1C_1C în afara triunghiului ABC şi avem relaţia de arii:

$$S(A_1BC_1) + S(BCC_1) - S(AA_1B) - S(ABC) = b^2$$

sau:

$$\frac{b(b + BH)}{2} + \frac{a \cdot C_1L}{2} - \frac{c \cdot A_1M}{2} - S(ABC) = b^2,$$

unde C_1L şi A_1M sînt înălţimi în triunghiurile CC_1B şi AA_1B. Din egalitatea triunghiurilor ACF şi CC_1L rezultă $C_1L = CF = a - BF$, iar din egalitatea triunghiurilor ACD şi AA_1M rezultă $A_1M = AD = BD - c$. Egalitatea de mai sus devine:

$$\frac{b^2 + b \cdot BH}{2} + \frac{a(a - BF)}{2} - \frac{c(BD - c)}{2} - S(ABC) = b^2$$

sau

$$a^2 + c^2 - a \cdot BF - c \cdot BD = b^2.$$

Rămîne să mai arătăm că $a \cdot BF = c \cdot BD$; or aceste produse reprezintă puterea punctului B faţă de cercul cu diametrul AC, patrulaterul $AFCD$ fiind inscriptibil. Să dovedim însă, tot pe bază de arii, egalitatea acestor două produse:

$$\frac{S(ABF)}{S(BCD)} = \frac{AF \cdot BF}{CD \cdot BD} = \frac{c \cdot AF}{a \cdot CD}.$$

Împărţim ultimele două rapoarte cu $\frac{AF}{CD}$ şi rămîne:

$$\frac{BF}{BD} = \frac{c}{a} \text{ sau } a \cdot BF = c \cdot BD.$$

Deci,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BF \text{ sau } b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD.$$

Corneliu Georgescu, profesor Craiova

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Paradox hidraulic.** — Într-o sticlă de lampă răsturnată se aşază trei dopuri drepte, unul la extremitatea îngustă a cilindrului, altul la extremitatea părţii late, iar al treilea în cilindrul îngust şi anume, acolo unde începe creşterea diametrului cilindrului (fig. 1).

Aceste trei dopuri trebuie să realizeze o închidere etanşă. Dopul intermediar este străbătut de două găuri prin care trec două tuburi de sticlă (eventual

două paie mai groase de secară). Tubul *B* atinge partea de deasupra a dopului intermediar şi extremitatea sa inferioară şi se opreşte la doi centimetri aproape de baza sticlei. Aici trebuie un dublu cot pe care îl obţinem cu ajutorul a două mici dopuri, cum se vede în detaliul din stînga al figurii (jos). Tubul orizontal va avea acelaşi diametru ca şi tubul *B*, iar distanţa între dopuri să fie de aproape un centimetru. Tubul vertical care formează al doilea cot va avea doi centimetri lungime şi un diametru foarte mic. Tubul *A* este de aceiaşi grosime cu tubul *B*; el străbate dopul intermediar pentru a se opri sus aproape de tot de dopul superior, iar extremitatea sa inferioară ajunge pînă la o mică distanţă de capătul tubului ce formează al doilea cot.

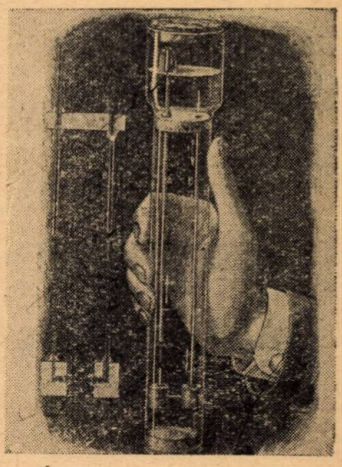


Fig 1

Ordinea de lucru pentru montarea acestui dispozitiv este următoarea: se fixează dopul inferior la extremitatea îngustă a cilindrului; se găureşte dopul intermediar şi se introduce prin cele două orificii tuburile *A* şi *B*; se construieşte dublul cot cu ajutorul celor două dopuri mici, introducîndu-se într-unul din dopuri (cel din dreapta figurii) capătul inferior al tubului *B*; se coboară totul în sticla de lampă fixîndu-se bine dopul intermediar picurînd în jurul lui ceară roşie. Se umple pe trei sferturi cu apă micul rezervor superior şi se pune dopul de sus.

Dacă ţinem tubul vertical în mînă vom observa un mic jet de apă care se produce la capătul tubuşorului ce formează în partea de jos al doilea cot. Apa nu cade însă la fundul sticlei de lampă, cum ne-am aşteptat, ci vom vedea că ea este absorbită de către tubul *A* şi urcă pînă la extremitatea sa superioară, pentru a reveni apoi în micul rezervor.

Apa a ieşit deci din rezervor prin gura tubului *B* şi revine în rezervor prin gura tubului *A* aflată la un nivel mai ridicat. Se pare că se răstoarnă toate ideile admise referitoare la curgerea lichidelor, care nu pot să se ridice mai sus decît punctul lor de plecare.

Iată însă, cum se petrec lucrurile: nu este vorba de o mişcare perpetuă deoarece nu întreaga cantitate de apă revine în rezervorul superior; o parte cade la baza cilindrului, iar o altă parte este aspirată prin tubul *A* în rezervor, în virtutea vidului parţial creat în acest rezervor prin curgerea lichidului.

Acest fenomen curios durează cîteva minute în timpul cărora lichidul coboară, urcă în parte pentru a coborî din nou etc. Cînd el s-a terminat se scoate dopul inferior pentru a evacua lichidul, apoi se pune la loc; se pune din nou apă în rezervorul superior, se astupă la fel ca la început şi dispozitivul este pregătit pentru o nouă experienţă.

2. **Capilaritate.** — Se pun cîteva beţe de chibrituri pe apa aflată într-un vas (lighean). Aşezarea lor se face în stea, unele lîngă altele. Dacă se scufundă în apă o bucată de săpun astfel, încît vîrful bucăţii de săpun să fie centrul stelei formate din beţele de chibrituri, se constată că de îndată toate chibriturile se îndepărtează brusc de centrul stelei dispunîndu-se radial la oarecare distanţă (fig. 2), ca şi cum le-ar fi teamă de săpun.

Dacă se introduce în acelaşi loc în apă capătul unei bucăţi de zahăr cubic se constată că toate beţele de chibrituri se reped spre bucata de zahăr. Chibriturile pot fi înlocuite prin beţişoare de lemn avînd forma unor peştişori, pentru a face experienţa mai atractivă.

Cum ne explicăm acest fenomen? Se ştie că suprafaţa lichidelor se comportă ca o membrană elastică foarte subţire a cărui forţă de contracţie variază cu natura lichidului.

Fig. 2

Bucata de săpun dizolvîndu-se în apă (în centrul stelei formate din beţişoare) micşorează elasticitatea membranei în partea dinspre interior şi beţişoarele se supun tracţiunii exterioare. Avem de-a face cu un fenomen de capilaritate în care se pune în evidenţă existenţa a ceea ce în fizică se numeşte tensiunea superficială a lichidelor.

Ascensiunea apei în bucata de zahăr determină un curent care merge de la marginea vasului către bucata de zahăr; acest curent readuce beţişoarele de chibrituri la mijlocul vasului.

3. **Tăiere prin dilatare.** — Dacă avem o sticlă de vin sau de apă al cărui gît este spart putem înlătura partea stricată prin tăiere.

Pentru aceasta se umple sticla respectivă cu ulei pînă la înălţimea la care vrem ca ea să fie tăiată neted. Sticla trebuie să fie aşezată pe o masă perfect orizontală. Se afundă brusc în ulei extremitatea unui vătrai înroşită în foc (fig. 3), se aude o plesnitură şi se constată că sticla a fost tăiată ras la suprafaţa lichidului. Putem transforma astfel o sticlă spartă într-un vas prezentabil; un pahar ştirbit va putea fi transformat într-unul nou, procedînd ca mai sus.

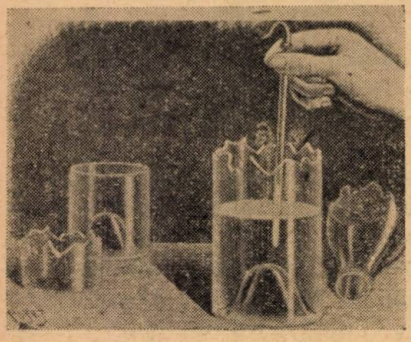


Fig. 3

Scoţînd în diferite reprize diferite cantităţi de ulei şi tăind de fiecare dată sticla aşa cum s-a procedat anterior ea va putea fi tăiată într-o serie de inele de sticlă.

Cum se explică fenomenul? Sticla este un corp rău conducător de căldură şi îi trebuie un oarecare timp, mai ales dacă este groasă, pentru ca temperatura înaltă comunicată părţii interioare să se transmită părţii din afară şi să se provoace dilataţia acesteia. Dacă creşterea de temperatură este bruscă — aşa cum se întîmplă în experienţa descrisă — dilataţia nu poate să se facă decît la interior şi deci are loc ruperea.

În această experienţă este desigur vorba de o sticlă ordinară şi nu de o sticlă călită care poate suporta variaţiile brusce de temperatură.

4. **Vasul lui Tantal** — Găuriţi extremitatea inferioară a unei coji de ou larg deschisă la celălalt capăt şi introduceţi prin gaura făcută un tub de sticlă (eventual un pai de secară).

Se va acoperi cu un degetar extremitatea tubului care pătrunde în ou foarte aproape de fundul acestui degetar, însă fără să-l atingă. Extremitatea

inferioară a tubului va traversa o rondelă de dop servind de suport pentru coaja de ou, şi în care înfigem oblic trei furculiţe formînd un fel de trepied (fig. 4).

Pentru a face etanşă îmbucătura tubului şi a cojii de ou se pun cîteva picături de ceară roşie care va servi în egală măsură şi să lipească baza oului pe rondela de dop, uşor scobită în formă de cupă.

În partea stîngă a figurii se arată exact modul de construcţie. Aşezaţi un pahar sub dispozitivul astfel construit şi iată-vă gata să repetaţi experienţa cunoscută în fizică sub numele de « vasul lui Tantal » şi care se bazează pe teoria sifonului.

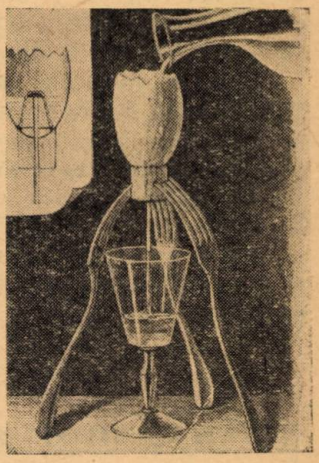


Fig. 4

Ajunge pentru aceasta să turnaţi apă în coaja de ou; această apă urcă pînă ce nivelul său atinge înălţimea degetarului; din acest moment sifonul este amorsat, o curgere bruscă de apă se produce prin tub în pahar şi oul se va goli de toată apa pe care o conţine. Dacă continuaţi să turnaţi în mod regulat apa dintr-o sticlă în coaja de ou, veţi constata că oul se goleşte printr-o curgere intermitentă şi periodică.

În industrie sînt aparate care reproduc « vasul lui Tantal »; ele se folossesc pentru antrenarea materiilor solide care sînt depozitate pe fundul rezervoarelor unde se strîng anumite scursori. O mică cantitate de apă curgînd în mod continuu umple treptat rezervorul respectiv; cînd apa a atins un anumit nivel, un clopot formînd sifonul este amorsat şi rezervorul este golit în cîteva secunde producînd în mod periodic captarea apei destinate să mături toate depunerile solide de pe fundul rezervorului.

5. **Invîrtirea unei roţi cu ajutorul unui magnet.** — Construim o roată uşoară al cărei butuc să fie o rondelă de dop în jurul căreia se înfig patru spiţe de cupru. La extremităţile acestor spiţe se vor face cu pila, patru crestături destinate să primească un cerc de sîrmă foarte subţire de fier. În centrul butucului se înfige perpendicular pe planul roţii astfel construite, un ac de tricotat care va constitui arborele vertical şi va servi de suport pentru această roată. Acest arbore trebuie să se sprijine la partea sa inferioară menţinîndu-se perfecta sa verticalitate. Pentru aceasta trebuie construit soclul aparatului.

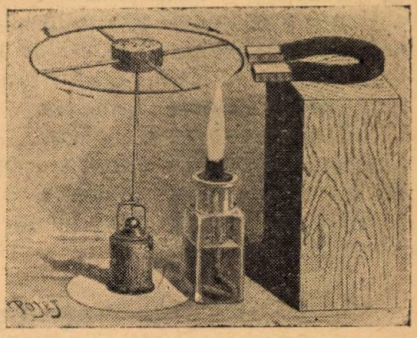


Fig. 5

Se lipeşte baza unui dop pe o rondelă de carton; la partea sa de sus se fixează cu ceară roşie pe dop un mic nasture puţin concav, şi pe acest nasture o mărgea mare de sticlă. Această mărgea va servi ca bază pentru acul de tricotat formînd pivotul; acest pivot se va propti în concavitatea nasturelui care are rolul de lagăr vertical.

Dintr-un ac cu gămălie se poate face un mic inel, prin răsucirea lui. Cele două capete ale acului răsucit se înfig în dop de o parte şi de alta a năsturelului; acul de tricotat va trece prin acest inel înainte de a intra în mărgea şi aceste două reazeme vor asigura poziţia sa verticală. S-a construit astfel o roată orizontală foarte uşoară gata pentru a se roti cu frecări aproape nule (fig. 5).

La o mică distanţă de roată se aşază un magnet în formă de potcoavă pe un suport oarecare şi în planul roţii. Roata este în echilibru în faţa acestui magnet pentru că cele două braţe ale magnetului exercită acţiunea lor asupra două porţiuni egale din circonferinţa sa.

Dacă se va încălzi cu o lampă de spirt (aragaz) o porţiune a roţii situată în faţa unuia dintre braţele magnetului, această porţiune se înroşeşte şi îndată se va observa că roata începe să se învîrtească încet şi continu, porţiunea încălzită tinzînd totdeauna să se depărteze de magnet.

Explicaţia acestui fenomen este următoarea: la temperatura obişnuită fierul este atras de magnet însă, prin încălzire la roşu închis (circa 600°) nu mai este atras de magnet. Partea rece a roţii este deci mai atrasă de magnet decît partea caldă şi roata se pune în mişcare de rotaţie în sensul indicat de săgeată pe figură.

V. A.

NOUTĂŢI DIN ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ

1. Metale fibroase

Un nou aspect fizic al metalelor — starea fibroasă — descoperit de curînd se pare să aibă perspectiva unor variate şi numeroase aplicaţii.

Folosind pentru metale tehnica de fabricaţie a ţesăturilor şi a hîrtiei, cercetătorii au obţinut prin amestecul intim al fibrelor metalice, materiale uşoare şi poroase deosebit de rezistente. Fibrele se separă prin filtrare de lichidul în care se confecţionează. Se obţine astfel o masă din fibre încîlcite, care se presează aşa încît se produce o sudare perfectă a fibrelor unele de altele.

Punerea la punct a acestei tehnici arată de asemenea că este foarte uşor de executat prin acest procedeu obiecte dé forme tot atît de complicate ca acelea obţinute prin metalurgia pulberilor, cu deosebirea că în acest caz rezistenţa lor este mult mai mare. Desigur dimensiunile fibrelor, adică lungimea şi diametrul, precum şi faptul dacă fibra este rectilinie sau în spirală influenţează în mod diferit asupra însuşirilor materialului.

Una din primele aplicaţii a metalelor fibroase este aceea de a mări rezistenţa ceramicii refractare întrebuinţată pentru confecţionarea tuburilor de la avioanele cu reacţie. Într-adevăr, piesele supuse la temperaturi înalte devin casante, însă dacă în ele se incorporează foi de metal fibros, devin foarte rezistente.

2. Perspective de realizare în U.R.S.S.

În decursul celui de-al şaselea plan cincinal (1956—1960), Uniunea Sovietică prevede construirea a zece reactori nucleari. Afară de aceasta se află în studiu motoarele atomice, de exemplu motoarele atomice pentru navele spărgătoare de gheaţă, care vor putea să rămînă 2—3 ani pe mare fără să se apro-

vizioneze cu combustibil. În 1960 U.R.S.S. va produce redioizotopi în cantitate echivalentă cu 10.000 t de radiu.

Este prevăzută de asemenea construcţia unui accelerator de 50 miliarde de electron-volţi.

3. Sursă luminoasă deosebită

De curînd a fost realizată o sursă luminoasă, care poate funcţiona mai mulţi ani fără curent electric. Ca şi cifrele luminoase de pe cadranele ceasornicelor, o astfel de sursă luminează pe baza unor săruri de radiu şi sulfură de zinc, care emit lumină vizibilă cînd pe ele cad raze beta, emise în acest caz de stronţiu radioactiv care se dezintegrează. Asemenea suprafeţe luminoase sînt vizibile de la o distanţă de 30 m; strălucirea lor nu slăbeşte timp de mai mulţi ani.

4. Antiparticule

Se ştie că atomul este alcătuit dintr-un nucleu, format din protoni şi neutroni, iar în jurul nucleului există un înveliş electronic. Se ştie de asemenea, că protonul este o particulă cu sarcină electrică pozitivă, neutronul o particulă cam de aceiaşi masă, însă neîncărcată electric, iar electronul este o particulă a cărei masă este de aproximativ 1840 ori mai mică decît a protonului şi posedă sarcină electrică negativă.

În anul 1931 a fost descoperit electronul pozitiv — *pozitronul.* Această antiparticulă este extrem de instabilă. Întîlnindu-se cu un electron negativ, apare, echivalent masei celor două particule, o cantitate de energie sub formă de raze gama, conform cunoscutei legi a lui Einstein ($W = mc^2$).

La 21 septembrie 1955, conform prevederilor teoretice s-a confirmat cu certitudine existenţa protonului negativ — *antiprotonul.*

Antiprotonul constituie un mare succes pentru teoreticieni şi o strălucită realizare pentru experimentatori. Cînd protonul accelerat cu ajutorul bevatronului, întîlneşte un neutron, acesta este prefăcut în două particule: un antiproton şi un proton. Energia comunicată de bevatron protonilor este de 6,2 miliarde electron-volţi, iar energia purtată de fiecare dintre cele două particule rezultate prin desfacerea neutronului este de cîte 1 miliard electron-volţi.

Masa antiprotonului este egală cu aceea a protonului pozitiv. El este de asemenea foarte instabil. Nu poate fi păstrat decît în vid absolut, unde se poate mişca la nesfîrşit. Însă îndată ce se atinge de un perete, el se uneşte cu un proton pozitiv şi instantaneu se eliberează energie, conform legii amintite mai sus.

Nu de mult cercetările teoretice au prevăzut existenţe *antineutronului,* antiparticulă corespunzătoare neutronului, avînd aceeaşi masă ca şi aceasta, fiind de asemenea lipsită de sarcină, însă avînd un moment magnetic invers aceluia al neutronului. Teoretic se prevede chiar tehnica producerii lui: lansarea unui antiproton accelerat asupra unui nucleu atomic. Antineutronul rezultă conform următoarei reacţii nucleare:.

Antiproton + proton → antineutron + neutron (sau antiproton).

După părerea fizicianului Segré, descoperirea antineutronului nu-i decît o chestiune de timp.

V.A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2246

Să se găsească rădăcinile reale ale sistemului de ecuații:

$$x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0,$$
$$2y^3 + 3\ xy^2 + x^2y + 20 = 0.$$

(Olimpiada matematică, clasa IX, 1956 București)

Soluție. — Adunînd ecuațiile sistemului obținem:

(1) $$x + y = -4$$

de unde $y = -(x + 4)$.

Înlocuind pe y prin valoarea sa în funcție de x, în prima ecuație a sistemului, obținem:

$$x^2 + 12\ x + 27 = 0$$

de unde $x_1 = -3$, $x_2 = -9$.

Înlocuind pe x în relația (1) obținem $y_1 = -1$, $y_2 = 5$.

Problema 2250

Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 (x + a) = \sin (x + 2b) \sin (x + 2c).$$

Se cere să se ajungă la o formă căreia să i-se poată aplica logaritmii.

Aplicație numerică: $a = -50°$; $b = 65°$, $c = 35°$. *Rezolvare fără table.*

(Olimpiada matematică, clasa X, 1956, București)

Soluție. — Pentru rezolvarea acestei ecuații vom ține seamă de următoarea relație:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos [(\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

Avem:

$$\sin^2 (x + a) = \frac{1}{2} [1 - \cos (2x + 2a)],$$

$$\sin (x + 2b) \sin (x + 2c) = \frac{1}{2} [\cos (2b - 2c) - \cos (2x + 2b + 2c)].$$

Așa dar, ecuația dată se mai scrie:

$$\frac{1}{2} [1 - \cos (2x + 2a)] = \frac{1}{2} [\cos (2b - 2c) - \cos (2x + 2b + 2c)]$$

sau

$$\cos (2x + 2a) - \cos (2x + 2b + 2c) = 1 - \cos (2b - 2c)$$

sau încă

$$\sin (2x + a + b + c) \sin (b + c - a) = \sin^2 (b - c)$$

de unde

$$\sin (2x + a + b + c) = \frac{\sin^2 (b - c)}{\sin (b + c - a)}.$$

În cazul particular: $a = -50°$, $b = 65°$, $c = 35°$ avem:

$$\sin (2x + 50°) = \frac{1}{2}.$$

Problema 2264

Dispunem de două elemente galvanice identice cărora vrem să le determinăm forța electromotoare și rezistența interioară. În acest scop se montează în serie mai întîi, apoi în paralel, și în ambele cazuri montajul este făcut să debiteze curent într-o rezistență de 2 ohmi. Se constată, că în primul caz curentul obținut este 0,75 A, iar în al doilea caz 0,6 A. Să se afle caracteristicile acestor două elemente

* * *

Soluție. — Intensitățile obținute cînd cele două elemente sînt legate în serie și apoi în paralel, sînt date de formulele.

$$I_s = \frac{nE}{nr_i + r_e}, \qquad I_p = \frac{nE}{r_i + nr_e},$$

$$(1) \quad 0{,}75 = \frac{2E}{2r_i + 2}; \qquad (2) \quad 0{,}6 = \frac{2E}{r_i + 4}.$$

Rezolvînd sistemul (1) și (2) găsim:

$$r_i = 1 \text{ ohm}, \quad E = 1{,}5 \text{ volt}.$$

Problema 2268

Trei drepte concurente în O intersectează o a patra dreaptă ce nu trece prin O, în punctele A, B, C. Prin, S un punct oarecare al dreptei OA, ducem drepte paralele la OB și OC care intersectează dreapta ABC în B_1 și C_1.

Să se găsească locurile geometrice ale picioarelor bisectoarelor din B_1 și C_1 ale triunghiului SB_1C_1.

Fl. Constantinescu, student Cluj

Soluție. — Fie N piciorul bisectoarei din B al triunghiului OBC, iar M piciorul bisectoarei din B_1 al triunghiului SB_1C_1. Atunci putem scrie:

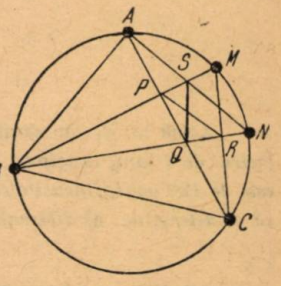
$$\frac{MS}{MC_1} = \frac{B_1S}{B_1C_1} = \frac{BO}{BC} = \frac{NO}{NC}$$

adică,

$$\frac{MS}{MC_1} = \frac{NO}{NC}.$$

Din egalitatea acestor două rapoarte rezultă că punctele A, M, N sînt colineare și cum A și N sînt fixe, rezultă că locul lui M este dreapta AN. Analog, celălalt loc căutat este tot o dreaptă ce treec prin C.

Observare. — Punctul S putea fi oricum pe dreaptă OA' nu neapărat cum îl arată figura. De asemenea punctul S putea fi pe dreapta OB sau OC.



Problema 2271

Într-un cerc se înscrie un triunghi ABC și se împarte arcul AC în trei părți egale cu punctele M și N astfel ca $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NC}$. *Să se arate că dreptele PR și AN sînt paralele. De asemenea și dreptele SQ și MC sînt paralele. Se dau* $P \equiv (BM; AC)$, $R \equiv (BN; MC)$, $Q \equiv (BN; AC)$ *și* $S \equiv (AM; BM)$.

Șt. Donescu, student București

Soluție. — Avem $\sphericalangle BPC = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AM}}{2}$ și $\sphericalangle BRC = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{MN}}{2}$. Dar $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN}$.

Deci $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BRC$ și rezultă că patrulaterul $BPRC$ este inscriptibil.

Deci $\sphericalangle PBR = \sphericalangle C = \sphericalangle ANB$ și rezultă că dreptele PR și AN sînt paralele.

Analog obținem că $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle A = \sphericalangle BMC$ și rezultă că dreptele SQ și MC sînt paralele.

Problema 2275

Într-un triunghi, P fiind punctul de pe mediana AA_1 colinear cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, există relația:

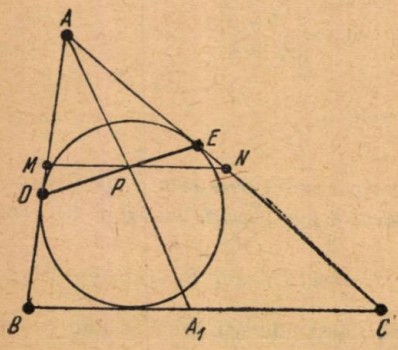
$$(1) \qquad \cos\frac{C-B}{2} = \frac{A_1A}{A_1P}\cos\frac{C+B}{2}.$$

Laturile cu punctele de tangență sînt cele ce formează unghiul A. (Enunț generalizat).

* * *

Soluție dată de **Paul R. Popescu** student București. — Fie MN paralela dusă prin P la BC. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AMN la transversala DPE avem:

$$\frac{EN}{EA}\cdot\frac{PM}{PN}\cdot\frac{DA}{DM} = 1.$$



Cum $PM = PN$ și $EA = DA = p - a$ rezultă $DM = EN$ sau $AD - AM = AN - AE$ deci $AM + AN = b + c - a$, dar $AM = c\dfrac{AP}{A_1A}$ și $AM = b\dfrac{AP}{A_1A}$; deci: $\dfrac{AP}{A_1A}(c+b) = c + b - a$ sau $(c+b)\left(1-\dfrac{AP}{A_1A}\right) = a$ și $c + b = \dfrac{A_1A}{A_1P}a$. De unde $\sin C + \sin B = \dfrac{A_1A}{A_1P}\sin A$.

Transformînd în produse și simplificînd obținem:

$$\cos\frac{C-B}{2} = \frac{A_1A}{A_1P}\cos\frac{C+B}{2}.$$

Observare. — Relația (1) admite și o reciprocă, adică dacă există relația (1) punctele DPE sînt colineare.

Cînd P se confundă cu G, centrul de greutate, obținem problema 2275 căci $A_1A = 3\cdot A_1G$.

Soluție II. Conform problemei 1301 G.M.F.—B 7/954, avem în cazul de față: $\dfrac{AB}{AD}+\dfrac{AC}{AE} = 3$. Dar $AD = AE = p - a$. Deci $b + c = 3(p-a)$ adică $b + c = 3a$, rezultînd

$$\cos\frac{B-C}{2} = 3\cos\frac{B+C}{2}.$$

Problema 2368

Avem un dinam excitat în derivație. Firul derivat care bobinează electromagnetul are diametrul de 1 mm, *lungimea de* 1385 m *și rezistivitatea de* 0,017 *ohmi. Cunoscînd că f.e.m totală este de* 120 *volți, intensitatea curentului indus de* 100 *amperi și rezistența în indus de* 0,05 *ohmi să se determine*: a) *diferența de potențial utilă*; b) *randamentul dinamului.*

* * *

Soluție. — a) Diferența de potențial utilă se află scăzînd din f.e.m. totală, pe aceea a indusului:

f.e.m. (totală) = 120 V; f.e.m. (indus) = $100\cdot 0{,}05 = 5$ V. Deci, E (util) $= 120 - 5 = 115$ V.

b) Randamentul dinamului este dat de raportul dintre energia electrică utilă (W) și energia totală (W_1):

$$\eta = \frac{W}{W_1}.$$

Dar energia electrică este dată de produsul intensității curentului și diferența de potențial respectivă.

Pentru a afla energia electrică utilă (W) trebuie aflată intensitatea (I) a curentului în circuitul exterior. Această intensitate se determină scăzînd din intensitatea totală (I_1) intensitatea curentului din firul derivat inductor (i), deci:

$$I = I_1 - i.$$

Pe I_1 îl cunoaștem (100 amperi), iar i îl determinăm după legea lui Ohm:

$$i = \frac{115}{r}, \text{ însă } r = \rho \frac{l}{s} = 0{,}017 \frac{1385}{0{,}785} \approx 30 \text{ ohmi}$$

deci:

$$i = \frac{115}{30} \cong 3{,}83 \text{ amperi.}$$

Înlocuind în formula intensității, avem:

$$I = 100 - 3{,}83 = 96{,}17 \text{ amperi.}$$

Deci $W = 96{,}17 \cdot 115$, iar $W_1 = 100 \cdot 120$.

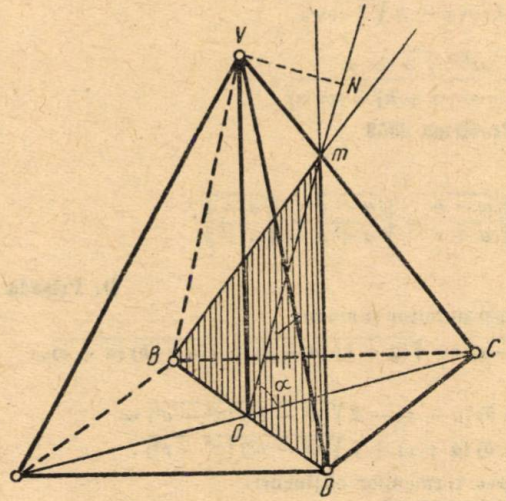
Randamentul dinamului $\eta = \dfrac{W}{W_1} = \dfrac{96{,}17 \times 115}{100 \times 120} = 0{,}92.$

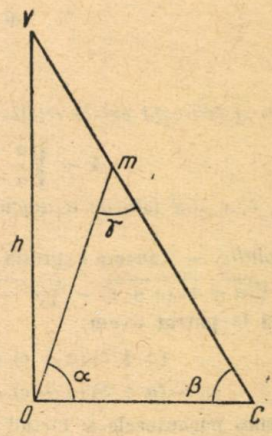
Problema 2356

Într-o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a și înălțimea h, se face o secțiune ce trece printr-o diagonală a bazei și face cu planul bazei unghiul α. Să se afle volumul piramidei ce are ca bază secțiunea făcută și ca vîrf, vîrful piramidei date ($\alpha < 90°$).

Radu Stroe, elev Ploești

Soluție. — V = volumul pir. $VMBD = \dfrac{\text{aria } MDB \times VN}{3} = \dfrac{MO \times BD \times VN}{6}$.





Avem $BD = \dfrac{A\sqrt{2}}{2}$. Mai departe, din triunghiul dreptunghic VON, unde $VO = H$, $\sphericalangle VOM = 90° - \alpha$, avem:

$$VN = VO \sin (VOM) = h \sin (90° - \alpha)$$

Rezultă că $V = \dfrac{MO \cdot a\sqrt{2} \cdot h \cdot \cos \alpha}{6}$.

Mai avem de calculat pe MO

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad VO = h \quad ; \quad VO = OC \operatorname{tg} \beta;$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \beta \quad ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}$$

sau:

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{h\sqrt{2}}{a} \; ; \; \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{h\sqrt{2}}{a} \; ; \text{ sau}$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{2h^2}{a^2}, \text{ deci}$$

$$\sin^2 \beta \cdot a^2 = 2h^2 - \sin^2 \beta \cdot 2h^2 \; ; \; \sin \beta = \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$$

deci $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul MOC avem:

$$\frac{MO}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \gamma} \text{ sau}$$

$$\frac{MO}{\sin \beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin [180 - (\alpha + \beta)]},$$

de unde:

$$MO = \frac{\sin \beta \cdot a\sqrt{2}}{2 \sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \beta \cdot a\sqrt{2}}{2 (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}.$$

Înlocuim şi obţinem

$$MO = \frac{ah}{a \sin \alpha + h\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

Deasemenea obţinem

$$V = \frac{a^2 h^2 \sqrt{2} \cos \alpha}{12 (a \sin \alpha + h\sqrt{2} \cos \alpha)}.$$

Problema 2359

În ce triunghi există relaţia:

$$1 - \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+c}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului.

D. Prisada

Soluţie. — Aducem expresia la acelaşi numitor şi avem:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} - \sqrt{(a-b)(a-c)} = \sqrt{(a+b)(a-c)} + \sqrt{(a-b)(a+c)}.$$

Ridicînd la patrat avem:

$$(a+b)(a+c) + (a-b)(a-c) - 2\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} =$$

$$= (a+b)(a-c) + (a-b)(a+c) + 2\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Dezvoltînd parantezele şi făcînd reducerea termenilor obţinem:

$$\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = bc.$$

Printr-o nouă ridicare la patrat, obţinem:

$$a^2 (a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

Deoarece $a \neq 0$ rezultă că

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Aşadar, triunghiul este dreptunghic.

Problema 2360

Să se afle rădăcinile reale ale ecuației

$$\left(3 \cdot \frac{3-x}{1+x}\right)^4 + \left(3 \cdot \frac{1+x}{3-x}\right)^4 = 6562.$$

A. Iorgulescu, elev București

Soluție. — Notăm $\frac{3-x}{1+x} = y$. În acest caz, ecuația dată devine:

$$(3y)^4 + \left(\frac{3}{y}\right)^4 = 6562$$

sau:

$$81\ y^8 - 6562\ y^4 + 81 = 0.$$

de unde:

$$y_1^4 = 81\ ;\ y_1^4 = \frac{1}{81}.$$

$$1^\circ \cdot y^4 = 81;\ (y-3)(y+3)(y^2+9) = 0;\ y_1 = 3;\ y_2 = -3.$$

Să examinăm fiecare caz în parte:

$$\frac{3-x}{1+x} = 3 \text{ de unde rezultă } x_1 = 0;$$

$$\frac{3-x}{1+x} = -3 \text{ de unde rezultă } x_2 = -3.$$

$$2^\circ.\ y^4 = \frac{1}{81}\ ;\ \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y^2 + \frac{1}{9}\right);\ y_3 = \frac{1}{3}\ ;\ y_4 = -\frac{1}{3}.$$

La fel ca mai sus avem:

$$\frac{3-x}{1+x} = \frac{1}{3}\ ;\ x_3 = 2;$$

$$\frac{3-x}{1+x} = -\frac{1}{3};\ x_3 = 5.$$

Prin urmare, ecuația dată admite patru rădăcini reale $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$ și patru imaginare.

Problema 2363

Să se rezolve ecuația:

$$(x-1)(x-11)(x-21)(x-31) = 7161.$$

* * *

Soluție dată de **Gh. I. Stoian,** București — Notăm:

$$x - 1 = u - 3v\ ;\ x - 11 = u - v$$

$$x - 21 + u + v\ ;\ x - 31 = u + 3v.$$

Din aceste relații deducem: $v = -5$. Așa dar, ecuația dată se mai scrie:

$(u-3v)(u-v)(u+v)(u+3v) = 7161$ sau $(u^2-v^2)(u^2-9v^2) = 7161$.

Ținînd seamă că $v = -5$, se obține ecuația:

$(u^2-25)(u^2-225) = 7161$ sau $u^4 - 250\,u^2 - 3536$ de unde $u^2 = 125 \pm 131$:

$$u_1 = 16,\ u_2 = -16,\ u_3 = i\sqrt{6},\ u_4 = -i\sqrt{6}.$$

Avem:

$$x = u + 16,$$

$$x_1 = u_1 + 16 = 16 + 16 = 32,$$

$$x_2 = u_2 + 16 = -16 + 16 = 0,$$

$$x_3 = u_3 + 16 = i\sqrt{6} + 16,$$

$$x_4 = u_4 + 16 = -i\sqrt{6} + 16.$$

Problema 2365

Pistonul unei mașini cu vapori execută 50 lovituri pe minut. Știind că lungimea cilindrului este de 0,8 m, *iar secțiunea de 3,50* dm *să se calculeze presiunea în condensator pentru ca puterea mașinii să fie de 5300* W. *Se consideră presiunea vaporilor în cazan de 180* cm *coloană mercur.*

V. Atanasiu

Soluție. — Puterea exprimată în waţi înseamnă jouli pe secundă:

$$P = \frac{W\,(\text{în } J)}{1} = 5300\ W.$$

Lucrul mecanic este efectuat de cele 50 lovituri. Pentru o singură lovitură a pistonului lucrul mecanic este $W = f.l$, unde f este forţa care acționează asupra pistonului, iar l este lungimea cursei pistonului, adică lungimea cilindrului. Dar:

$$f = pS = (180 - x)\ 350 \cdot 13{,}6$$

unde x este presiunea în condensator.

Pentru 50 de lovituri ale pistonului lucrul mecanic va fi:

$$W = (180 - x)\ 350 \cdot 13{,}6 \cdot 981 \cdot 80 \cdot 50 \text{ ergi.}$$

Însă cele 50 lovituri se fac în timp de un minut. Deci:

$$P = 5300 = \frac{(180 - x)\ 350 \cdot 13{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 80 \cdot 50}{60 \cdot 10^7}\ \text{W.}$$

de unde se scoate valoarea lui $x \approx 8$ cm coloană mercur.

Problema 2401

a) *Plăcile unui condensator au 1 dm², distanța între ele este 1 mm și sînt separate printr-un strat de mică. Condensatorul se încarcă de la o sursă cu tensiunea de 5000 V. Să se calculeze cantitatea de electricitate înmagazinată și energia condensatorului.*

b) *Se întrerupe legătura cu sursa, apoi se scoate placa de mică, celelalte elemente rămînînd neschimbate. Ce devine diferența de potențial între plăci și energia condensatorului? Cum se aplică în cazul de față, principiul conservării energiei? Se dă constanta dielectrică pentru mică — 7.*

* * *

Soluție. — a) Capacitatea unui condensator plan este dată de formula

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \tag{1}$$

unde ε = constanta dielectrică a materialului dintre armături; S = suprafața armăturilor; d = distanța între armături.

Sarcina fiecărei armături este dată de formula:

$$Q = CV, \tag{2}$$

unde V este diferența de potențial dintre armături.

Energia condensatorului este dată de formula

$$W = \frac{1}{2} QV. \tag{3}$$

Să aplicăm prima formulă în sistemul CGSE; relația între unitățile CGSE și MKSA (practice) este: 1 farad = $9 \cdot 10^{22}$. CGSE. Avem:
$S = 1\ m^2 = 10^2\ cm^2$; $d = 1$ mm $= 10^{-1}$ cm; $\varepsilon = 7$ u. CGSE. Rezultă:

$$C = \frac{7 \times 10^4}{4 \times 3{,}14 \times 10^{-1}} \simeq 5{,}57 \cdot 10^4 \text{ u. CGSE} = 5{,}57 \cdot 10^4\ \frac{1}{9 \times 10^{11}}\ \text{farad} =$$

$= 0{,}619 \cdot 10^{-7} = 0{,}0619 \cdot 10^{-6}$ fard $= 0{,}0619$ microfarad Continuăm calculul în sistemul practic, MKSA:

$$Q = CV = 0{,}0619 \cdot 10^{-6} \cdot 5000 = 309 \cdot 10^{-6} \text{ coulombi},$$

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \cdot 309 \cdot 10^{-6} \cdot 5000 = 0{,}775 \text{ jouli}.$$

b) Să notăm C_1, V_1, Q_1, W_1 mărimile înainte de scoaterea plăcii de mică; C_2, V_2, Q_2, W_2 aceleași mărimi după scoaterea plăcii de mică. Avem:

$$Q_1 = C_1 V_1;\ Q_2 = C_2 V_2;\ W_1 = \frac{1}{2} Q_1 V_1;\ W_2 = \frac{1}{2} Q_2 V_2$$

Din formula (1) se vede că $C_2 = \frac{1}{7} C_1$. Pe de altă parte, legătura cu sursa fiind întreruptă, $Q_2 = Q_1$. Rezultă:

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{\frac{1}{7} C_1} = 7 \frac{Q_1}{C_1} = 7 V_1 = 35\,000 \text{ V},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} Q_1 7 V_1 = 7 \cdot \frac{1}{2} Q_1 V_1 = 7 W_1 = 5{,}42 \text{ jouli}.$$

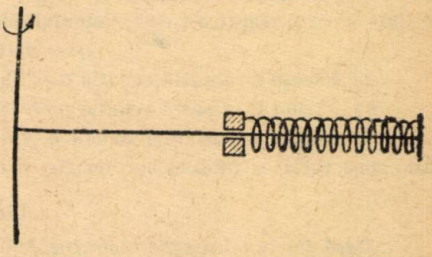
Se vede că energia condensatorului a crescut. Această creștere se datorește faptului că în cursul scoaterii plăcii de mică trebuie depus un lucru mecanic necesar învingerii forțlor de atracție. Acest lucru mecanic se transformă într-o cantitate echivalentă de energie electrică.

Observație. — Un strat de aer de 1 mm nu poate suporta o tensiune de 35 000 V; în consecință, într-un caz real, la scoaterea plăcii de mică ar apare scîntei între armăturile condensatorului.

Problema 2411

a) *O vergea de masă neglijabilă, lungă de* 50 cm, *are unul din capete fixat de un ax orizontal. La celălalt capăt se fixează un pahar cu apă. Să se calculeze numărul de rotații pe secundă pe care trebuie să-l facă vergeaua pentru a evita vărsarea apei.*

b) *Vergeaua este făcută să se rotească cu două rotații pe secundă. Greutatea paharului fiind de* 200 g, *să se calculeze tensiunile în vergea cînd trece prin poziție verticală.*



c) *Se așază vergeaua în poziție orizontală, fixînd la capătul liber un resort, la capătul căruia se află o greutatea de* 200 g, *găurită, care poate aluneca fără frecare pe vergea. Lungimea arcului în poziție liberă fiind de* 20 cm *și știind că arcul se scurtează cu* 1 cm *cînd asupra sa acționează o forță de* 200 g, *să se calculeze scurtarea arcului cînd vergeaua se rotește cu două rotații pe secundă.*

(Cercul de fizică pe Capitală)

Soluție. — a) Fie o cantitate de apă a cărei masă o notăm cu m. Să considerăm cazul cînd paharul se află în partea superioară. Asupra masei m acționează: greutatea proprie: $p = mg$, forța centrifugă $f = m\omega^2 R$. Notînd cu n numărul de rotații pe secundă, avem:

$$\omega = 2\pi n, \text{ și deci: } f = 4\pi^2 mn^2 R.$$

Pentru ca apa să nu curgă, trebuie să avem $f > p$, adică:

$$4\pi^2 mn^2 R > mg, \text{ de unde } \quad n > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Efectuînd calculele, $n > 0{,}705$ rotații pe secundă.

b) Pentru a obține rezultatul în grame-forță, să exprimăm forța centrifugă în sistemul tehnic. Vom avea:

$$m = \frac{p}{g}; \qquad f = 4\pi^2 mn^2 R = \frac{4\pi^2 n^2 Rp}{g}$$

și înlocuind $n = 2$, $R = 50$, $g = 981$, $p = 200$, obținem $f = 1607$ gf.

În consecință, în punctul cel mai de jos, tensiunea în tijă este

$$f + p = 1807 \text{ gf},$$

iar în punctul cel mai de sus,

$$f - p = 1407 \text{ gf}.$$

c) Dacă notăm cu x scurtarea arcului, atunci raza cercului descris de greutate este $30 + x$, iar forța centrifugă:

$$f_c = \frac{4\pi^2 n^2 (30 + x) p}{g} = 32{,}14\,(30 + x).$$

Forța elastică, ce corespunde unei scurtări x, este $f_e = 200\,x$. Egalînd forța centrifugă cu forța elastică, obținem ecuația:

$$32{,}14\,(30 + x) = 200\,x$$

de unde:

$$x \approx 5{,}74 \text{ cm}.$$

Problema 2421

Un barometru cilindric, cu secțiunea 1 cm² *și lungimea* 900 *mm, se află într-o cameră în care presiunea atmosferică este de* 750 mm. *Se introduce deasupra mercurului, o cantitate de* 20 cm³ *aer la presiunea atmosferică.*

a) *Care va fi nivelul mercurului în tubul barometric?*

b) *Cum se va modifica acest nivel dacă presiunea atmosferică crește la* 780 cm?

(Cercul de fizică din Capitală)

Soluție. — Să alegem ca unitate de lungime centimetrul; ca unitate de presiune, cm coloană de mercur.

Fie x înălțimea coloanei de mercur după introducerea aerului, p, presiunea exterioară. Presiunea în camera barometrică va fi $p - x$; aerul ocupă în camera barometrică, un spațiu de $90 - x$ cm și secțiune 1 cm²; volumul său este deci, $90 - x$. Din legea Bolye-Mariotte rezultă:

$$(p - x)(90 - x) = 20 \cdot 75.$$

a) Făcînd în această ecuație $p = 75$, găsim: $x = 43{,}1$ cm.

b) Făcînd în această ecuație $p = 78$, găsim: $x = 44{,}8$ cm.

În ambele cazuri mai există o valoare pentru x, mai mare decît 90 cm, adică decît lungimea totală a tubului barometric, și ca atare, inacceptabilă.

Problema 2430

Dacă într-un triunghi, pătratele laturilor sînt în progresie aritmetică în ordinea a^2, b^2, c^2, *atunci unghiul* B *poate fi cel mult egal cu* 60°.

N. Gheorghiu, Iași

Soluție. — Din ipoteză avem: $a^2 + c^2 = 2b^2$, iar din teorema cosinusului: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. Din acestea două urmează $a^2 + c^2 = 4ac \cos B$, care spune, că unghiul B nu poate fi obtuz.

Relația ultimă se mai scrie:

$$\cos B = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Cum însă, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2$, rezultă $\cos B \geqslant \frac{1}{2}$, care spune că unghiul B poate fi cel mult egal cu 60°.

Problema E: 775

Să se arate că:

$$(1955^2 + 1)(1956^2 + 1) = (1955 \cdot 1956 - 1)^2 + (1955 + 1956)^2.$$

* * *

Soluție. — Să facem următoarea substituire:

$$1955 = a; \quad 1956 = b.$$

Vom avea:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (ab - 1)^2 + (a + b)^2$$

sau:

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = a^2b^2 - 2ab + 1 + a^2 + 2ab + b^2$$

și astfel egalitatea este evidentă.

Problema E: 788

Randamentul unei lămpi cu spirt este de 40 %. Ce cantitate de spirt trebuie arsă într-o lampă de laborator pentru a încălzi 5 litri de apă de la 20°C până la fierbere, știind că puterea calorică a spirtului este 7200 kcal/kg.

* * *

Soluție. — Cantitatea de căldură consumată se poate afla după formula: $Q = m.\, c\, (t_2 - t_1)$. În cazul nostru avem:

$$Q = 5 \cdot 1\, (100° - 20°) = 400 \text{ kcal}.$$

Deci cantitatea de spirt va fi:

$$\frac{400 \text{ kcal}}{7200 \text{ kcal/kg}} = 0{,}056 \text{ l, adică } 56 \text{ ml}.$$

Această cantitate reprezintă numai 40 % din toată cantitatea, adică 2/5. Cantitatea totală este aprox. 140 ml de spirt.

PROBLEME PROPUSE [1])

2583. Punctele materiale $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ în care sînt așezate masele $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ se mișcă cu vitezele $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Să se determine viteza medie a fiecărui punct astfel ca energia lor cinetică să nu varieze.

* * *

2584. Dacă A și B sînt două arce pozitive astfel că $A + B = 150°$ să se arate că maximum lui $\sin A + \cos B$ este $\sqrt{3}$.

C. Ionescu-Țiu

2585. Se dă un cerc cu diametrul AB. Perpendicularele AC și BD taie o tangentă dusă dintr-un punct M de pe cerc, respectiv în punctele C și D. Să se determine poziția punctului M astfel ca diametrele MC și MD să fie în raportul $\frac{m}{n}$.

* * *

2586. Se dau două cercuri exterioare în același plan și o dreaptă (D). Să se ducă o secantă (Δ) paralelă la (D) astfel ca suma coardelor interceptate să fie de lungime l dată.

* * *

---

[1]) Clasa VIII-a; (2588, 2589, 2591, 2598, 2600, 2602) (07, 10–12, 19–21, 23–30). Se primesc soluții până la 15 august, dela elevi și studenți.

2587. Să se dea o demonstrație geometrică identității

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\sec x - 1) = \operatorname{tg} x.$$

Tiberiu Zorapapel, elev București

2588. Producția unei uzine crește în interval de 4 luni astfel: în luna a doua cu 4% față de prima lună; în luna a treia cu 2,6% față de luna a doua; iar în a patra, cu 2,2% față de luna a treia. Să se calculeze creșterea medie lunară, cunoscînd producția de 2400 piese în prima lună.

* * *

2589. În dreptunghiul $ABCD$ înscris într-un cerc, bisectoarea unghiului A taie cercul într-un punct M prin care se duce diametrul MN. El intersectează latura AB în M', iar bisectorea AM întîlnește dreapta ND în N'. Să se arate că M, D, N, B sînt vîrfuri ale unui patrat și că dreapta $M'N'$ este perpendiculară pe diametrul MN.

Ioana Ciorănescu, elevă București

2590. Să se calculeze cu 4 zecimale exacte expresia

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

cînd x tinde către unu.

* * *

2591. Să se demonstreze că orice număr prim p, care divide pe $a^3 + 1$ fără a divide pe $a + 1$, divide pe $(a - 1)^6 - 1$.

C. Ionescu-Țiu

2592. Se dă un unghi xoy și un punct fix A în interiorul unghiului. *a*) Să se ducă o secantă MAN astfel ca produsul $MA \cdot AN$ să fie k, constant; *b*) să se ducă o secantă BAC astfel ca aria triunghiului BOC să fie egală cu latura unui patrat dat de latura l.

* * *

2593. Să se stabilească două șiruri de numere care să tindă către $\sqrt[3]{3}$.

* * *

2594. Într-un patrulater $ABCD$, o dreaptă variabilă ce trece prin punctul comun diagonalelor AC și BD, taie laturile AB și CD în punctele M și N. Să se arate că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} =$ constant.

Gh. Dobrotescu, Predeal

2595. Să se arate că în orice triunghi avem:

$$\sum \sin C\ (\sin C - 2 \sin A \cos 3B) = 16 \sin A \sin B \sin C.$$

M. Stănciulescu, student București

2596. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 3 + \cos 3x.$$

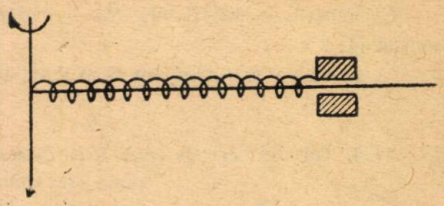
* * *

2597. Fie H ortocentrul unui triunghi oarecare ABC. Să se arate că raza cercului înscris în triunghiul ABC este dată de relația:

$$R + r = \frac{1}{2}(b + c - AH).$$

Gh. I. Bercea

2598. Un corp găurit, greu de 100 g, poate aluneca fără frecare pe o vergea orizontală Corpul este fixat de axul de rotație prin intermediul unui arc lung de 50 cm și care suferă o alungire de 1 cm, la o forță de 100 g, alungirea fiind proporțională cu forța. Să se calculeze alungirea arcului cînd vergeaua se rotește cu 2 rotații pe secundă.



(Cercul de fizică din Capitală)

2599. Pentru a determina conținutul de apă al unei zăpezi umede s-a procedat în felul următor: Într-un vas de fier cîntărind 4 kg și conținînd 10 kg apă la 20°C, s-a introdus 1 kg zăpadă umedă și s-a constatat că temperatura finală este de 14°C. Care este procentul de apă în acea zăpadă umedă?

(Cercul de fizică din Capitală)

2600. Tamburul unei fîntîni cu roată are diametrul de 18 cm pe cînd raza roții fîntînii este de 0,54 m. Pe tambur se află înfășurată o frînghie de greutate neglijabilă, de care atîrnă o găleată de 3 kg, cu o capacitate de 9 litri. Să se calculeze:

a) adîncimea fîntînii, știind că ecoul din fîntînă se aude după 1/5 secunde [de la emiterea unui sunet la suprafața sa;

b) lucrul mecanic necesar pentru a scoate la suprafață o găleată complet plină cu apă;

c) forța ce trebuie aplicată roții pentru ridicarea găleții pline cu apă;

d) puterea folosită și viteza unghiulară de rotire a roții, în ipoteza că se scoate o găleată plină cu apă prin ridicarea ei în mod uniform, în timp de un minut.

Se dă: $g = 10$ m/s și viteza sunetului $V = 340$ m/s.

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2601. Într-un triunghi oarecare ABC se duc înălțimile BB', CC' și se notează cu D mijlocul laturii BC. Simediana AN întîlnește dreptele $B'C'$, $B'D$, $C'D$ respectiv în punctele M, E, F. Să se arate că:

$$\frac{ME}{MF} = \frac{2b^2 - a^2}{2c^2 - a^2}.$$

D. C. Panu

2602. Să se determine numărul: $\overline{ab\,cd}$, știind că $3\,\overline{ab} = \overline{cd}$ și $c + b = 2d$.

C. V. Costăchescu

2603. Să se demonstreze geometric identitatea:

$$\sec^2 a\,(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c) + \sec^2 b\,(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a) + \sec^2 c\,(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b) + \\ + (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a) \cdot (\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c) = 0.$$

Paul R. Popescu, student București

2604. Să se construiască grafic, cu rigla și compasul, un trapez dreptunghic la care se dau laturile paralele, iar diagonalele sînt perpendiculare.

I. Hadîrcă, Breaza

2605. Se dau ecuațiile:

$$x^2 - 3\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \tag{1}$$

$$y^2 - 3\lambda y + 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \tag{2}$$

unde λ este un parametru real.

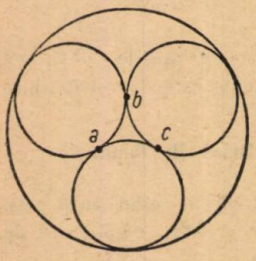
a) Pentru ce valori ale lui λ rădăcinile ecuației (1) sînt cuprinse între rădăcinile ecuației (2) ?

b) Pentru ce valori ale lui λ rădăcinile ecuației (2) sînt cuprinse între rădăcinile ecuației (1) ?

(A se vedea articolul din G.M.F,B. anul 1955 pag. 206).

C. Bulucea, elev Rm. Vîlcea

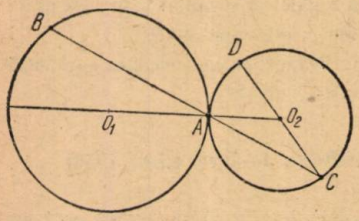
2606. Într-un cerc de rază R se găsesc înscrise trei cercuri egale, tangente între ele două cîte două. Punctele de tangență între aceste cercuri se notează cu a,b,c. Cunoscînd pe R se cere să se calculeze raza r a celor trei cercuri înscrise, precum și aria a, b, c mărginită de arcele de cercuri ab, bc și ca.



(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2607. Se dau două cercuri O_1 și O_2 tangente exterioare în A. Prin A se duce o secantă variabilă care taie cercul O_1 în B și cercul O_2 în C. Diametrul CO_2 taie cercul O_2 în D. Se cere:

a) să se arate că tangenta dusă în B la cercul O_1 este paralelă cu tangenta dusă în C la cercul O_2;

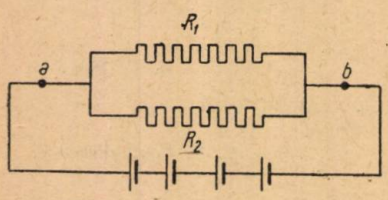


b) să se arate că unghiul BAD este drept;

c) să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABD.

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2608. Patru elemente galvanice care au fiecare o forță electromotoare de 1 volt și o rezistență interioară de 0,5 ohmi sînt legate în serie și debitează curent într-o pereche de rezistențe R_1 și R_2 conectate în paralel ca în schema anexată. Valorile rezistențelor sînt $R_1 = 40$ ohmi și $R_2 = 10$ ohmi. Să se calculeze:



a) curentul total care circulă în circuit:

c) curenții I_1 și I_2 din rezistențele R_1 respectiv R_2;

d) energia degajată în calorii în rezistența R_2, în timp de 3 ore.

(La admiterea în Inst. c.f.r., 1956)

2609. Să se afle viteza cu care electronii emiși de catodul unui tub de descărcare cu aer rărit, atrag anodul, între electrozi aplicîndu-se o tensiune de 6000 volți. Se va neglija viteza inițială a electronilor.

Achim Marinescu

CHESTIUNI DE EXAMEN[1])

SUBIECTELE DATE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ, ETAPA LOCALĂ DIN 17 FEBRUARIE 1957. PENTRU FIECARE GRUPĂ (CLASĂ) TOATE CHESTIUNILE OBLIGATORII; TIMP DE LUCRU 3 ORE (LUCRARE SCRISĂ).

Grupa I — Clasa VIII-a şcoli medii

2610. — Să se simplifice fracţia $\dfrac{x^3+1}{x^5+x-1}$.

2611. — *a)* Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E=\frac{2a\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}},\ \text{pentru } x=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}},$$

ştiind că produsul ab este pozitiv.

b) Se va discuta cazul cînd $a>b$ şi cazul cînd $a<b$.

2612. — Se dă un paralelogram $ABCD$. Notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Notăm cu E şi G intersecţiile diagonalei AC cu DA_1 şi BC_1, iar cu F şi H intersecţiile diagonalei BD cu A_1C şi C_1A. Să se arate că:

a) figura $EFGH$ este tot un paralelogram avînd laturile paralele cu laturile paralelogramului dat.

b) lungimile laturilor EF şi FG sînt a treia parte din lungimile laturilor AB şi BC.

c) punctul E se mai află pe BD_1, iar punctul F se mai află pe AB_1.

d)
$$\frac{CF}{FA_1}=\frac{AF}{FB_1}=\frac{DE}{EA_1}=\frac{CE}{EA}=2.$$

(C. Ionescu-Ţiu)

Grupa II — Clasa IX-a şcoli medii

2613. — Se cunsideră progresia aritmetică: 3, 7, 11,... şi se cere:

a) să se determine termenii progresiei care sînt divizibili cu 5;

b) cîţi din aceşti termeni trebuie să luăm pentru ca suma lor să fie 1050?

(Cezar Ivănescu, Tîrgovişte)

2614. — Fie triunghiul isoscel OAB $(OA=OB)$ în care se dă unghiul $AOB=2u$ şi razar a cercului înscris. Se construeşte apoi, spre vîrful O, un al doilea cerc, tangent laturilor egale şi cercului înscris; apoi un al treilea cerc tangent laturilor egale şi celui de-al doilea cerc, ş.a.m.d. Se cere:

a) Să se arate că razele cercurilor astfel obţinute sînt în progresie geometrică şi să se caculeze raţia acestei progresii în funcţie de unghiul u.

b) Să se calculeze limita sumei lungimilor acestor cercuri cînd numărul lor creşte nemărginit şi să se verifice că această limită este egală cu πh, în care h este înălţimea din O a triunghiului isoscel. Să se interpreteze geometric acest rezultat.

(Cezar Ivănescu, Tîrgovişte)

2615. — Să se determine m aşa fel încît expresia

$$\sin^6 x+\cos^6 x+m(\sin^4 x+\cos^4 x)$$

să nu depindă de x.

---

[1]) **La problemele propuse la această olimpiadă se mai primesc soluţii pînă la 1 august 1957.**

Grupa III — Clasa X-a și școli tehnice

2616. — Se dă ecuația

$$(m - a)x^2 + mx + m - b = 0$$

și se cere:

a) Să se determine m astfel ca rădăcinile ecuației să fie egale și să se arate că valorile lui m sînt reale oricare ar fi a și b reali.

b) În cazul particular $a = 5$, $b = -3$, să se determine valorile lui m pentru care trinomul din partea întîia a ecuației date să fie pozitiv pentru orice valoare a lui x.

(G. D. Simionescu)

2617. — *a)* Se consideră un dreptunghi $ABCD$ ($AB < BC$). Se ia punctul B_1 simetricul lui B față de A și punctul D_1 simetricul lui D față de C. Dreapta B_1D_1 intersectează pe BC în M. Dacă se notează unghiurile: $ABC = x$, $B_1MB = y$, să se arate că $\operatorname{tg} y = 3\operatorname{tg} x$.

b) În locul dreptunghiului $ABCD$ se consideră un paralelogram $ABCD$ pentru care se face aceiași construcție. Fie O centrul paralelogramului. Se notează unghiul $MB_1B = z$; $BD = d$, $B_1D_1 = m$. Să se exprime în funcție de x, y, z, d, m segmentele OB, OM, OD_1 și unghiul ODD_1.

c) Să se stabilească relația:

$$3 \sin x \sin z = \sin y \sin (x + y + z).$$

d) Să se deducă de aici relația de la punctul *a)*.

(G. D. Simionescu)

2618. — Prin mijloacele muchiilor care pleacă din același vîrf al unui cub, trece un plan P.

a) Să se calculeze distanțele tuturor vîrfurilor cubului la planul P, în funcție de muchia a, a cubului.

b) Să se arate că suma acestor distanțe este egală cu întreitul diagonalei cubului.

(Corneliu Georgescu, Craiova)

Grupa IV — Anul I școli profesionale de ucenici

2619. — Două echipe de cîte 8 muncitori fiecare, fiind în întrecere, au obținut în timp de două săptămîni, următoarele realizări: în prima săptămînă ele execută 5/8, respectiv 7/10 din norma de piese, iar în săptămîna a doua depășesc restul sarcinii cu 40%, respectiv 75%. Să se afle:

a) care echipă a cîștigat întrecerea?

b) să se concretizeze rezultatul întrecerii pentru $n = 400$ piese.

c) cît a primit un muncitor din fiecare echipă dacă o piesă normală a fost plătită cu 7,50 lei, iar una depășită cu 20% mai mult?

(I. Marcu, București)

2620. — Doi muncitori au primit pentru o lucrare 615 lei. Primul muncitor a lucrat 15 zile, iar al doilea 12 zile. Știind că primul a primit în 14 zile cît al doilea în 5 zile, să se afle cîștigul zilnic al fiecărui muncitor.

* * *

Grupa V — Anul II școli profesionale de ucenici

2621. — O placă de bronz în forma unui triunghi dreptunghic are ipotenuza de 22,5 cm și una din catete mai mare decît cealaltă cu 4,5 cm. Ea este șlefuită pe ambele fețe, iar manopera este plătită cu 0,30 lei de fiecare cm^2. Cît a costat șlefuitul a 500 piese de acest fel?

(I. Marcu, București)

2622. — O foaie de tablă de formă dreptunghiulară are dimensiunile de 80 cm pe 1 $\frac{1}{5}$ m. Din ea se confecţionează peretele unui vas cilindric. Cum trebuie îndoită tabla pentru a se obţine vasul cel mai încăpător, ştiind că la fiecare margină se foloseşte pentru îmbinare, cîte o fişie lată de 1 cm.

Cît material se foloseşte pentru ambele funduri în fiecare din cele două cazuri posibile?

(Olimpia Gheorghiu, Bucureşti)

Grupa VI — Anul I şcoli tehnice de maiştri

2623. — O echipă de doi strungari a făcut într-o lună 770 piese. În luna următoare aceiaşi echipă a făcut 908 piese. Ştiind că primul strungar a făcut în a doua lună cu 15 % mai mult decît în luna precedentă şi al doilea cu 20 % mai mult ca în luna precedentă, se cere să se afle cîte piese a făcut fiecare strungar în a doua lună.

2624. — Să se calculeze expresia:

* * *

$$\left[\frac{4n^2+p^2}{4n^2p^2}\left(\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{p^2}\right)-\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{p^2}\right)\cdot\frac{m^2+p^2}{m^2p^2}\right]:\frac{m^2+4n^2}{4m^2n^2}\cdot$$

* * *

2625. — Se dă un trapez isoscel cu lagurile neparalele de cîte 4,1 dm şi înălţimea de 40 cm, căruia i se prelungesc laturile neparalele pînă la punctul lor de întîlnire. Se cere:

a) perimetrul acestui trapez ştiind că linia mijlocie este de 45 cm.

b) Laturile egale ale triunghiului isoscel format avînd ca bază, baza mare a trapezului.

(Ştefan Petrescu, Bucureşti)

Grupa VII — Anul II şcoli pedagogice de învăţători

2626. — Un vapor pleacă din Turnu Severin în sus, pe Dunăre, la orele 12. În acelaşi timp, din portul Gruia (care este la 65 km în susul Dunării) pleacă spre T. Severin un al doilea vapor. Ştiind că viteza vapoarelor în apă stătătoare este de 19 km/oră, iar viteza de curgere a Dunării este de 9 km/oră, să determine:

a) timpul cînd se vor întîlni aceste vapoare.

b) distanţa de la punctul de întîlnire la fiecare port.

c) timpul sosirii vapoarelor la destinaţie.

(Lucia Chirculescu)

2627. — În ce sistem de numeraţie numărul 1902 se va scrie 30102?

(Florica Pătraşcu)

2628. — Într-un triunghi iscoscel se dă baza $2a$ şi r raza cercului înscris (cu condiţia a mai mare ca r). Se cere:

a) să se afle raza cercului circumscris,

b) să se demonstreze că această rază poate fi mai mică decît $2r$.

(Florica Pătraşcu)

Grupa VIII — Anii III şi IV ai şcolilor pedagogice de învăţători

2629. — Pentru instalarea unei reţele electrice s-au angajat 3 echipe de muncitori. 15 muncitori din prima echipă pot să execute lucrarea în 18 zile; 20 muncitori din echipa a doua, în 12 zile, iar 30 muncitori din echipa a treia, în atîtea zile în cîte or fi lucrat 3 muncitori din prima echipă şi 24 din a doua, lucrînd împreună.

Pentru instalarea acestei rețele au fost aduși 12 muncitori din prima echipă, 16 muncitori din a doua echipă și 15 muncitori din echipa a treia, care au lucrat împreună pînă la sfîrșitul lucrării primind în total suma de 3966 lei. Să se afle:

a) cîte zile a durat instalarea rețelei electrice?

b) ce sumă a primit un muncitor din fiecare echipă?

(Lucia Chirculescu)

2630. — Un dreptunghi $ABCD$ are înălțimea AB de 1 metru. Să se afle lungimea DE (mai mică decît CD) astfel ca volumele născute de patrulaterul $AECB$ prin rotația sa în jurul lui AD, și apoi în jurul lui BC să fie în raportul 26: 19, punctul E fiind așezat pe latura CD.

* * *

Grupa IX — Anul II școli tehnice de maeștri

2631. — Se dă funcția

$$Y = x^3 - 2x^2 - 9x + 11\,3$$

și se cere *a)* Să se studieze variația acestei funcții, apoi să se construiască graficul ei.

b) Să se scrie ocuația tangentei la curba reprezentativă în punctul de inflexiune.

(Ștefan Petrescu)

2632. — Se dau punctele A (8,6), B (6,0), C (2,0). Perpendicularele ridicate în B pe AB și în C pe AC se taie în punctul D. Se notează cu E mijlocul segmentului AD.

a) Să se verifice prin calcul că $ED = EC$.

b) Cum se explică geometric acest fapt?

(A. Șaichin, București)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI[1])

E: 949. — Trei lucrători au efectuat o lucrare pentru suma de 579 lei. Știind că primu a lucrat 47 ore, al doilea 70 ore, iar al treilea 76 ore, se întreabă cît li se cuvine fiecăruia?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 950. — O mamă spune fiicei sale:

— Eu am de 9 ori vîrsta pe care o aveai tu cînd eu aveam vîrsta pe care o ai tu acum. Cînd tu vei avea vîrsta pe care o am eu acum, vom avea împreună 88 ani.

Care sînt vîrstele lor?

* * *

E: 951. — În două bidoane se află lapte: în primul de două ori mai mult decît în cel de-al doilea. Cînd din primul s-au scos 30 litri, iar din al doilea 20 litri, în primul a rămas lapte de trei ori mai mult decît în al doilea. Cît lapte era în fiecare bidon înainte de scoaterea laptelui?

(Olimpiada matematică, cl. 5, 1950, Kiew)

---

[1]) V: (E: 949, 950, 951, 952, 953): VI: (E: 956, 959, 960, 961); VII: (954, 955, 957, 958). La aceste probleme nu se primesc soluții dela elevii claselor IX—XI sau dela studenți.

E: 952. — O veveriță aduce o alună în vizuină în 20 minute. Cît de departe de alun se află vizuina ei, dacă se știe că veverița fuge fără alună, 5 m/s, iar cu alună 3 m/s?

(Olimpiada matematică, cl. 5, 1950, Kiew)

E: 953. — Pentru a pagina două cărți diferite, o tipografie are nevoie de 246 caractere (cifre). Știind că fiecare din ele este mai mică de 100 pagini, că numărul care se află pe ultima pagină a unei cărți este răsturnatul numărului care paginează ultima pagină a celeilalte cărți, iar cifra unităților primului număr este dublă față de cifra zecilor, să se găsească numărul paginilor fiecărei cărți.

Ștefan Marica, Turnu Severin

E: 954. — Să se construiască un romb cu condiția ca două vîrfuri opuse să fie situate în două puncte date, iar vîrful al treilea să fie situat pe o circonferință dată.

(Olimpiada matematică, cl. 7, 1952, Kiew)

E: 955. — Să se arate că dreptele care unesc centrele patratelor construite pe laturile unui paralelogram în spre exteriorul lui, formează un patrat.

(Olimpiada matematică, cl. 7, 1952, Kiew)

E: 956. — În darea de seamă a Comitetului regional de partid Iași, s-a afirmat că regiunea Iași are o suprafață agricolă de 887226 hectare. Din întreaga suprafață a regiunii, 215850 hectare aparțin sectorului socialist de stat, iar 73211 hectare sînt cuprinse în sectorul cooperatist (*GAC* și întovărășiri agricole). Să se calculeze:

a) cît la sută din suprafața agricolă a regiunii reprezintă sectorul socialist (de stat și cooperatist)?

b) știind că sectorul cooperatist reprezintă 13,80 % din suprafața agricolă a gospodăriilor țărănești, care este suprafața agricolă a gospodăriilor țărănești din regiunea Iași?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 957. — Un colectivist are un coș cu mere. La întrebarea: cîte mere are în coș, el răspunde: cînd mutam dintr-un coș într-altul cîte 2, cîte 3, cîte 4, cîte 5 și cîte 6 mere, rămînea cîte un singur măr în coș; iar cînd mutam cîte 7, nu rămînea nici un măr. Cîte mere a avut colectivistul?

(Olimpiada matematică, cl. 7, 1951, Kiew)

E: 958. — Dacă dintr-un număr de trei cifre scădem numărul 7 el se împarte la 7; dacă scădem 8 el se împarte prin 8, iar dacă scădem 9 atunci el se împarte cu 9. Care este acel număr?

(Olimpiada matematică, cl. 7, 1954, Kiew)

E: 959. — Patru nave pasagere pleacă în aceiași zi dintr-un port *A*; prima navă se întoarce după 5 zile, stă 1 zi în port și pleacă din nou în cursă; a doua navă se reîntoarce după 7 zile, stă 2 zile în port și pleacă din nou în cursă; a treia navă se reîntoarce după 12 zile, stă 3 zile în port și pleacă din nou în cursă; a patra navă se reîntoarce după 5 zile, stă 4 zile în port și pleacă din nou în cursă.

Se cere: *a)* după cîte zile navele vor pleca din nou toate în aceiași zi?

b) după cîte zile navele se vor reîntoarce în aceiași zi?

c) dacă plecarea navelor are loc într-o luni, cînd vor pleca și cînd se vor întoarce din nou într-o luni?

C. V. Costăchescu

E: 960. — Împărțind un număr la 7, citul obținut este mai mic decît deîmpărțitul cu 125, iar restul este 1/4 din cît. Să se afle numărul.

A. Serdeşniuc, Lugoj

E: 961. — Un magazin a vîndut într-o săptămînă paltoane, costume, căciuli şi şepci în număr de 70 bucăți. Un palton costă 600 lei, un costum 500 lei, căciula 100 lei şi o şapcă 50 lei. Pentru toată marfa s-a încasat 22150 lei. Au fost vîndute cu 2 paltoane mai mult decît căciuli şi cu 3 costume mai puțin decît căciuli. Să se determine numărul fiecărui fel de îmbrăcăminte vîndut de magazin.

Zamfirescu Tudor, elev București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite în cursul lunii ianuarie 1957.

(urmare)

CORABIA. Clasa 8. Brabie Voicu (E: 863, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 76, 80, 83, P). Clasa 9. Petcu Alexandru (2316, 32, 39, 47, 49, 56, 57, 59, 61, 64, 68).

CRAIOVA. *Şcoala medie nr. 1 « N. Bălcescu »*. Clasa 10. Dumitru T. Dionis (2356, 63, 95, 404—10), Lăzărescu S. Corneliu (2357, 70—72, 78, 81, 90, 92, 95, 400, 02, 05, 07, 09, 10), Opriş Dumitru (2353, 56, 57, 59, 60, 72, 95, 97, 409, 10), Săseanu Vasile (2395, 402, 04, 05, 07—11, 14), Scînteie P. Aurelian (2342, 57, 71, 72, 78, 81, 92, 95, 400, 05, 07, 09), Toader Emil (2356, 57, 60, 63, 72, 78, 79, 95, 404—10).

Şcoala medie nr. 2 « Fraţii Buzeşti ». Clasa 8. Julea Violeta (E: 851—57, 60, 63—65). Clasa 9. Vasile Florin (2357, 59, 60, 95, 404—11).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 10. Crăciunescu Magdalena (2370, 78, 80, 86, 90, 92, 94, 95, 97, 402, 04—07, 09—11, 14, 15, 17). Abs. Tăriţă Ion (2319, 59, 92, 94, 95, 404—10, 14—17, P).

Şcoala pedagogică. Clasa 7. Pavel N. Radu (E: 852, 63, 56, 57, 74, 76, 79—81, 83, 84, 86).

Şcoala de 7 ani nr. 10. Clasa 6. Dumitriu Mihai (E: 865, 67, 74, 76, 80, 81, 84, 93, 94). Clasa 7. Florescu Floriana (E: 863, 74, 79—81, 84, 89, 93, 97, 98).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa 10. Murăreci Fănică (2348, 56, 57, 59, 78, 79, 92, 406, 09—11, 15).

DEJ. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 10. Munteanu Augustin (2347, 56, 58, 63, 64, 68, 77, 92, 95, 404—10).

DEVA. Clasa 10. Certejan I. Tiberiu (2319, 56, 59, 92, 95, 404—07, 10), Dumnariu Rodica (2338, 78—80, 404, 05, 07, 09—12).

FĂGET (Timişoara). Clasa 10. Antănaş Petru (2394, 95, 404—06, 08—11, 14, 15, 17).

FĂLTICENI. Clasa 10. Sairan Iulian (2324, 40, 48, 49, 57, 59, 61, 72, 74, 78—80, 92, 94, 95, 99, 405, 09, 13, 16).

FOCŞANI. *Şcoala medie « Unirea »*. Clasa 8. Croitoru Florica (2382, 84, 85, 87, 92, 94, 95, 401—05, 07—10, 13, 14, 16, 17). Clasa 9. *Rădescu Eugen* (2304, 08, 11, 16, 22, 28, 32, 35, 38—40, 48, 49, 56—65, 70—72, 74, 75, 78—80, 92, 95, 99, 405—10, P). Clasa 10. Horowitz Iulian (2372, 94, 404, 06, 08, 10, 17), Munteanu Valeriu (2316, 39, 40, 49, 56, 57, 64, 65, 72, 80, P), Praniţchi Teodor (2316, 17, 19, 21, 49, 64, 67, 68, 405, 09).

GĂEŞTI (Piteşti). *Absolvent.* Ilie M. Lucian (2349, 50, 56—58, 72, 78, 80, 84, 92, 94, 95, 98, 405, 06, 09, 10, 14, 15—17).

GALAŢI. *Şcoala medie militară de marină.* Clasa 8. Manole Ion (E: 854, 55, 63, 65, 67, 75, 79, 80, 98), Pascu Dumitru (E: 863, 65, 69, 70, 72, 75, 76, 79—81, 884, 86, 97), Petre Cristache (E: 863, 65, 69, 70, 72, 76, 79, 80, 83, 86, 93). Clasa 9. Căpran D. Petre (2247, 54, 55, 57, 59, 61, 67, 88, 309, 16, 20, 22, 39, 56, 57, 404—08, 11, P). Pisică Dorin (2356, 57, 92, 404—07, 09, 10), Puşcă Vasile (2356, 57, 64, 95, 406—11), Toma Teodor

(2356, 57, 64, 95, 404—10). Clasa 10. Cincă Stelian (2292, 322, 59, 92, 404—07), Dumitru Gheorghe (2322, 37, 58, 59, 402, 05—11, 17), Savin Ion (2358, 405—11, 17), *Tudorache Mihai* (2292, 319, 22, 37—40, 53, 54, 56—59, 67, 68, 70, 72—75, 77, 92, 95, 402, 04—11, 78).

Şcoala medie nr. 1. Clasa 10. Carp Gelu (2349, 57, 59, 60, 68, 80, 92, 95, 410, 16), Chirilă Costică (2363, 92, 95, 97, 402, 04, 05, 07—11, 16), Epureanu Alexandru (2316, 40, 49, 53, 54, 57, 60, 63, 68, 78, 80), Marcovici Iosif (2370, 72, 78, 95, 404, 06, 07, 09, 10).

GHEORGHENI. *Şcoala medie nr. 2.* Clasa 10. Grigoraş T. Guţă (2349, 92, 94, 404—06, 08—10, 17), Lupaş C. Gheorghe (2349, 51, 80, 92, 94, 404—06, 09, 10, 17).

GIURGIU. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Profirescu D. Rodica (2356, 68, 92, 95, 404—06, 08, 09, E: 874, 76, 78—80, 83, 85—88, 90, 91, 93, 97), Videanu T. Marioara (2405, 06, 09, E: 887—89, 93, 94, 97, 404—06, 09, P). Clasa 9. Ciureanu N. Gh. (2356, 57, 92, 95, 404—07, 10), Marinescu Sergiu (2349, 57, 60, 68, 78, 86, 92, 95, 98, 405—07, 10), Vişinescu M. Mihai (2348, 49, 56, 57, 68, 72, 78, 80, 81, 92, 95, 404—10, P), Zamfir I. Alexandru (2378, 86, 92, 94, 95, 403, 05, 07, 09, 10). Clasa 10. Bădilă I. Mihai (2359, 60, 78, 95, 97, 400, 05, 06, 08—10, 14, 15), Gebădilă Ştefan (2357, 92, 95, 400, 04—06, 08—11, 15), *Panaitopol V. Laurenţiu* (2343, 45—49, 51, 53, 54, 56, 57, 59—64, 70—80, 82, 84, 85, 87, 90—92, 94—97, 99, 400, 01, 04—17, P), *Şerbănescu C. Florin* (2316, 21, 38, 49, 54, 56, 57, 59, 61, 70, 72, 74, 78—80, 92, 95, 402, 04—11, 14, 15, 17).

HÎRLĂU (Iaşi). Merchez Constantin (2385, 92, 95, 400, 04, 06—08, 10, 11, P).

HOREZU (Vîlcea). Clasa 10. Rădulescu Nicolae (2340, 57, 78, 404—10).

HUNEDOARA. *Absolvenţi:* Crăciun Iacob (2342, 46, 48, 49, 53, 54, 57, 63, 64, 74), Lăscuţoiu Virgil (2349, 56, 57, 80, 95, 405—07, 09, 10 14).

IAŞI. *Student* Mihai Aurel (2339, 56, 57, 59, 72, 78, 79, 95, 404, 07, 10, 11). Clasa 8. Iancu Zisu (2357, 404, 05, E: 852, 63—66, 69, 74, 76, 79, 81, 83), Munteanu O. Dan (E: 869, 71—73, 75, 78, 83, 85, 89, 94).

Şcoala medie nr. 1 « Mihail Sadoveanu ». Clasa 9. Carp Michel (2349, 57, 59, 63, 80, 92, 404—06, 09—11), Manole Corneliu (2346, 48, 49, 56, 57, 59—63, 77, 80). Clasa 10. Copel Iosif (2392, 95, 404—06, 08—10, 15, 17), Iţicovici Michel (2384, 92, 95, 400, 04—12, 15), Şor Liber (2324, 78, 84, 92, 95, 404, 05, 07—11), Ţibuleac Florin (2316, 37, 49, 50, 57, 60, 64, 79).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. *Costinescu Anca* (2343, 46, 49, 51, 53—57, 59—62, 64, 68, 70—72, 74, 76, 77, 79, 80, 82, 84—87, 90, 92, 94—97, 99, 400, 02, 04—13, 15, 16).

Şcoala medie nr. 3. « Costache Negruzzi ». Clasa 7. Nuţu Constantin (E: 876—80, 83, 84, 86, 89, 90, 93, 98). Clasa 8. Anghelescu Bogdan (2349, 83, 92, 405, E: 852, 53, 57, 63, 65, 67, 71, 74—76, 79, 84, 88, 89, 93), Boambă Adrian (2392, 405, 09, E: 856, 57, 65, 59, 72, 76, 79, 90), Boambă Cornelia (2405, 09, E: 851, 52, 56, 65, 67, 74, 78—80, 90), Cernăianu Dan (2349, 92, 404, 05, 08, E: 865, 66, 81, 84, 85, 89, 93, 96, 99), Costachi Emilia (2405, 09, E: 851, 56, 65, 67, 69, 76, 79, 80), Croitoru Romulus (2405, 09, E: 852, 56, 57, 60, 63, 65, 67, 71, 74—77, 79, 80, 83, 84, 93), Dragoslav Iulian (2356, 404—06, 08, 09, 11, E: 874, 76, 78—80, 83, 84, 93), Gîscă Neculai (2404,—06, 08, 09, E: 851, 57, 65, 76, 80, 84. 88, 89, 93), Gobijă Dan (E: 852, 53, 57, 71, 72, 74—80, 83, 84, 88, 89, 93, 94), Hrapciuc Cătălin (2404, 05, 09, E: 851, 52, 57, 65, 67, 76, 79, 80, 84, 88, 93), Ionaşcu Maria (2375, 404, 05, 08, 09, E: 876, 79, 80, 83, 93), Ionescu Gabriel (2405, 09, E: 850—53, 63, 65, 69—71, 88), Martin Doina (2392, 405, 09, E: 851, 52, 57, 62, 65, 74, 76, 77, 79, 80, 87, 93), Musteaţă V. Vasile (2356, 405, 09, E: 852, 56, 60, 67, 69, 70, 72, 76, 79, 88, 93), Nichita Vasile (2405, 09, E: 856 65, 67, 69—72, 74—76, 79, 80, 83, 84, 88), Pribeşteanu Dana (2405, 09, E: 865, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 79, 80, 89—91, 93), Stoleru Elena (2405, 09, E: 851, 52, 56, 65, 67, 69, 72, 76, 79, 80), Strâchinescu D. Petru (2405, 09, E: 852, 64, 69, 72, 74, 76, 79, 83, 84), Ungureanu Paraschiv (2404, 05, 08, 09, E: 851, 52, 56, 57, 65, 69, 74, 76, 79, 80, 93). Vlas Emilian (2405, 09, E: 852, 57, 65, 70, 74, 76, 88, 89, 93, 97). Clasa 9. Barbu Viorel (2326, 30, 32, 39, 46, 49, 57, 58, 61, 83, 92, 94, 96, 98, 99, 410, 13, 14, 16), Brînză Traian (2359, 60, 92, 95, 404—10), Brînzei Dan (2316, 19, 32, 39, 81, 85, 86, 92, 94—96, 400, 01, 05, 06, 09, 14, 16, 17), Busuioc Lucian (2316, 57, 59, 60, 92, 95, 404—11), Cărăuşu Alex. (2405, 09, E: 851—53, 56, 57, 60, 65, 88, 89, 93), Diaconescu Costel (2316, 17, 30, 32, 35, 40, 49, 56, 57, 60, 63, 64, 80, 85, 95, 99, 404, 05, 07, 09, 10, 14), Dinulescu Horia (2294, 307, 16, 17, 47—49, 53, 57, 59, 63, 68, 92, 95, 98, 99, 404, 05, 09, 10, 14), Enache Neculai (2317, 35, 36, 59, 60, 63, 92, 94, 404, 05, 07, 09—11), Iorman Ereon (2316, 17, 56, 59, 60, 95, 99, 404—10), Kim Riong-Zin (2316, 17, 30, 40, 56, 57, 60, 74, 80, 75, 92, 94, 95, 404—07, 09—11), Moc Miang Su (2316, 17, 30, 32, 35, 36, 40, 55, 57, 59—61, 63, 72, 74), Nanu Gh. Octavian (2316, 19, 32, 58, 74, 85, 92, 94—97, 99, 400, 04—11, 13, 16), Onofrei Valentin (2316,

17, 57, 56 59, 60, 63, 92, 95, 404, 05, 08—10), Purice Gheorghe (2316, 17, 56, 57, 59, 60, 63, 92, 95, 404, 05, 08—10), Sbiera I. Ioan (2316, 17, 56, 57, 59, 60, 63, 95, 404, 05, 07—10), Somnea Constantin (2316, 17, 56, 57, 59, 60, 63, 80, 92, 99, 404, 05, 08—10), Stati Romea (2316, 49, 56, 59. 60, 77, 92, 95, 404, 05, 07, 09), Taţomir Dorian (2316, 17, 56, 59, 60, 63, 92, 404, 06, 08, 10, 11). Clasa 10. Afloarei Constantin (2316, 17, 21. 38, 56, 60, 63, 68, 71, 77—79, 86, 97, 92, 95, 404—10, 15), Amăriucăi Mircea (2316, 17, 21, 35, 38, 56, 60, 63, 78, 79, 404, 05, 09, 10, 12, 15), Baltag Emil (2316, 21, 38, 49, 58, 92, 404, 05, 07—09, 15), Chichirău Alex. (2317, 21, 38, 56, 59, 78, 79, 404, 05, 07, 09, 10, 14, 15), Constantinescu Radu (2317, 21, 35, 40, 56, 59, 60, 78, 86, 92, 404, 05, 07—11, 15), *Creţu Mihai* (2316, 17, 11, 23, 30, 32, 35, 36, 38—40, 47—49, 51—53, 55—57, 59, 60, 62—64, 69, 70, 72, 78—80, 84—88, 91, 92, 94—96, 404—17), Feldhammer Zeilic (2321, 35, 38, 60, 78, 79, 91, 404, 05, 07—09, 11), Heisu Alexandru (2322, 38, 44, 56, 78, 84, 91, 92, 400, 04, 05, 07—10, 15), *Homutescu Adrian* (2316, 17, 49, 53, 56—60, 63, 64, 70, 72—75, 78—80, 84, 86, 91, 92, 95—97, 402, 04—12, 14—17, P), Kan Sen Rion (2316, 21, 35, 40, 60, 63, 77, 78, 87, 95, 405—07, 09—11), Kim Ghen Sic (2316, 21, 38, 54, 56, 59, 60, 78, 79, 84, 404—05, 09, 10, 15), Linhort Haim (2317, 35, 60, 63, 78, 79, 84, 86, 91, 400, 04, 05, 07, 10, 15), *Lucan Mihai* (2316, 17, 19, 21, 23, 26, 30, 32, 34, 35, 36, 38—40, 47—49, 53, 54, 56—64, 67, 70—80, 84—87, 89—91, 95—402, 04—17, P), Măcărescu Mihai (2386, 91, 92, 95, 400, 02, 04, 05, 07, 09—11, 15), *Michalache Adrian* (2316, 17, 19, 21, 26, 30—33, 35, 36, 38—40, 46—49, 51, 53, 54, 56, 57, 59—64, 67, 70—80, 84—87, 90—97, 99—402, 05—17), Pak Su Pam (2316, 21, 35, 56, 57, 78, 79, 87, 404, 05, 07, 09, 10, 15), Papadopulos Panaitis (2321, 59, 68, 79, 92, 404—10, 15, 17), *Popescu Claudiu* (2316, 17, 21, 23, 32, 35—40, 42, 48, 49, 53—57, 59—61, 63, 64, 66, 69—74, 77—80, 84—87, 91, 92, 94—400, 02, 04—12, 14—17), Pricop Ovidiu (2316, 21, 38, 56, 78, 80, 87, 405, 07, 09, 10, 12), Slinpcas Grigoris (2316, 21, 40, 59, 78, 79, 87, 92, 405, 07, 09, 10), Son Zong Iuc (2235, 38, 56, 60, 63, 78, 84, 95, 96, 404—12, 15), Tuţurman Mircea (2338, 56, 78, 79, 91, 405, 07—09, 15), Vancea Ştefan (2317, 19, 21, 35, 38, 40, 48, 56, 57, 60, 63, 64, 78, 79).

Şcoala medie serală. Clasa 8. Botez Gheorghe (E: 868, 73—81, 83, 84).

LUGOJ. Clasa 10. Boroancă Ion (2377, 92, 94, 95, 97, 404—06, 09—11, 14), Daba Dumitru (2349, 402, 04, 05, 07, 09—11, 15), Păpuşoiu Gh. (2389, 90, 92, 95, 97, 99, 404—07, 09, 10, 14—16).

NĂSĂUD. Abs. Sîngeorzan Emil (2384, 92, 95, 400, 03, 05, 07—09, 11).

ORADEA. *Şcoala medie nr. 1*. Clasa 10. Cristina Gheorghe (2356, 60, 64, 71, 72, 78, 92, 94, 95, 404—11), Paşca Nicolae (2307, 78, 92, 404—09, 11, 14).

PĂTÎRLAGELE (Ploeşti). Abs. Olaru Elefterie (2349, 53, 54, 56, 57, 59, 71—74, 78, 79, 407, 14).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). Şcoala medie nr. 2. Clasa 9. Covrig Margareta (2359, 77, 92, 94, 95, 404—11). Abs. Munteanu Gabriela (2322, 44, 56, 70, 71, 78, 79, 405—07, 09, 10).

PIETROŞANI. Şcoala medie nr. 1. Clasa 7. Albu Toma (E: 865, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 77, 78, 80, 84—86, 88—90, 92—94, 97, 98).

PITEŞTI. Şcoala medie nr. 1. Clasa 9. Bîcă I. Const. (2339, 47, 56, 57, 59, 62, 92, 95, 400, 05, 09, 10). Clasa 10. Andrei Gh. Ion (2355—57, 59, 60, 72, 77, 78, 92, 95, 97, 402, 04—07, 09—11, 14, 17). *Rădulescu D. Marin* (2342, 46, 47, 49, 50, 52—57, 59, 60, 62, 64, 70—75, 77—79, 91, 92, 94—99, 402, 04, 05, 07—11, 13—17, P). Absolvenţi: Ghiţulescu Iulian (2351, 56, 57, 60, 61, 63, 64, 70, 72, 79, 95, 404, 07, 10, P), Smadea Marcela (2316, 17, 19, 21, 35, 38, 40, 48, 55—57, 60, 63, 77—79, 86, 92, 95, 400, 02, 04, 11, 17).

Şcoala medie serală. Clasa 8. Seitanu Maria (2348, 68, 405, 06, E: 852, 65, 74, 76, 77, 79, 80, 86, 93). Clasa 9. Popa Pavel (2339, 48, 56, 57, 68, 95, 404—07, 10).

PLOEŞTI. *Şcoala medie nr. 1*. « I. L. Caragiale ». Clasa 7. Patron Alex. (E: 972, 74—81, 84), Pîrîianu R. Radu (E: 874, 76, 78—81, 84, 92—94, 97). Clasa 8. Daşoveanu Dumitru (2405, 09, E: 851, 52, 55, 63—65, 67, 69—74. 76, 77, 79, 83, 93), Radu I. Ioana (E: 863, 65, 67, 69, 72, 74, 76, 78, 79, 83), *Ştefănescu V. Rodica* (2348, 49, 56, E: 864, 65, 67, 69—72, 75, 76, 79—81, 83—86, 88—91, 93, 97, 98), Tomescu Ion (2347, 48, 56, E: 874, 76—81, 83, 84). Clasa 10. *Baltag Vasile* (2316, 53, 54, 60—62, 70, 82—85, 87, 91, 92, 94, 95, 97—402, 04—11, 13—17, P), Leca Aurel (2316, 17, 37, 38, 40, 56, 57, 59, 60, 62, 64, 73, 78, 89), *Lungu N. Liviu* (2348, 49, 54, 56, 57, 59—62, 68, 72, 74, 77—80, 82—85, 87, 91, 92, 94—97, 400, 02, 04, 05, 07—17, P), Popescu St. Const. (2349, 74, 77—79, 92, 95, 402, 04, 07, 08, 10), Vraşti Mircea (2357, 63, 78, 404, 05, 07, 09, 10, 12, 15).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 7. Parupu M. Virginia. (E: 864, 67, 70, 77, 84, 93, 98). Clasa 8. Lizeanu Liana (E: 885, 86, 88—91, 93, 94, 96, 97). Clasa 10. Dobrişan Marina (2359, 74, 78, 92, 404—06, 09—11).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 9. Vişină Elena (2357, 68, 74, 86, 92, 404—10). Marin Maria (2349, 57, 59, 64, 72, 77, 78, 95, 408, 14).

Şcoala de 7 ani nr. 14. Clasa 7. Gheorghiu A. Nicolae (E: 853, 56, 58, 59, 62, 76, 79, 80, 83, 84).

PUCIOASA. Clasa 9. Bănescu Steliana (2342, 49, 56, 57, 80, 92, 404—10), Biscupescu E. Cezar (2342, 49, 56, 57, 80, 404—10), Grigorescu Grigore (2342, 49, 56, 57, 80, 92, 404—10), Leotescu Petre (2342, 56, 57, 59, 80, 92, 404—10), Oproiu I. Vasile (2342, 49, 56, 57, 80, 92, 404—10), Patrulescu Cornelia (2342, 49, 56, 57, 80, 92, 404—9), Petrescu Dionisie (2341, 49, 56, 57, 80, 92, 404—10), Petrescu Gh. Ion (2342, 56, 57, 80, 92, 404—10), Rîmbu Gheorghe (2356, 57, 92, 404—07, 09), Vintilescu Gh. Mihai (2349, 56, 57, 80, 92, 406, 07, 10).

REŞIŢA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Jumanca Rodica (E: 851, 52, 55, 60, 63, 64, 67, 74—77, 80, 83, 84, 86, 90, 93, 94). Clasa 10. Cucu Romulus (2316, 40, 57, 60, 78, 79, 92, 404—11), Străinescu I. Ion (2316, 19, 38, 40, 45, 48, 49, 53, 54, 56—58, 60, 63, 64, 68, 78, 79).

Şcoala de 7 ani nr. 1. Clasa 5. Foral Iosif (E: 851, 52, 54, 63—65, 74, 76, 79, 84, 93), Perianu Dan (E: 867, 69, 71, 72, 79, 83, 84, 86). Clasa 6. Brettner Mariane (E: 839, 51, 52, 67, 74, 76, 79, 80, 92, 94, 97).

RÎMNICUL-SĂRAT. *Şcoala medie nr. 2.* Clasa 7. Asanache Horia (E: 852, 55, 67, 69, 74—81, 83, 84, 88, 91, 98). Clasa 9. Dincă Radu (2356, 57, 60, 77, 95, 404, 06—08, 10).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa 10. Bobîlcă Adrian (2316, 17, 21, 56, 57, 77—79, 95, 407, 10), *Bulucea D. Constantin* (2341, 45, 47, 52, 54—56, 59, 62, 70, 84—87, 90—92, 94—402, 04—17, P), Mărgăritescu Gh. Corneliu (2348, 57, 60, 63, 72, 73, 77—79, 95, 400, 05—11, 17), Teodorescu Alexandru (2316, 17 21, 40, 56, 63, 78, 407, 10, 11), Văcărescu Nicolae (2321, 49, 56, 57, 63, 77—80, 84, 92, 94—400, 02, 04—11, 13, 16, P).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa 8. Noica Nicolae (2288, E: 867, 69, 70, 72, 73, 75, 81, 83, 98). Clasa 9. Grecu Anton (2258, 60, 61, 349, 57, 74, 95, 405—07, 09, 10).

SIBIU. Şcoala militară de artilerie. Alexa Ion (2316, 19, 36—38, 40, 56, 57, 59—61, 64, 71, 74, 77—80, P), Pupăzan V. Nicolae (P).

SIGHIŞOARA. Clasa 10. Bucovschi Petre (1410, 2333, 95, 97, 98, 402, 04—07, 09, 15).

SLATINA. Clasa 8. Graure I. Veronica (2410, E: 852, 56, 76, 79, 80, 83, 84, 86, 91, 93), Roşulescu T. Florică (2378, 84, 85, 92—94, 96, 97, 99, 404, 05, 07, 09, 12). Clasa 10. Dragomir Grigore (2357, 59, 78, 92, 95, 404—10), *Absolvenţi*: Bărbulescu Marcel (2351, 84, 85, 92—95, 97, 99, 401, P), Ghenea R. Anghel (2335, 52, 56, 57, 59, 60, 64, 72, 78, 79, 92, 95, 400, 04, 07, 10, 14, 15, 17).

SUCEAVA. Clasa 10. Ticu Constantin (2349, 53, 54, 57, 59, 60, 64, 67, 68, 78, 79).

TECUCI. *Şcoala medie nr. 2.* Clasa 8. Ailoaiei Rodica (E: 851—57, 59, 60, 63—65, 67, 69, 70, 72, 79), Bold Ioan (E: 851—55, 57, 60, 63—65, 67, 69—72), Brodea Ioan (E: 851—53, 56, 60, 63—65, 67, 69—73, 76, 80), Costea Marin (E: 851, 52, 54, 55, 57, 60, 63—65, 67, 69, 70, 72, 74, 76. 79—81, 83, 84), Cruceanu Maricica (E: 863, 65, 67, 69, 70, 72—77, 86), Ignatovici I. Victoria (2318, 22, 39, E: 852, 59, 63, 64, 67, 69, 70, 73, 74, 80, 81), Mironescu Adriana (E: 878—81, 83, 84, 87, 88, 93), Pascal Elena (E: 851, 52, 54, 56, 57, 60, 63—65, 67, 69, 73), Popescu Constanţa (E: 851, 52, 54, 57, 60, 63—65, 70, 76, 79, 80, 84), Rizic Aron (1954, 55, E: 765, 68, 71, 73, 74, 76), Sandu Eugenia (E: 851, 63—65, 67, 69, 72, 74, 76, 79, 80, 83, 84, 93). Clasa 9. Teodoru Georgeta (2356, 57, 59, 404—10), Vidraşcu Traian (2340, 56, 57, 59, 61, 64, 72, 92, 95, 406, 10, P). Clasa 10. *Tudose Traian* (2337, 39, 40, 45, 49, 57, 60, 61, 63, 67—69, 74, 77—80, 92, 97, 99, 400, 06, 07, 10, 11, 14, 17, P).

TIMIŞOARA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Bratu Dorin (2392, 404—06, 09, 10, 13, E: 886, 89, 90, 93, 94, 98, P), Coajă Alex. (2392, 400, 04, 05, 08, 09, E: 886, 89, 93, 97). Clasa 9. Boanţă Alex. (2349, 57, 80, 92, 95, 404—07, 09, 10). Coşereanu Radu (2355—57, 63, 95, 404—07, 09—11), Grossler Const. (2352, 60, 92, 95, 404—10), Schramm Heinz (2352, 60, 63, 92, 95, 404—10), Toma Corneliu (2317, 40, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 78—80). Clasa 10. Mihăileanu N. Constantin (2370—75, 77, 78, 404, 05).

Şcoala de 7 ani nr. 25. Clasa 6. Gora Horaţiu (E: 836, 45, 57, 63—65, 74, 84).

TÎRGOVIŞTE. Clasa 7. *Cîrnu Lucian* (2348, 405, 06, 09, E: 851, 52, 54—57, 59—61, 63—78, 80, 83, 84, 86, 90, 91, 96—99). Clasa 8. Velicescu T. Mircea (2296, 99, 307,

E: 852—62,). Clasa 10. Iacob Petre (2316, 38, 40, 56, 57, 60, 78, 79, 92, 405—07, 10). Absolvent Mărgineanu Const. (2347, 80, 92, 94, 95, 404—11, 14—16).

TÎRGU-MUREŞ. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 6. Iclăzan Tudor (E: 852, 57, 64, 65, 67, 68, 70, 74, 76, 77, 79—81, 84), Savu Mircea (E: 851, 52, 54, 55, 57, 63—65, 67, 68, 74, 76, 77, 79—81, 84). Clasa 8. Antoniuc Bogdan (E: 863—65, 67, 69, 71—74, 76, 78—81, 83, 84).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa 10. Precupeanu Theodor (2348, 53, 54, 56, 57, 60, 63, 67, 68, 72, 78, 404, 07, 10, 11), Absolvent. Răuleanu Mihai (2246, 54, 55, 84, 316, 22, 49, 50, 56, 68, 71, 72, 74, 80).

TURNU MĂGURELE. Clasa 10. Cojocaru Napoleon (2348, 53, 54, 57, 59, 60, 75, 80, 95, 97, 98, 407, 08, 10, 14).

TURNU SEVERIN. Clasa 5. Găletuşe Ionel (E: 845, 51, 52, 54, 64, 65, 74, 76, 79, 84). Clasa 8. Atanasie Elena (2349, 56, E: 874—77, 79—81, 83, 84, 89), Băran Gheorghe (E: 867, 69, 72—74, 76, 78—80, 83, 90, 93), Ionăşcuţ N. Dan (E: 876—80, 83, 84, 86, 90, 93), Surdulescu Mircea (2356, E: 874, 76, 78—80, 83, 84, 90, 93, 97). Clasa 9. Alexe I. Alexandru (2316, 95, 404, 05, 08—10, P), Suici Gheorghe (2349, 57, 92, 95, 404—06, 08—10). Clasa 10. Caragioiu Mircea (2357, 59, 60, 63, 64, 78, 95, 96, 405, 07, 09—11), Găletuşe Stelian (2288, 90, 92, 94, 97, 300, 01, 04, 07, 09—11, 37, 78), Rusu Constantin (2319, 54, 59, 79, 92, 95, 96, 404—07, 09—10).

URLAŢI. Clasa 10. Dedu Liviu (2316, 40, 49, 53, 55—57, 59—61, 64, 72, 74, 77, 78, 95, 404—06, 08—11, 17), Georgescu C. Sebastian (2317, 59, 60, 72, 73, 77, 78, 95, 97).

ERATĂ. La rîndul 9 pag. 157, în loc de $n - (B' + c')$ se va scrie $\pi - (B' + c')$

— La problema 2575, în loc de $\sin\frac{x}{a}$ se va scrie $\sin\frac{x}{2}$

La pag. 86 rîndul 2, în loc de $\frac{m^2 - (n-1)}{m + [m^2 + n(n-1)]^2}$ se va scrie $\frac{m^2 + n(n-1)}{m^2 + [m^2 + n(n-1)]^2}$.

Înştiinţare. S-au primit înscrieri la întrecerile dintre cercurile de matematică şi fizică de la: S.m. 2 Bîrlad, S.m. 2 Tg. Jiu, S.m. 1 Bucureşti, S.m. 1 Ploeşti şi S.m. Hunedoara. Înscrieri pentru participare la aceste întreceri mai pot fi trimise pînă la 20 iunie 1957.

Országos Műszaki Könyvtár

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea* fiecărei probleme trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu *îngrijire*. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa*, apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a și a *X*-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au *dat generalizări* și observații interesante sub formă de *note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor *extrașcolare* la matematică și la fizică, asupra *cercurilor de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei *se vor face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. MARCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROBIEV	**Numerile lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţilor diferenţiale.**
22. NICOLAE STĂNESCU	**Electronul.**
23. V. SERGIESCU	**Introducere în fizica solidului.**
24. G. N. BERMAN	**Cicloida.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**
26. AL. SANIELEVICI	**Introducere în radioactivitate**

ABONAMENTUL LA GMF-B PE ANUL 1957, ESTE DE LEI 10
(12 NUMERE)

C. 273 – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1926
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Könyvtári
POLYTECHN.

Anul VIII — Mai 1957

5

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, Nr. 5—Mai 1957

SUMARUL:

Pag.

1. *Lumina ca formă de existenţă a materiei după S. G. Suvorov* 225
2. *Un nou procedeu pentru stabilirea vizibilităţii în epură a unei drepte de M. Iorga* 237
3. *Teorema lui Clairaut de V. Udrescu* 241
4. *Note matematice de C. Coşniţă* 249
5. *Caleidoscop matematic de T. Colibaba* 252
6. *Probleme rezolvate (2013; 2241; 2242; 2276; 2279; 2286; 2287; 2288; 2290; 2291;)* 255
7. *Probleme propuse (2633 — 2655)* 263
8. *Chestiuni de examen (2656 — 2685)* 266
9. *Exerciţii şi Probleme pentru şcoala de 7 ani (E: 962— E: 973)* 271
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 273

ANUL VIII 5 MAI

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; Bolangiu A., asistentă univ.; Ionescu Bujor C., prof. univ.; Ionescu-Ţiu C., profesor, redactor pentru matematică; Muşat I., profesor; Negulescu A., profesoară; Petrovanu A., profesor; Rădulescu N., profesor; Sacter O., conf. univ., redactor responsabil; Simionescu D. Gh., conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 446.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Mérnöki Könyvtár BUDAPEST

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VIII, Nr. 5 mai 1957

LUMINA CA FORMĂ DE EXISTENŢĂ A MATERIEI

după **S. G. SUVOROV**

In literatura de specialitate se pot întîlni diferite definiţii date naturii luminii. Unele afirmă că lumina este o formă de energie [1]), altele consideră lumina ca o formă de existenţă a materiei. Care din aceste afirmaţii este adevărată şi pentru ce?

Articolul de faţă îşi propune să stabilească faptul că lumina este o formă de existenţă a materiei şi nu o formă a energiei.

A spune: lumina este o formă de energie înseamnă a afirma că lumina este mişcare, mişcare însăşi, fără ceva care se mişcă, fără materie. Acesta este sensul obiectiv al afirmaţiei, independent de intenţia celui care o formulează, căci acesta a fost sensul acestei afirmaţii în timpul luptei ideologice din domeniul fizicii şi filosofiei.

De aceea considerăm necesar să expunem sumar istoria luptei diferitelor puncte de vedere asupra naturii luminii, să arătăm aspectul filosofic şi cel fizic al acestei probleme.

1. Ipotezele eterice asupra luminii şi falimentul lor. Interpretarea luminii ca energie

1. Newton a presupus că lumina este formată dintr-un flux de particule speciale (corpuscule), care se propagă de la izvorul de lumină în toate direcţiile. Între aceste particule de lumină există o interacţiune şi în acelaşi timp ele acţionează asupra substanţei, iar forţele de interacţiune ca şi alte forţe care sînt considerate în fizica newtoniană sînt presupuse ca acţionînd la distanţă şi în mod instantaneu. Urmaşii lui Newton au presupus că acţiunea se transmite instantaneu în vid; ei nu au considerat această transmitere a acţiunii ca un proces fizic care se desfăşoară în timp, în mediul dintre particule.

În concepţia lui Newton lumina este considerată ca o materie de o natură specială. Însă chiar în timpul lui Newton această concepţie a întîmpinat dificultăţi, de pildă în problema proprietăţilor luminii, care ies la iveală în fenomenul de interferenţă (« inelele lui Newton »). Însuşi Newton a explicat apariţia inelelor plecînd de la concepţia sa asupra luminii; el a trebuit să adauge particulelor luminoase proprietăţi de periodicitate speciale [2]).

[1]) De ex. aşa s-a afirmat în manualele pentru şcolile medii pînă în 1952.

[2]) Este de remarcat că introducînd periodicitatea, Newton a sesizat caracterul esenţial al luminii, ceea ce i-a permis să calculeze dimensiunea periodicităţii (« lungimea de undă ») pentru razele de diferite culori şi toate acestea cu o mare precizie.

Explicaţia dată de Newton interferenţei nu a putut fi considerată ca satisfăcătoare. Din experienţele în care s-a observat acest fenomen a reieşit că interferenţa este un rezultat al interacţiunii a două raze de lumină. A fost însă imposibil să se stabilească un mecanism satisfăcător pentru acţiunea particulelor luminoase newtoniene, care să explice în toate cazurile fenomenul de interferenţă. Au fost şi alte fenomene care nu au putut fi explicate cu ajutorul particulelor luminoase newtoniene, de ex. refracţia dublă în spatul de Islanda.

Datorită acestui fapt, alături de concepţia corpusculară newtoniană asupra luminii a apărut încă din timpul lui Huygens o explicare a luminii ca proces ondulatoriu. Huygens a reuşit să clarifice dubla refracţie plecînd de la faptul că lumina este un proces ondulatoriu într-un anumit mediu.

Acest mediu care poartă lumina a primit denumirea de eter luminos. Savanţii au presupus că alături de eterul luminos există şi un eter electric şi unul magnetic.

Ideea că între corpuri nu este vid absolut, că orice interacţiune a corpurilor poate exista numai în materie, că prin urmare în natură nu există forţe care acţionează la distanţă şi instantaneu este perfect adevărată. Însă această idee a trebuit să capete o concretizare obiectivă bazată pe generalizarea unui mare număr de fapte experimentale. Vom vedea mai jos că această concretizare s-a realizat în procesul istoric de dezvoltare a fizicii.

Creatorul ştiinţelor naturii în Rusia, marele savant enciclopedist şi materialist Mihail Vasilievici Lomonosov, considera lumina ca un produs ondulatoriu în eter. El nu s-a temut să se ridice împotriva părerii newtonienilor — dominantă în acea vreme — şi a ridicat împotriva acestei ipoteze o serie de argumente: acesată ipoteză este incompatibilă cu propagarea luminii după direcţii concurente, admiţînd că lumina se propagă în linie dreaptă; nu se poate explica mişcarea particulelor luminoase care pornesc de la Soare împotriva forţei sale de atracţie; nu se poate înţelege procesul de absorbţie a particulelor luminoase de către corpuri, şi o serie de alte argumente. Transmiterea oricărei acţiuni era concepută de către Lomonosov ca un anumit proces fizic; el nu putea admite, de aceea, concepţia lui Newton asupra existenţei unor forţe care să acţioneze la distanţă; de aceea în concepţia lui Lomonosov asupra fenomenelor din natură eterul joacă un rol considerabil.

Spre deosebire de alţi cîţiva naturalişti, M. V. Lomonosov a presupus că între fenomenele electrice, magnetice şi luminoase (şi fenomenul de transmitere a căldurii de la Soare) există o legătură precisă şi de aceea la baza tuturor acestor fenomene trebue să stea unul şi nu mai multe eteruri. Fenomenele de mai sus diferă numai prin caracterul mişcării particulelor eterului. Aceste idei importante asupra unităţii fenomenelor electromagnetice şi luminoase, exprimate cu atîta vreme înainte, arată cît de adînc pătrundea fenomenele naturii acest mare savant.

Părerile lui M. V. Lomonosov erau împărtăşite de contemporanul său, cunoscutul matematician şi mecanician L. Euler, membru al Academiei din Petersburg, care se găsea în relaţii ştiinţifice cu Lomonosov [1]).

La începutul secolului al XIX-lea, Young şi Fresnel au arătat că fenomenele de interferenţă şi difracţia luminii pot fi explicate numai cu condiţia considerării luminii ca un proces ondulatoriu.

---

[1]) *M. V. Lomonosov* a făcut cunoscute lui Euler concepţiile sale în fizică şi anume, în 1748 i-a scris o importantă scrisoare în care pentru prima dată este formulată legea conservării materiei şi mişcării, care a primit în zilele noastre numele lui Lomonosov.

Toate dezvoltările ulterioare ale opticii au la bază reprezentarea ondulatorie. Fenomenele de interferenţă şi difracţie sînt considerate şi azi ca experienţe decisive în stabilirea proprietăţilor ondulatorii ale luminii, deşi dezvoltarea concepţiei asupra luminii a făcut progrese mari şi au fost descoperite atît proprietăţi ondulatorii cît şi proprietăţi corpusculare ale ei.

2. Necesitatea de a reuni diferite aspecte ale luminii într-o teorie unitară şi durabilă a pus problema naturii mediului oscilant, a mecanismului procesului ondulatoriu, a modului în care rezultă de aici proprietăţile variate ale luminii.

Pînă la mijlocul secolului al XIX-lea, teoria ondulatorie a luminii era considerată ca teoria oscilaţiilor elastice (mecanice) ale eterului. În prima jumătate a secolului al XIX-lea a început să se aprofundeze studiul proceselor electromagnetice. Au fost descoperite o serie de fenomene noi: interacţiunea curenţilor şi magneţilor, fenomenul inducţiei magnetice şi o serie de alte fenomene. Şi în acest domeniu s-a pus întrebarea cum se transmite acţiunea electromagnetică.

Cercetări importante în domeniul electricităţii şi magnetismului au fost făcute de cel mai mare fizician materialist al secolului trecut, Michael Faraday. Faraday a luptat împotriva concepţiei că forţele, oricare ar fi natura lor, pot acţiona la distanţă fără intermediul mediului fizic. El a stat pe poziţia acţiunii din aproape în aproape şi a presupus că interacţiunile electrice se transmit prin eter, un mediu în care au loc procese complexe. Ideile lui Lomonosov şi Euler asupra acţiunii din aproape în aproape au avut asupra lui Faraday o influenţă hotărîtoare. Faraday a cunoscut de asemenea şi ideile lor asupra caracterului unitar al proceselor electromagnetice şi luminoase; el a emis de asemenea ipoteze asupra unei legături posibile între gravitaţie şi electricitate.

Bazîndu-se pe lucrările lui Faraday, Maxwell a creat — la finele deceniului al 6-lea şi începutul celui de-al 7-lea al secolului trecut — teoria cîmpului electromagnetic.

Întrucît, după cum au arătat experienţele, curenţii electrici din conductori (Maxwell i-a numit curenţi de conducţie) produc inducţie, acţionează asupra unui magnet şi acţionează în general şi în afara conductorului, rezultă că procesul fizic nu se desfăşoară numai în limitele conductorului: procesul se continuă şi în exteriorul acestuia, în mediul eteric. Spre deosebire de curenţii de conducţie, Maxwell numeşte aceste procese în eter, curenţi de convecţie.

A fost firesc să se facă pasul următor — şi Maxwell a reuşit să arate — că şi procesele luminoase se caracterizează prin variaţia aceloraşi mărimi: intensităţile de cîmp electrice şi magnetice şi permeabilitatea electrică şi magnetică. S-a arătat că viteza de propagare a acţiunilor electromagnetice este egală cu viteza luminii măsurată deja pe cale directă.

Mai departe, indicele de refracţie al razei luminoase (prin trecerea din vid într-un mediu transparent) era egal, după teoria lui Maxwell, cu rădăcina pătrată din produsul permeabilităţii electrice şi magnetice; pentru lumină acest fapt a putut fi confirmat prin experienţe directe.

Aşa dar, teoria lui Maxwell a arătat identitatea fenomenelor electromagnetice şi luminoase.

Teoria electromagnetică a cîmpului a lui Maxwell a fost confirmată. La succesul acestei teorii, în stadiul timpuriu al dezvoltării ei, au colaborat mai cu seamă savanţii ruşi, eminentul fizician rus A. A. Stoletov şi elevii săi. Nu se poate trece cu vederea faptul că experienţele care confirmă teoria lui Maxwell au fost făcute de şcoala fizicienilor ruşi pe vremea cînd în străinătate această teorie era primită cu multe rezerve.

Din teoria lui Maxwell rezultă că în anumite condiţii de excitaţie a mediului eteric, în spaţiu trebuie să se propage unde electromagnetice cu o viteză de aproximativ 300 000 km/s. H. Hertz a produs pentru prima oară (1888) aceste unde cu ajutorul scînteilor electrice. Cunoscutul fizician rus A. S. Popov, inventînd radioul, a pus undele electromagnetice în slujba practicii şi a deschis astfel o nouă epocă în tehnica comunicaţiilor.

Astfel, pe baza studiului interacţiunilor electromagnetice ale corpurilor a luat naştere teoria care reflectă legile acestor interacţiuni, iar teoria a slujit pe scară largă ca bază tehnicii actuale.

După succesele teoriei lui Maxwell nu se mai puteau reprezenta undele luminoase ca unde elastice în eter. Era vorba, într-adevăr, de un proces oscilant, însă nu forţele elastice, adică mecanice, erau acelea care sufereau o variaţie periodică, ci intensităţile electrice şi magnetice.

Rezultatele obiective ale cercetărilor au condus pe fizicieni spre căutarea de noi aspecte ale realităţii. Însă punctul de vedere conservator mecanicist îi făcea să rămînă pe vechile poziţii. Ei au continuat totuşi să plece de la faptul că procesele electromagnetice au loc într-un mediu material deosebit, de natură mecanică. Problema pe care şi-au pus-o a fost să explice oscilaţia intensităţii cîmpurilor electrice şi magnetice, ca rezultat al variaţiilor proprietăţilor elastice, în general mecanice, ale mediului (ale eterului) (deformaţiile sale elastice, intensităţile etc) [1]).

A fost o încercare evident nereuşită.

Pentru explicarea diferitelor fenomene electromagnetice pe bază mecanică ar fi trebuit să presupunem că eterul ar avea unica proprietate mecanică-ondulatorie. A trebuit să se renunţe la modelul mecanic al eterului.

Mai tîrziu, o serie de fizicieni, între care şi H. Lorentz, au încercat să conserve noţiunea de eter pe o nouă bază. H. Lorentz a considerat eterul ca purtătorul proceselor electromagnetice, însă nu a căutat să le reducă la nişte deformaţii mecanice ale mediului eteric.

Şi această ipoteză asupra eterului a venit în contradicţie cu faptele.

Au apărut însă fapte noi. În faţa fizicii, la sfîrşitul secolului al XIX-lea şi începutul secolului al XX-lea, s-a pus o nouă problemă — studierea legilor electrodinamicii la corpurile în mişcare, ale legilor de propagare a acţiunilor electromagnetice de la surse avînd viteză mare.

În acest domeniu au apărut contradicţii între faptele fizice şi existenţa unui mediu universal, eterul, independent de natura sa. Experienţele au arătat că eterul nu poate fi antrenat de mişcarea corpurilor (de exemplu, Pămîntul); însă şi experienţele care au încercat să stabilească existenţa curenţilor de eter odată cu mişcarea Pămîntului prin eter (experienţele lui Michelsohn-Morley şi alţii, începînd din 1881) au dat în mod constant rezultate negative. S-a arătat că nici o ipoteză asupra unui anumit mediu universal nemişcat nu concordă cu faptele fizice. Fizica a renunţat complet la eter. Au încercat să păstreze noţiunea de eter numai savanţii care nu au vrut să ţină seamă de noile fapte şi au păstrat o concepţie metafizică asupra naturii.

Renunţarea la ipoteza eterului ca mediu absolut universal reprezintă incontestabil un pas înainte în dezvoltarea fizicii, ea a deschis drumul către descoperirea naturii mai complexe a fenomenelor luminoase şi a interacţiunilor corpurilor în general.

---

[1]) Însăşi denumirea dată undelor electromagnetice de curenţi de deplasare arată că ele sînt legate în teoria lui Maxwell de deplasările mecanice ale mediului eteric.

Însă faptele au fost de aşa natură încît renunţarea la eter a fost folosită în scopuri reacţionare. Analiza acestei situaţii este dată în geniala lucrare a lui V. I. Lenin «Materialism şi empiriocriticism». Pe scurt problema constă în fond în faptul că fizicienii care voiau să apere materialismul în ştiinţă nu erau documentaţi în problemele materialismului dialectic, iar influenţa ideologiei reacţionare burgheze a fost mare.

Falimentul ipotezei eterului a fost interpretat astfel: lumina nu are un purtător material.

3. Dar în acest caz, ce reprezintă lumina?

În fizică a avut o mare răspîndire afirmaţia: Lumina este energia radiantă, energia radiantă se transmite în spaţiu fără materie, nemijlocit. Aşadar, fizicienii (care nu cunosc materialismul dialectic) au văzut numai două tratări posibile ale problemei: sau transmiterea energiei luminoase în spaţiu este legată de anumite oscilaţii (majoritatea au presupus că sînt de natură mecanică) ale unui anumit mediu universal, acelaşi peste tot, identic întotdeauna cu el însuşi, imobil, sau are loc fără nici un mediu, fără materie; în momentul în care prima tratare s-a dovedit a fi falsă a rezultat că cea de-a doua este adevărată.

Însă a afirma că energia nu se transmite printr-un mediu material intermediar contrazice atît concepţia materialistă despre lume cît şi faptele fizice. Într-adevăr, faptul că viteza de propagare a luminii (a acţiunii electromagnetice) s-a dovedit finită, înseamnă că transmiterea luminii nu poate fi considerată altfel decît ca un proces material, adică un proces care are loc în materie. Mari fizicieni au înţeles aceasta încă de mult. A. G. Stoletov scria în 1890: «îndată ce vom descoperi că transmiterea energiei cere un timp, oricît de mic, trebuie să conchidem că ea s-a produs prin participarea materiei intermediare. Dacă nu observăm materia obişnuită trebuie să admitem una nouă, invizibilă».

Totuşi, părerea că lumina este energia radiantă a intrat în uz. Cît de puternic s-a întărit se vede din aceea că O. D. Chwolsohn în bine cunoscutul său curs de fizică în mai multe volume, care a apărut în decursul a 35 ani (1897—1933) în 6 ediţii, a intitulat capitolele care se refereau la lumină: Studiul energiei radiante, şi a prelucrat textul în acest spirit.

În ultima ediţie din 1933, autorul a sintetizat dezvoltarea concepţiei despre lumină astfel: lumina este energia radiantă care «există şi se propagă.....». Astfel înţelegea situaţia nu numai Chwolsohn, ci şi mulţi alţi fizicieni.

Interpretarea luminii ca energie nu este întîmplătoare; ea înseamnă a opune conştient energia materiei şi un refuz principial de a considera lumina ca materie. Savanţii care stau pe aceste poziţii, cred că acest refuz este cu totul motivat de dezvoltarea fizicii. Într-adevăr, oare numeroasele încercări de a crea o imagine materială a luminii nu s-au arătat naive şi nu au trebuit să fie respinse? Oare ipotezele eterului mecanic sau ale eterului ca mediu universal nu au fost desminţite de fizică?

Într-adevăr aşa este. Nu înseamnă totuşi că ieşirea justă din această situaţie este renunţarea la încercarea de a crea o imagine materială a luminii pe altă bază, nemetafizică, şi recunoaşterea energiei ca ceva «care se conduce singur», adică independent de materie.

Aceasta trebuie cu atît mai mult să fie clar pentru fizicieni, cu cît în istoria ştiinţelor naturale a mai existat o încercare de a construi un punct de vedere energetic, însă el a întîlnit rezistenţa atît a naturaliştilor progresişti (D. I. Mendeleev), P. N. Lebedeev şi alţii), cît şi a filozofiei celei mai înaintate — materialismul dialectic — şi astfel acest punct de vedere a dat faliment.

II. Ce este energia? Energetismul şi criticarea lui de către Lenin

4. Termenul « energie » a obţinut o largă răspîndire în fizică după ce pe baza lui a fost descoperită legea conservării şi transformării energiei. Înainte, în fizică, în cazurile corespunzătoare era folosit termenul de « forţă ». Chiar Helmholtz care a consacrat demonstrării legii conservării şi transformării energiei (cum o numim acum după Engels şi Lenin) o carte clasică a numit această lege, legea conservării forţei. Noua noţiune a fost necesară, deoarece în vechile noţiuni era imposibil să se reflecte noile legi obiective descoperite şi formulate în legea indicată mai sus.

În cărţile de fizică este larg răspîndită definiţia energiei ca fiind capacitatea de a produce lucru mecanic, iar acesta din urmă se defineşte în mod normal ca produsul dintre forţă şi deplasare. În această definiţie, după cum va reeşi din cele ce urmează, nu este sesizată partea principală a energiei, esenţa sa.

Formularea justă şi generală a noţiunii de energie a fost dată nu de fizicieni care au fost forţaţi să introducă această noţiune în ştiinţă, ci de către F. Engels.

Analizînd şi generalizînd legile naturii de pe poziţiile materialismului dialectic, Marx şi Engels au stabilit că materia există sub diferite forme în interacţiune, şi care se transformă reciproc unele în altele. Această interacţiune a materiei este însăşi mişcarea sa. Mişcarea este modul de existenţă a materiei.

Această interpretare a lumii materiale este confirmată de tot mersul dezvoltării naturii şi societăţii. Însă de aici rezultă, că materia şi mişcarea sînt indisolubil legate, că nu există materie fără mişcare, după cum nu există mişcare fără materie. Mai mult decît atît, la diferite forme de existenţă ale materiei corespund forme de interacţiune caracteristice, adică forme particulare de mişcare. Astfel, dezvoltatea societăţii, recunoaşterea vieţii ca un proces biologic, interacţiunile studiate de fizică, toate aceste diferite forme de mişcare sînt specifice unor forme materiale determinate: societatea, creerul, organismul, corpurile fizice.

Engels a arătat că există diferite gradaţii ale formelor de existenţă ale materiei şi ale formelor de mişcare ale ei. Unele forme de existenţă ale materiei apar pe baza altora. De aceea unele forme sînt inferioare în raport cu altele, iar altele superioare. Astfel, organismele apar pe baza interacţiunilor corpurilor fizice în lungul proces al dezvoltării lor şi al trecerii lor de pe o treaptă pe alta în condiţii determinate. În organisme, în anumite condiţii de dezvoltare apare creierul ş.a.m.d. Formele superioare de mişcare includ formele inferioare însă nu se reduc la ele, ele au caractere proprii, a căror apariţie marchează naşterea formei superioare.

Noţiunea de energie caracterizează interacţiunea formelor fizice inferioare de mişcare, care sînt echivalente între ele; pentru forme superioare de mişcare ea nu este specifică şi li se aplică numai în măsura în care formele superioare includ forme inferioare sub forma subordonată lor. Ar fi neadevărat să afirmăm de exemplu, că energia determină legile dezvoltării societăţii sau ale specificului gîndirii.

Energia este aşa dar o noţiune specifică formelor fizice de mişcare.

După Engels, energia este măsura mişcării fizice, ce măsoară capacitatea unei mişcări fizice date, de a se transforma într-o cantitate determinată a unei alte forme de mişcare fizică.

Ce înseamnă măsura mişcării?

După cum se ştie, în secolul al XIX-lea s-a stabilit că există în natură forme fizice deosebite de mişcare care apar una din alta, şi se transformă una în alta. În transformarea a două forme anumite de mişcare se observă totdeauna constanţa raporturilor cantitative, care rămîne valabilă în orice sens ar avea loc transformarea (transformare a căldurii în lucru mecanic sau invers).

Stabilirea echivalenţei între diferitele forme de mişcare din punct de vedere calitativ pentru orice transformare, care are loc în anumite condiţii, reprezintă tocmai descoperirea legii conservării şi transformării energiei. Această descoperire a stat la baza formulărilor legii conservării şi transformării energiei (iar nu constanţa energiei din univers, lucru imposibil de stabilit direct).

De aici rezultă că noţiunea de măsură a mişcării apare anume atunci cînd două forme de mişcare, diferite din punct de vedere calitativ, se transformă una în alta şi astfel, încît să fie păstrate totdeauna anumite relaţii, fiecare caracterizînd formele de mişcare examinate. Aceasta este energia după Engels.

Însă mişcarea nu există fără materie, mişcarea este modul de existenţă a materiei. Prin urmare, şi energia fiind măsura mişcării, nu există în afara procesului material, în afara materiei. A afirma că energia are o existenţă independentă, în afara materiei, înseamnă a accepta ideea de mişcare fără materie, a gîndi modul de existenţă fără obiectul al cărui mod de existenţă este ea, înseamnă a aluneca pe panta idealismului.

5. Fondatorii marxismului preţuiau mult legea conservării şi transformării energiei. F. Engels, a arătat pentru prima oară, că cea mai importantă latură a ei este posibilitatea de transformare a formelor de mişcare, că legea transformării formelor de mişcare este identică cu legea conservării lor. El a stabilit că legea conservării şi transformării energiei este incompatibilă cu interpretarea legii a doua a termodinamicii ca « moarte termică a universului » datorită faptului că materia ar deveni inactivă în decursul timpului. În fine, el pune această lege în rîndul acelor mari descoperiri ale secolului al XIX-lea care justifică legătura generală a fenomenelor în natură. Aşa dar Engels a fost primul care a descoperit sensul fizic autentic al acestei legi, i-a dat o formulare justă, a apreciat valoarea ei specifică ca concepţie despre lume.

V. I. Lenin, după Engels, a considerat această lege drept « stabilirea poziţiilor fundamentale ale materialismului ».

În fizică această lege a devenit una din legile conducătoare în cercetări. Idealiştii au înţeles ce armă puternică au obţinut filozofia şi fizica materialistă prin această lege. Ei au căutat prin toate mijloacele, fie s-o defăimeze, să-i coboare valoarea sa fundamentală (Mach), fie să desmintă aplicabilitatea ei universală (Poincaré), fie să o interpreteze în spirit idealist.

La finele secolului al XIX-lea s-a format o grupă de filozofi şi naturalişti (Rankine, Ostwald ş.a.) care au pus în mod deschis problema desminţirii materialismului, bazîndu-se pe concepţia asupra energiei. Punctul de vedere al acestui grup a primit numirea de « energetism ». Energeticienii afirmau că în natură nu există nimic în afară de energie.

V. I. Lenin în lucrarea sa genială « Materialism şi empiriocriticism » a descoperit fondul idealist al acestei concepţii. El a arătat că oricît ar încerca energeticienii să-şi ascundă poziţia, ea este în fond o încercare de a gîndi mişcarea eliminînd ideea de materie. Iar aceasta nu este altceva decît idealism.

Trebuie să avem totdeauna în vedere indicaţiile lui V. I. Lenin asupra fondului energeticismului şi nu trebuie confundat fondul său original cu unele

raţionamente particulare. Astfel de exemplu, Ostwald la timpul său, a negat existenţa atomilor, aceasta fiind concluzia logică a filozofiei sale. Istoria şi-a bătut crunt joc de el: ultimele două decenii au constituit tocmai perioada în care dovezile existenţei atomilor se adunau din toate părţile.

În 1908 Ostwald a recunoscut totuşi, că atomii există în natură. Această afirmaţie a dat prilej unor scriitori să declare că energetismul s-a lichidat singur.

Însă a admite că odată cu recunoaşterea atomilor de către Ostwald energetismul dispare ca orientare idealistă ar fi o naivitate şi o dezarmare timpurie. Ostwald, după ce a recunoscut totuşi în 1908 existenţa atomilor, a scris mai tîrziu că în urma acestei recunoaşteri « energetica nu a suferit nici decum întrucît ea reprezintă forma cea mai generală a acestei noţiuni şi nu depinde de loc de faptul dacă există sau nu atomi ».

La fel s-a întîmplat şi cu machismul. După cum se ştie, şi Mach a negat existenţa atomilor pe baza faptului că atomii nu sînt daţi direct în senzaţii.

Pînă la sfîrşitul vieţii (1916) Mach nu a recunoscut existenţa lor, însă dezvoltarea fizicii a arătat că atomii există în mod real în natură.

Machiştii din zilele noastre recunosc existenţa atomilor, însă ei îi consideră doar ca nişte noţiuni auxiliare care ne ajută să sistematizăm percepţiile noastre, inclusiv cele obţinute cu ajutorul aparatelor. Atomii, ca obiecte care există în afara senzaţiilor noastre şi independent de ele, nu sînt recunoscuţi de machişti, energetiştii de azi; ei încearcă ca şi mai înainte, să conceapă mişcarea fără materie.

Un fizician ar putea raţiona astfel: cu ce greşesc eu dacă, vorbind despre lumină ca despre energie radiantă, consider că există în afara mea, în mod obiectiv, independent de conştiinţă, că ea, prin urmare, este ceea ce se numeşte materie?

Sigur, mulţi fizicieni raţionînd astfel, gîndesc despre energie în mod materialist. Chiar şi Ostwald s-a abătut pe această poziţie. Lenin scria: « Chiar şi la Ostwald se înţelegea în cea mai mare parte a cazurilor, prin energie, o mişcare materială ».

În legătură cu aceasta Lenin a observat că « în termenii energeticii » pot apărea materialismul şi idealismul (se înţelege, în mod mai mult sau mai puţin consecvent) ca şi în termenii « experienţei ş.a.m.d. ».

Observaţia lui Lenin dintre paranteze este foarte importantă. Nu poate fi consecvent acel materialist care consideră că există materie (iar mulţi fizicieni numesc materia substanţă) şi că alături de materie există energia ca ceva de sine stătător, adică în afara materiei.

III. Cîmpul ca formă de existenţă a materiei

6. Raţionamentele că lumina este energie se bazează, în fizică, pe cîteva procese luminoase (electromagnetice) particulare, care diferă de alte procese fizice, de exemplu mecanice, calorice şi altele. În fizică s-a arătat că în alte procese fizice se poate indica întotdeauna obiectul în care ele au loc, substanţa respectivă sau elementele sale — corpuri, molecule, atomi etc. În cazul de faţă, obiectul (sau cel puţin, totalitatea obiectelor) stă în faţa savantului înainte ca el să studieze proprietăţile sale speciale. Dacă punem obiectul de o parte, atunci trebuie să amînăm studiul. În afară de aceasta, studiind unele manifestări ale obiectului, fizicianul îi găseşte şi alte proprietăţi, care apar ca nişte însuşiri absolute ale lui. În cazul sunetului, de exemplu, aerul este obiectul,

sunetul este unda de condensare şi rarefiere a aerului. Aceste unde pot să se stingă în el, dar aerul ca obiect va continua să existe. Nu se întîmplă la fel în cazul proceselor electromagnetice (luminoase). Aici cîmpul devine obiect. Însă cîmpul noi nu-l percepem nemijlocit, ci în legătură cu acţiunea sa electromagnetică. Mult timp nu s-au cunsocut alte proprietăţi ale cîmpului în afară de acţiunea electromagnetică. Au fost încercări de a despărţi cîmpul de acţiunea sa, reprezentîndu-l de exemplu, sub forma unui eter liniştit în care undele luminoase pot să existe dar pot să nu existe, sau în care ele sînt rezultatele unor procese mecanice. Aceste încercări, după cum am văzut, nu au dat rezultate. În aceste împrejurări, fizicienii au identificat cîmpul şi acţiunea sa, cu energia.

Pe de altă parte, însuşi caracterul acţiunii cîmpului este diferit de acţiunea substanţei. Un corp acţionează asupra altui corp ca un întreg, cîmpul acţionează asupra altui cîmp sau a unui corp nu ca un întreg, ci numai în locul considerat. De exemplu în fenomenul de interferenţă rezultatele acţiunii a două cîmpuri care se suprapun într-un punct dat depind de starea lor în acel punct şi nu de starea în toate celelalte puncte ale cîmpului; acţiunea unuia şi aceluiaşi radioimpuls asupra unei antene depinde de condiţiile locale ale receptorului. Viteza de propagare a acţiunii într-un cîmp este o mărime constantă (dacă nu este un mediu material), pe cînd viteza de transmitere a acţiunii în corp depinde de mediul material.

O asemenea deosebire între cîmp şi materie corespunde reprezentării fizicii clasice [1]).

Concepţia despre cîmp a apărut încă din timpul cînd se studiau acţiunile reciproce ale sarcinilor (cîmpul electrostatic coulombian) sau ale maselor (cîmpul gravitaţional). Atîta timp cît viteza relativă a acestor sarcini sau mase este foarte mică faţă de viteza luminii, cîmpurile generate de ele pot fi considerate ca statice. Cîmpurile statice sînt esenţial diferite de cîmpurile dinamice. Faptul că propagarea acţiunii cere timp nu apare în cîmpurile statice, deoarece în calculul acţiunilor maselor şi sarcinilor statice nu figurează viteza de propagare a acţiunilor. Forţele care acţionează aici pot fi considerate în mod formal ca forţe care acţionează la distanţă. Însăşi noţiunea de cîmp a jucat în acest caz un rol pur ajutător. Mulţi au considerat cîmpul nu ca o formă de existenţă a materiei, ci ca un mijloc intuitiv pentru calcularea acţiunii forţelor care acţionează la distanţă. Astfel, cîmpul gravitaţional al Pămîntului a fost conceput de pildă, ca o metodă formală de calcul a forţei cu care Pămîntul atrage un corp de masă unitate situat în orice punct al spaţiului. Se vorbea despre cîmp ca despre arena de apariţie a forţelor. El a mai fost definit ca o stare specială a spaţiului geometric în care apar forţe [2]).

Lupta dintre partizanii acţiunii la distanţă care nu recunoşteau realitatea cîmpului şi partizanii acţiunii din aproape în aproape care considerau cîmpul ca fiind real, nu a dat în acea vreme preponderenţă nici uneia din părţi: în domeniul staticii nu existau criterii care să hotărască justeţea uneia sau alteia dintre poziţii.

Aşa a fost pînă cînd s-au introdus în fizică cîmpul electromagnetic variabil şi cîmpul sarcinilor în mişcare. Acţiunea reciprocă a sarcinilor în mişcare se

---

[1]) S-a stabilit ulterior, că particulele de substanţă şi fotonii cîmpului diferă şi prin aceea că primele au o « masă de repaus » nenulă (şi o energie corespunzătoare ei), iar ultimii nu au « masă de repaus ».

[2]) Astfel, fizicianul german R. V. Pohl scrie: « Aşadar, cîmpul electric este o stare specială a spaţiului ».

realizează prin cîmpul electromagnetic; viteza de propagare a acţiunii într-un cîmp electromagnetic joacă un rol esenţial în acţiunea reciprocă a sarcinilor. Deja această împrejurare a ridicat chestiunea că propagarea acţiunii este un proces fizic, care decurge dintr-un obiect material — cîmpul, iar cîmpul nu poate fi considerat ca un mijloc de calcul ajutător, forţele neputînd fi considerate ca acţionînd la distanţă.

Studiul cîmpurilor electromagnetice a arătat că ele nu numai că se deosebesc de substanţă, însă au cu ea şi multe părţi comune, că acţiunile electromagnetice ale cîmpurilor există, însă nu sînt unice în manifestările lor.

Încă din teoria lui Maxwell rezultă că cîmpul electromagnetic variabil trebuie să exercite presiune asupra substanţei. Demonstrarea experimentală a existenţei acestei presiuni a avut un adînc sens principial. Însă experienţele au fost excepţional de grele. Marele fizician rus P. N. Lebedev a ştiut să învingă toate greutăţile experienţei, el a realizat experienţa, surprinzător de ingenioasă prin complexitatea şi fineţea realizării tehnice, şi a demonstrat că lumina exercită într-adevăr o presiune asupra corpurilor solide (1900), precum şi asupra gazelor (1910).

Oricît de mică este presiunea luminoasă, ea joacă un rol foarte mare în natură şi multe probleme de astrofizică au început să se formuleze mai profund şi să se lămurească în urma lucrărilor lui P. N. Lebedeev. Cea mai intuitivă manifestare a presiunii luminoase constă în formarea cozilor la comete. Însă este şi mai mare influenţa esenţială a acestor forţe în mersul proceselor astrofizice. Forţele de respingere ale presiunii luminoase concurează peste tot cu forţele de atracţie şi le depăşesc sau sînt depăşite de ele, în funcţie de împrejurări, întrucît primele sînt forţe de suprafaţă, iar celelalte de volum. Raportul dintre forţele presiunii luminoase şi forţa de atracţie determină după părerea unor astrofizicieni şi dimensiunile limită ale stelelor şi formarea noilor corpuri cosmice din praful cosmic. Din faptul stabilit al presiunii luminii de către P. N. Lebedev rezultă că lumina sau cîmpul electromagnetic, ca şi substanţa, posedă impuls şi deci şi masă.

În primul sfert al secolului al XX-lea au fost stabilite asemănări uimitoare între structura cîmpului şi a substanţei. Pe de altă parte, s-a arătat cum cîmpurile, care pînă atunci erau considerate ca formaţiuni continue, au în acelaşi timp şi proprietatea de a fi continuie şi de a fi discrete (cuante de lumină, 1900). Pe de altă parte, substanţa a cărei structură, mai ales în conformitate cu teoria cinetico-moleculară, era considerată discretă, manifestă în acelaşi timp şi proprietăţi ondulatorii (difracţia electronilor, neutronilor etc.,— 1927 şi mai tîrziu). S-a arătat că este greşit să se opună substanţa, ca fiind ceva absolut discret, cîmpului, ca fiind ceva absolut continu.

A devenit de asemenea clar, că atît substanţă este o denumire colectivă pentru o totalitate de forme diferite de obiecte materiale (corpuri, molecule, atomi ş.a.) cît şi cîmpul este o denumire colectivă pentru o totalitate de cîmpuri de forme diferite; în afară de cîmp electromagnetic şi gravitaţional mai există şi cîmpul care transmite interacţiunea elementelor care alcătuiesc nucleele (nucleoni), — cîmpurile nucleare sînt de o natură esenţial diferită de cîmpurile electromagnetice şi gravitaţionale.

Aşadar, fizica a arătat că, cîmpul posedă impuls, masă, moment cinetic. Acţiunile electromagnetice sînt esenţiale pentru cîmpul electromagnetic, însă nu epuizează proprietăţile sale în întregime, nu se contopesc cu el. Acţiunile cîmpului se propagă cu viteză finită, prin urmare propagarea acţiunii

este un proces fizic, care se realizează într-un mediu material. Cîmpul influenţează substanţa, şi este el însuşi supus influenţei ei. Structura cîmpului este aşadar discretă ondulatorie ca şi structura substanţei. Existenţa obiectivă a undelor electromagnetice a fost dovedită prin larga practică a radiotehnicii.

Deja aceste rezultate, scoase la iveală cu 20—25 ani în urmă, au dus la concluzia că, cîmpul nu este altceva decît un obiect, una din formele de existenţă ale materiei, care există alături de cealaltă formă a sa — substanţa.

Totuşi, lupta împotriva concepţiei asupra cîmpului ca formă de existenţă a materiei a fost dusă în mod îndîrjit de anumiţi fizicieni.

Lupta aceasta pentru adepţii interpretării formaliste a cîmpului s-a simplificat prin aceea că adversarii lor au trecut, ca şi mai înainte, pe poziţii mecaniciste în fizică, sprijinindu-se pe Faraday şi Maxwell, ei au insistat nu numai asupra apărării poziţiilor lor principiale materialiste, ci şi asupra reprezentărilor lor concrete asupra structurii cîmpului, asupra liniilor de forţă şi altele, azi vulnerabile; prin aceasta ei nu au ţinut de loc seamă de rezultatele dezvoltării fizicii în ultima jumătate a secolului.

Nu se poate trece cu vederea aici şi episodul instructiv din istoria fizicii — discuţia « asupra naturii curentului electric » dusă la Asociaţia internaţională a electrotehnicienilor » la Leningrad în 1930. Partizanii acţiunii la distanţă şi ai tratării formaliste a cîmpului ca o construcţie ajutătoare, ca o creaţie a conştiinţei noastre, au intrat în această discuţie cu o poziţie categorică, ei fiind în majoritate. Redactarea stenogramei arată că majoritatea fizicienilor contemporani împărtăşesc punctul de vedere că interacţiunea dintre corpurile fizice se realizează ca o acţiune la distanţă, ipoteză justificată de foarte multe fapte experimentale.

Aceasta a fost o greşeală profundă.

După cum se arată în acest articol, chiar în timpul acela erau suficiente date pentru generalizarea materialistă a concepţiei asupra cîmpului (nicidecum pe baze mecaniciste). Şi tocmai în acea vreme în fizica experimentală se efectuau experienţele care au devenit hotărîtoare în stabilirea conceperii cîmpului ca o formă de existenţă a materiei.

În 1932 a fost descoperit pozitronul, iar la începutul anului 1933 a fost descoperit fenomenul de transformare reciprocă între perechia electron-pozitron şi caunte gama dure (fotoni), adică elemente ale cîmpului electromagnetic. Aşadar s-a stabilit că substanţa se transformă în cîmp şi invers: cîmpul în substanţă.

Însă ce înseamnă aceasta? Aceasta înseamnă că şi substanţa şi cîmpul reprezintă numai diferite forme de existenţă ale materiei.

Toate raţionamentele pseudo-ştiinţifice de felul aceluia în care cîmpul este o construcţie ajutătoare a gîndirii nostre s-au spulberat.

De aici rezultă, că fizica teoretică, care îşi fixează ca sarcină numai crearea reţetelor de calcul, nu are posibilitatea să dea o perspectivă clară, pe care trebuie să o posede în realitate o teorie ştiinţifică înaintată. Această posibilitate o posedă numai acea fizică, care îşi construieşte teoriile ca o imagine a lumii obiective, care sintetizează această imagine pe baza generalizării studiilor experimentale ale lumii materiale, adică fizica, care se conduce după teoria materialist-dialectică a cunoaşterii.

7. Reprezentările actuale asupra cîmpului ca formă de existenţă a materiei diferă în mod esenţial de reprezentarea lui Lorentz asupra cîmpului ca eter.

La Lorentz eterul se prezintă ca un mediu universal, identic totdeauna cu el însuşi, ca un întreg nemişcat, neschimbat, absolut. Aceste puncte de vedere

nu au dat rezultat pentru că s-au arătat incompatibile cu legile electrodinamicii corpurilor în mişcare. Actualmente, cîmpul este conceput ca o formă de existenţă a materiei care apare într-o serie de cazuri din substanţă ca rezultat al transformării sale şi se transformă din nou în substanţă. Înseamnă că nu poate fi considerat ca un mediu absolut universal, ci trebuie luat totdeauna în condiţiile concrete ale apariţiei şi transformării sale. Această formulare a problemei eliberează fizica de fetişele metafizice şi o pune pe terenul real al studiilor concrete.

Experienţele arată că atît cîmpul cît şi substanţa sînt strîns legate între ele. Nu numai că se transformă unul în altul în condiţiile cunoscute, ci îşi condiţionează şi mişcarea şi proprietăţile unul altuia. Astfel, cîmpul este o condiţie necesară a acţiunilor reciproce ale elementelor substanţei (corpuri, molecule, atomi ş.a.), cu alte cuvinte acţiunea reciprocă a substanţei există numai datorită cîmpului.

Mai departe, însăşi mişcarea materiei, deplasarea ei, nu este altceva decît variaţia legăturii substanţei cu cîmpul, şi această variaţie influenţează proprietăţile materiei — dimensiunile sale, masa, ritmul de producere a proceselor în ea. Fizica modernă a stabilit că dimensiunile, masa şi ritmul proceselor în corp depind de raportul vitezei v a corpului (în sistemul în care el intră), către viteza de propagare c a acţiunii în cîmp, care leagă acest corp de alte corpuri într-un sistem unic. Astfel de exemplu s-a stabilit că masa corpului care se mişcă este $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, unde m_0 reprezintă masa de repaos a corpului în sistemul dat.

În lumina înţelegerii cîmpului ca formă de existenţă a materiei această dependenţă a proprietăţilor corpului de viteză capătă un sens şi o interpretare raţională.

Descoperirii transformării reciproce între substanţă şi cîmp, fizicienii ţărilor burgheze i-au dat o interpretare idealistă, imaginînd-o greşit ca un proces al anihilării (pieirii) materiei.

Însă nu sînt şi nu pot fi fapte care să domonstreze dispariţia materiei: faptele vorbesc că materia trece dintr-o formă într-alta. O înţelegere justă materialistă a cîmpului nu vine de la sine, trebuie luptat pentru ea. Trebuie să ne bazăm pe studiul multor fapte, pe analiza întregului proces de cunoaştere, căci fără o filozofie ştiinţifică marxistă nu se poate rezolva problema urgentă a progresului rapid al ştiinţei.

Am încercat pe baza analizei istorice a dezvoltării concepţiilor noastre despre lumină şi din punct de vedere filozofic şi fizic să arătăm că afirmaţia: lumina este o formă de energie — este neadevărată, că ea induce în eroare, chiar dacă însuşi autorul nu leagă de ea negarea materialităţii cîmpului electromagnetic.

Lumina (cîmp electromagnetic) este o formă de existenţă a materiei. Aceasta este demonstrat acum prin aceea că sînt stabilite şi apariţia luminii din altă formă de existenţă a materiei — substanţa, şi proprietatea luminii de a se transforma în această altă formă de existenţă a materiei. Academicianul S. I. Vavilov a scris: «Lumea materială care există — materia în mişcare — ni se prezintă sub două forme fundamentale — ca substanţă şi ca lumină»[1]).

[1]) *S. I. Vavilov*, — Ochiul şi soarele, colecţia «Ştiinţa pentru toţi», 1953.

Se înţelege că orice formă de existenţă a materiei, în care intră şi lumina, posedă mişcare, care se supune legii generale de conservare şi transformare şi de aceea posedă şi energie. Însă nici o formă de existenţă a materiei nu se poate identifica cu energia. Aşa stau lucrurile în problema: «Ce este lumina».

UN NOU PROCEDEU PENTRU STABILIREA VIZIBILITĂŢII ÎN EPURĂ A UNEI DREPTE *)

Ing. M. IORGA

PROCEDEELE ce se utilizează în mod curent, în Geometria descriptivă, pentru stabilirea vizibilităţii în epură a unei drepte care intersectează un plan, dau loc, uneori, la incertitudini sau, de-adreptul, la greşeli de interpretare, mai ales în cazurile în care planul sau dreapta ocupă poziţii particulare faţă de planele de proiecţie, iar cei chemaţi să rezolve asemenea probleme nu sînt familiarizaţi cu aceste procedee.

Pentru a înlătura asemenea neajunsuri, am stabilit o regulă care, după cum se va vedea mai jos, este nu numai uşor de aplicat ci, *în cazurile în care*

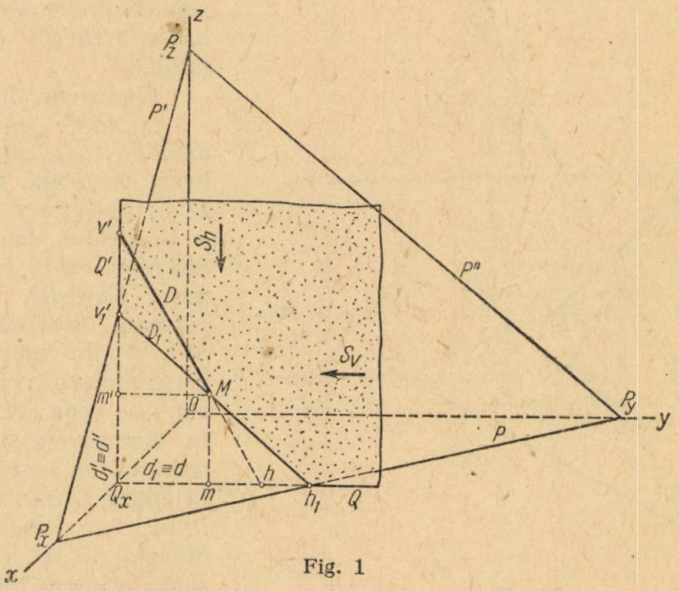


Fig. 1

planul este dat prin urmele sale, conduce spre construcţii mai simple şi mai rapide decît cele ce se întîlnesc în cazul utilizării procedeelor curente.

Să presupunem, de exemplu, că am avea mai întîi (fig. 1), un plan $P'P_xP$, care traversează diedrul I, fiind înclinat faţă de planele de proiecţie, şi să ne închipuim că acest plan ar fi tăiat de un plan de profil, $Q'Q_xQ$.

Să notăm cu d_1 şi d'_1 proiecţia orizontală şi cea verticală a dreptei D_1, în lungul căreia se taie cele două plane, iar cu $(h_1; h'_1)$ şi $(v_1; v'_1)$ urma orizontală şi cea verticală a acestei drepte.

Să ne închipuim apoi că, printr-un punct oarecare M $(m; m')$, de pe această dreaptă, am face să treacă o dreaptă, D, conţinută în planul de profil,

*) Pentru cercurile de elevi ale şcolilor tehnice şi tehnice de maiştri.

şi să notăm cu (v'; v) urma verticală, iar cu (h; h') urma orizontală a acestei drepte. Aceste urme se vor afla pe urmele de acelaşi nume ale planului de profil (dat fiind că dreapta este conţinută chiar în acest plan).

Punctul M, în care dreapta D înţeapă planul $P'P_xP$, împarte segmentul $v'h$, de pe această dreaptă, în două segmente: $v'm$ şi Mh.

Dacă privim dreapta D în direcţia săgeţii s_h, constatăm că segmentul $v'M$, fiind situat deasupra dreptei D_1, se va vedea, pe cînd segmentul Mh, situat dedesubtul acestei drepte, nu va fi văzut.

Observăm apoi, că proiecţia orizontală, m, a punctului M cade în interiorul unghiului OP_xP, tot aşa după cum şi urma orizontală, h, a dreptei D cade în interiorul acestui unghi. În consecinţă, *segmentul mh nu va fi tăiat de urma orizontală $P_x P$ a planului.*

Dacă privim acum dreapta D în direcţia săgeţii s_v, constatăm că segmentul Mv' se vede, deoarece este situat în faţa planului $P'P_xP$, pe cînd segmentul Mh nu se vede deoarece este situat în spatele acestui plan.

Observăm apoi, că proiecţia verticală, m', a punctului M cade în interiorul unghiului $P'P_xO$, pe cînd urma verticală v' a dreptei D cade în afara acestui unghi. În consecinţă, *segmentul v'm' va fi tăiat de urma verticală $P'P_x$ a planului.*

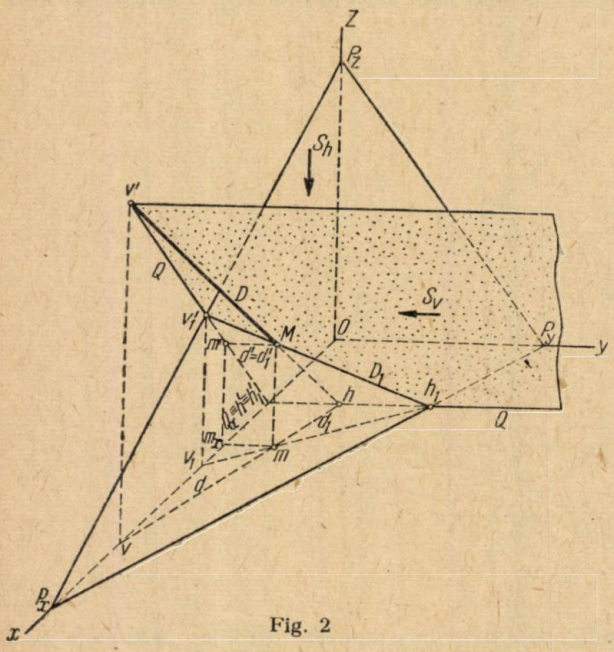


Fig. 2

Deducem de aici că:

— *dacă segmentul de dreaptă v'm'*, cuprins între urma verticală, v', a dreptei D şi proiecţia verticală, m', a punctului de intersecţie, *este tăiat*, ca în figura 1, *de urma verticală, P_x P'*, a planului, înseamnă că segmentul din spaţiu, *v'M*, a cărui proiecţie verticală este *v'm'*, se vede cînd îl privim în direcţia s_v şi deci, *segmentul v'm' se va reprezenta în epură printr-o linie continuă*, iar prelungirea lui dincolo de m' se va reprezenta printr-o linie segmentată, pe cînd

— *dacă segmentul de dreaptă hm*, cuprins între urma orizontală, h, a dreptei şi proiecţia orizontală, m, a punctului de intersecţie, *nu este tăiat* de urma orizontală, *$P_x P$, a planului*, înseamnă că segmentul *Mh*, din spaţiu, a cărui proiecţie orizontală este *hm*, nu se vede cînd îl privim în direcţia s_h şi deci *segmentul hm se va reprezenta în epură printr-o linie segmentată*, iar prelungirea lui dincolo de m se va reprezenta printr-o linie continuă.

★

Să presupunem acum, că dreapta D, în loc să fie, ca în fig. 1, o dreaptă de profil, ar fi, ca în fig. 2, o dreaptă înclinată oricum faţă de planele de proiecţie.

În acest caz, pentru a determina punctul în care dreapta înţeapă planul $P'P_xP$, vom face să treacă prin dreapta D un plan proiectant (care, în cazul ilustrat în fig. 1, este un plan de capăt).

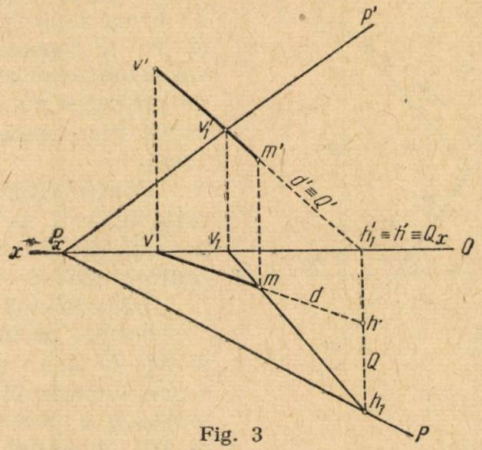


Fig. 3

După cum ne arată însăşi figura, observaţiile făcute în cazul fig. 1 se pot verifica şi în acest caz.

★

Plecînd de la aceste constatări, putem stabili următoarea regulă generală:

În cazul cînd o dreaptă şi un plan se taie în diedrul I, porţiunea de dreaptă cuprinsă în acest diedru se va reprezenta în modul următor:

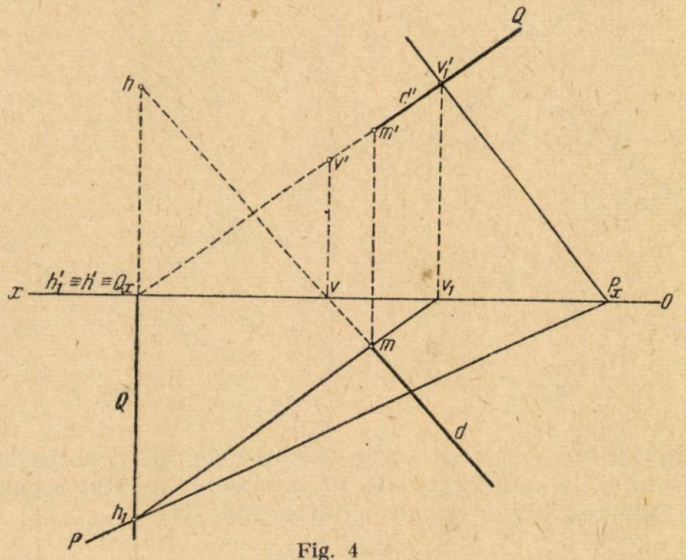


Fig. 4

— dacă segmentul de dreaptă cuprins între una din urmele dreptei şi proiecţia de acelaşi nume a punctului de intersecţie cu planul este tăiat de

urma de acelaşi nume a planului, segmentul va fi reprezentat în epură printr-o linie continuă, iar prelungirea sa dincolo de proiecţia punctului de intersecţie se va reprezenta printr-o linie segmentată, pe cînd

— dacă segmentul nu este tăiat de urma de acelaşi nume a planului, el va fi reprezentat printr-o linie segmentată, iar prelungirea sa dincolo de proiecţia punctului de intersecţie se va reprezenta printr-o linie continuă.

Pentru verificarea acestei reguli este ilustrat, în fig. 3 şi 4, cazul general, iar în fig. 5···7 sînt prezentate cîteva cazuri particulare.

În cazul cînd proiecţia orizontală a punctului de intersecţie se află, ca în fig. 7, chiar pe urma orizontală a planului (sau în cazul cînd proiecţia verticală a punctului de intersecţie se află chiar pe urma verticală a planului), înseamnă că sînt îndeplinite în acelaşi timp ambele condiţii stabilite prin regula enunţată mai sus, şi deci, în proiecţia respectivă (care, în cazul din fig. 7, este proiecţia orizontală), se va reprezenta printr-o linie continuă atît

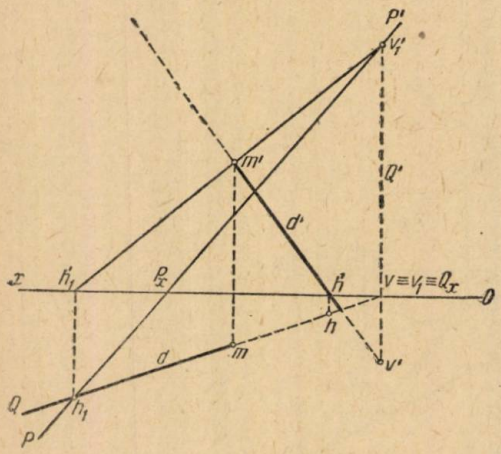


Fig. 5

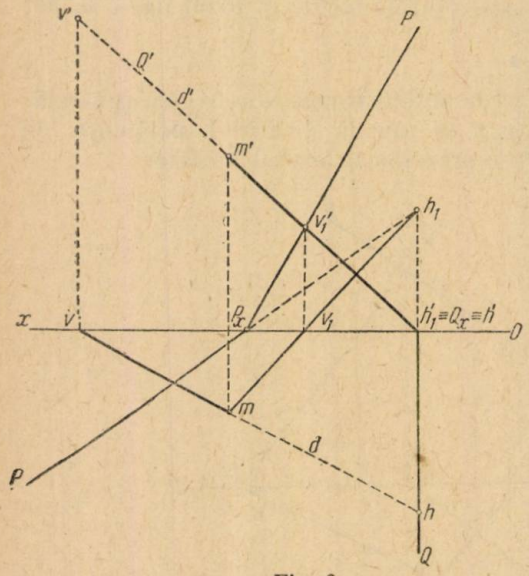


Fig. 6

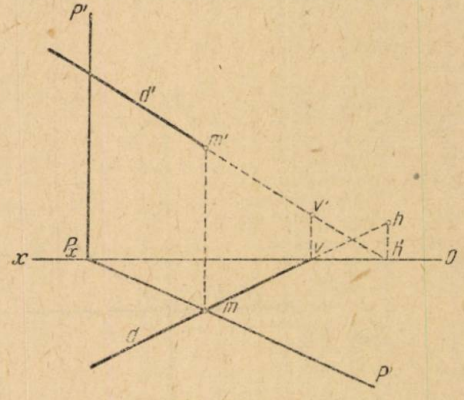


Fig. 7

segmentul cuprins între urma de acelaşi nume a dreptei şi proiecţia de acelaşi nume a punctului de intersecţie, cît şi prelungirea acestui segment dincolo de proiecţia punctului (pe porţiunea din diedrul I).

TEOREMA LUI CLAIRAUT[1])

O GENERALIZARE MAI PUȚIN CUNOSCUTĂ A TEOREMEI LUI PYTHAGORA

VALERIU UDRESCU
student, fac. matematici, București

Fie ABC un triunghi oarecare. Construim pe laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ paralelogramele AA_1B_1B și AA_2C_1C (v. fig. 1). Notăm cu M punctul de intersecție

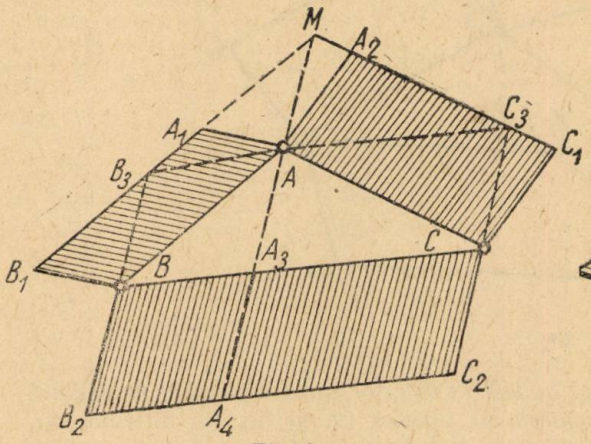


Fig. 1

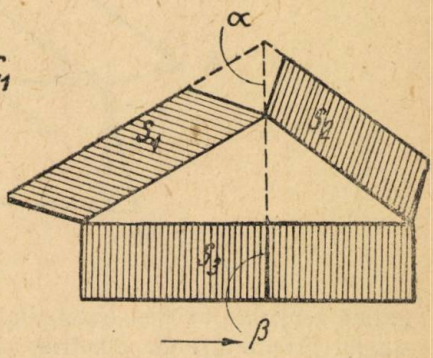


Fig 2

al laturilor $\overline{A_1B_1}$ și $\overline{A_2C_1}$. Prelungind segmentul $\overline{MA}$ dincolo de A, obținem punctul A_3, intersecția lui $\overline{MA}$ cu $\overline{BC}$; pe dreapta (AA_3) [2]), dincolo de A_3, construim pe A_4 astfel ca:

$$\overline{A_3A_4} = \overline{AM}.$$

În fine, construcția paralelogramului BCC_2B_2 cu $\overline{BB_2}$, paralelă și egală cu $\overline{A_3A_4}$, ne permite să enunțăm:

Teorema lui Clairaut. Suma suprafețelor paralelogramelor arbitrare AA_1B_1B și AA_2C_1C este egală cu suprafața paralelogramului BCC_2B_2 (v. și fig. 2).

Demonstrație. — Dacă B_3 și C_3 sînt intersecțiile lui $\overline{BB_2}$ cu $\overline{B_1M}$ respectiv $\overline{CC_2}$ și $\overline{C_1M}$, atunci egalitățile următoare (imediate pe figură):

$$\overline{AM} = \overline{BB_3} = \overline{BB_2} = \overline{CC_2} = \overline{CC_3}\ ;\ \overline{MB_3} = \overline{AB} \text{ și } \overline{MC_3} = \overline{AC}$$

ne permit să scriem că:

$$S_{AA_1B_1B} = S_{BB_2MA}\ ;\quad S_{AA_2C_1C} = S_{CC_2MA};\quad S_{BB_2C_2C} = S_{BB_2C_2C},\quad S_{MB_2C_2} = S_{ABC}$$

---

[1]) Redăm o generalizare a teoremei lui Pythagora, datorită matematicianului francez Alexis-Claide Clairaut, a cărei expunere se găsește și în cunoscutele Éléments de géométrie par F.J., Paris, 1909, p. 175.

[2]) Peste tot, notația $(ABC \ldots ZW)$ reprezintă dreapta definită de punctele A, B, C, ..., Z și W (normal, numai în cazul în care ele sînt colineare).

cu care conchidem la:

$$S_{AA_1B_1B} + S_{AA_2C_1C} = S_{BB_3MA} + S_{CC_3MA} = S_{BB_3MC_3C} - S_{ABC} = S_{MB_3C_3} +$$
$$+ S_{BB_3C_3C} - S_{ABC} = S_{BB_3C_3C} = S_{BB_2C_2C}.$$

Observaţie. — Dacă a fost indiferentă *construcţia în exterior* [3]) a paralelogramului BB_2C_2C, nu mai este însă indiferent faptul că cele două paralelo-

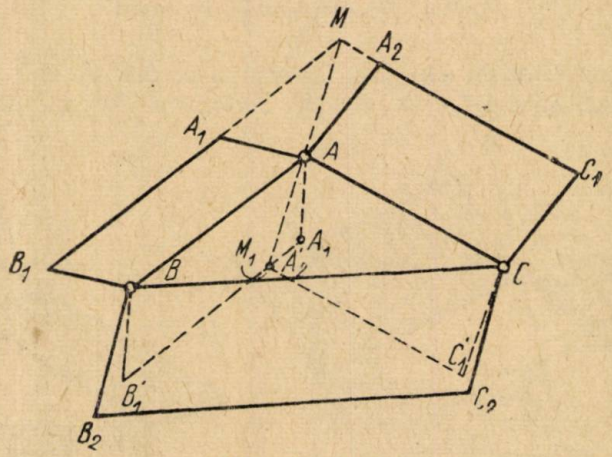


Fig. 3

grame arbitrare au fost construite *ambele în exterior* sau (după cum ne asigură simple proprietăţi de simetrie) *ambele în interior* (v. şi fig. 3). Într-adevăr, construindu-le alternat, de exemplu, pe AA_1B_1B (a cărui suprafaţă o vom nota cu S_1) în exterior, iar pe AA_2C_1C (fie S_2 suprafaţa lui) în interior, repetînd construcţia pentru a obţine paralelogramul BB_2C_2C (de suprafaţă S_3^1) şi admiţînd *a priori* teorema lui Clairaut ca adevărată, într-o astfel de construcţie, ar rezulta că:

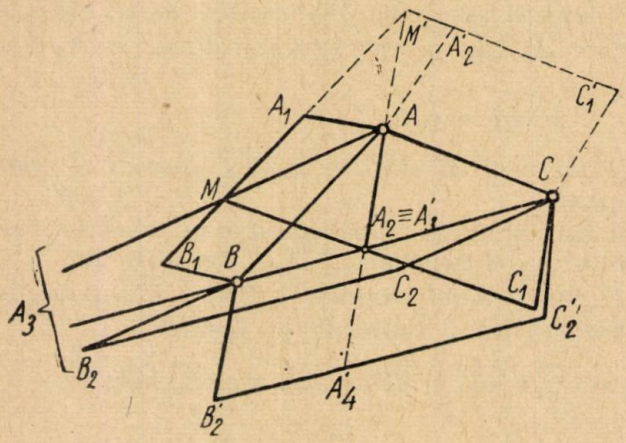


Fig 4

$S_3^1 = S_1 + S_2$ (teorema lui Clairaut nedemonstrată [4]), o falsitate după cum ne-o dovedeşte fig. 4 (pe care am trasat punctat construcţia lui Clairaut cu S_2 în exterior), deoarece

[3]) mă refer la interiorul triunghiului; faptul că este indiferentă construcţia în exterior a paralelogramului BB_2C_2C ni-l dovedeşte chiar demonstraţia teoremei dată mai sus; într-adevăr, construcţia interioară este reprezentată de paralelogramul BB_3C_3C, pentru care am demonstrat identitatea, ca suprafaţă, cu BB_2C_2C (construcţia exterioară).

[4]) $S_3 = S_{BCC_2^1B_2^1}$ (pe fig. 4).

$S_3 = S_1 + S_2$ (teorema lui Clairaut demonstrată !) ar rezulta că $S_3^1 = S_3$ şi în ultimă instanţă (ele avînd aceiaşi bază) egalitatea înălţimilor lor. Contradicţia cu construcţia din fig. 4 este acum evidentă. Concluzia:

Teorema lui Clairaut rămîne valabilă atîta timp cît construcţia ei se efectuează în exteriorul sau numai în interiorul triunghiului ABC [5]).

Propoziţia. *Relaţia lui Pythagora, — corolar al teoremei lui Clairaut.*

Demonstraţie. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC (cu unghiul drept în A) şi paralelogramele AA_1B_1B şi AA_2C_1C degenerate în patrate (fig. 5). Că $\overline{MA} = \overline{BC} = \overline{A_3A_4}$ este evident;

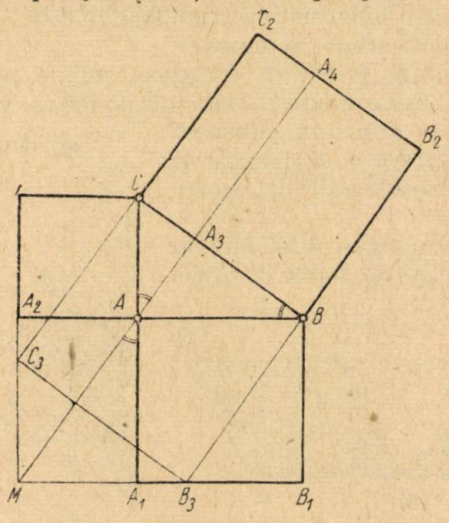


Fig. 4

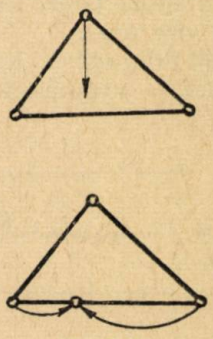


Fig 5 bis

mai rămîne să arătăm că dreptele (MA) şi (BC) sînt perpendiculare.

Pentru aceasta observăm că din egalitatea triunghiurilor MAA_1 şi ABC decurge:

$$\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAA_3,$$

punctele M, A şi A_3 fiind colineare, prin construcţie.

Această ultimă egalitate, împreună cu ipoteza că $(AC) \perp (AB)$ ne asigură perpendicularitatea dreptelor (AA_3) şi (BC) (reciproca unei cunoscute propoziţii), cu care teorema lui Clairaut:

$$S_{AA_2C_1C} + S_{AA_1B_1B} = S_{BB_3C_3C}$$

devine relaţia lui Pythagora:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2.$$

Observaţie. — O asociere convenabilă a demonstraţiilor precedente permite obţinerea unei demonstraţii de sine stătătoare a teoremei lui Pythagora:

Aplicaţii la triunghiuri degenerate.

Definiţie. Numim transport minim al unui punct oarecare X exterior unei drepte (Δ) pe (Δ) proiecţia lui X pe (Δ), iar dacă X este situat chiar pe (Δ) înţelegem prin transportul minim al lui X pe (Δ) orice translaţie a acestui punct pe (Δ).

---

[5]) se poate demonstra echivalenţa acestei formulări cu următoarea: «atît timp cît $\overline{MA}$ intersectează pe $\overline{BC}$ în interior».

Se observă că dacă X este exterior lui (Δ) transportul lui minim este *unic determinat*, pe cînd dacă X este pe (Δ) transportul lui minim este *nedeterminat*; el devine determinat dacă vom indica acel punctus terminus al translației.

Profitînd de această definiție, *convenim ca toate deformațiile triunghiului ABC într-un segment de dreaptă, să se facă numai cu ajutorul transporturilor minime.*

Devine clar că în asemenea condiții deformațiile triunghiului ABC se pot împărți — ca ideie de lucru — în două grupe, și anume:

— o grupă de construcții rezultate printr-un transport minim al unui vîrf oarecare pe latura opusă (în total, trei construcții: cîte una de fiaare vîrf), și

— o grupă de construcții rezultate printr-un transport minim de două vîrfuri oarecari pe latura ce o definesc și într-un acelaș punct final (iarăș trei construcții: de fiecare latură cîte una).

Un prim caz de degenerare a triunghiului ABC într-un segment de dreaptă (să-l denumim cazul $\mathfrak{A}$), îl va constitui

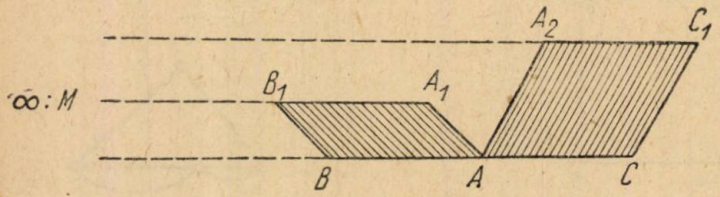


Fig. 6

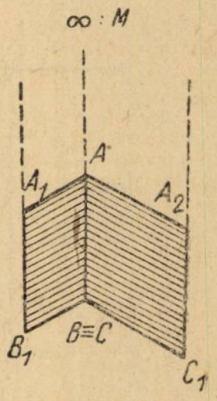


Fig. 7

aducerea vîrfului A pe latura BC. Construcția teoremei lui Clairaut efectuată în acest caz (fig. 6), ne arată că dreptele (B_1A_1) și (A_2C_1) sînt paralele între ele și paralele cu (BAC), concurente deci (toate trei) la infinit; ca atare, dreptele (MA) și (BC) sînt confundate. Intersecția lor este nedeterminată (dar în orice caz pe dreapta (BAC): la fel ca și construcția paralelogramului BCC_2B_2.)

Cu toate acestea putem afirma sigur că suprafața lui este nulă și iată dece), considerînd că P — un punct *complet arbitrar* de pe dreapta $(MBAC)$ — este intersecția căutată a dreptelor (MA) și (BC), ne asigurăm pe dată că și celelalte două vîrfuri (vîrfurile B_2 și C_2) ale paralelogramului BCC_2B_2 sînt situate tot pe dreapta (BC); că în astfel de condiții, suprafața acestui paralelogram va fi nulă, este evident. Cum P este oarecare pe (BC), afirmația noastră este dovedită și răspunsul căutat la întrebarea pusă, imediat: *în acest prim caz de degenerare, teorema lui Clairaut nu se mai menține*; într-adevăr,

$$S_{BB_2C_2C} = 0 \neq S_{BAA_1B_1} + S_{AA_2C_1C}.$$

Remarcabil este însă faptul că, *în timp ce teorema lui Clairaut cade, relația lui Pythagora (corolar al teoremei lui Clairaut!) se menține dacă și numai dacă proiecția lui A este situată între B și C* (cazul figurii).

Demonstrația absolut identică, atît a inexactității teoremei lui Clairaut cît și a relației lui Pythagora, în cea de-a doua posibilitate de degenerare a triunghiului ABC într-un segment de dreaptă (cazul $\mathfrak{B}$, fig. 7): transportarea vîrfurilor B și C într-un acelaș punct de pe latura BC, o lăsăm în seama cititorului.

Schimbînd acum rolul lui A cu cel al lui B, în aceste două cazuri precedente, obţinem încă două posibilităţi de degenerare. Demonstraţii aproape identice ne conduc cu uşurinţă la rezultatele următoare:

Cazul ℭ: vîrful B este transportat pe (AC); teorema lui Clairaut cade, în timp ce relaţia lui Pythagora [6]) se menţine dacă $\sphericalangle A \geqslant 90°$.

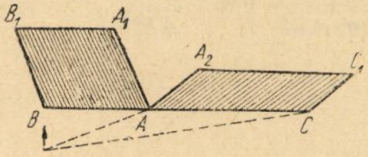
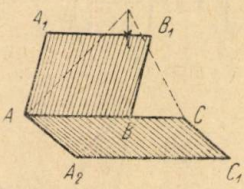


Fig. 8



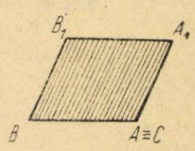


Fig. 9

Cazul 𝔇: A transportat în C; teorema lui Clairaut cade, relaţia lui Pythagora menţinîndu-se.

Intervertirea rolurilor lui B şi C în cazurile precedente ℭ şi 𝔇 nu ar genera alte cazuri dinstincte de acestea.

Teorema lui Clairaut sub formă trigonometrică

Pentru a obţine reprezentarea trigonometrică a teoremei lui Clairaut degenerăm paralelogramele în dreptunghiuri echivalente. Citim astfel, pe fig. 15, că patrulaterul MA_1AA_2 este inscriptibil şi că cercul său circumscris are pe AM ca diametru (acest cerc coincide cu cercul circumscris triunghiului A_1AA_2); anumite relaţii trigonometrice cunoscute ne permit să scriem, în relaţiile şi notaţiile de pe figură, că

$$\overline{AM} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\sin(\pi - A)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 \pm 2xy\cos A}}{\sin A}, \tag{1}$$

luînd semnul $\pm$ după cum $\sphericalangle A < 90°$ (deci $\pi - \sphericalangle A > 90°$) sau $\sphericalangle A > 90°$ ($\pi - \sphericalangle A < 90°$).

Din triunghiul BB_3B_4 se obţine:

$$\sin(B + \alpha) = \frac{x}{AM}\ ; \quad \sphericalangle B = \arcsin\frac{x}{AM} - \alpha, \tag{2}$$

iar teorema lui Clairaut conduce la relaţia:

$$\overline{AM} \cdot a \cdot \sin\alpha = by + cx, \tag{3}$$

de unde:

$$\sin\alpha = \frac{by + cx}{a\,\overline{AM}}\ ; \ \alpha = \arcsin\frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}}. \tag{4}$$

---

[6]) peste tot relaţia lui Pythagora, generată de teorema lui Clairaut, va fi relaţia $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ (considerăm numai şi numai paralelogramele arbitrare AA_1B_1B şi AA_2C_1C).

Eliminarea lui α între (2) şi (4) ne dă:

$$\sphericalangle B = \arcsin \frac{x}{\overline{AM}} - \arcsin \frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}} \tag{5}$$

sau [7]):

$$\sin B = \frac{x}{\overline{AM}} \sqrt{1 - \left(\frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}}\right)^2} - \frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\overline{AM}^2}}. \tag{6}$$

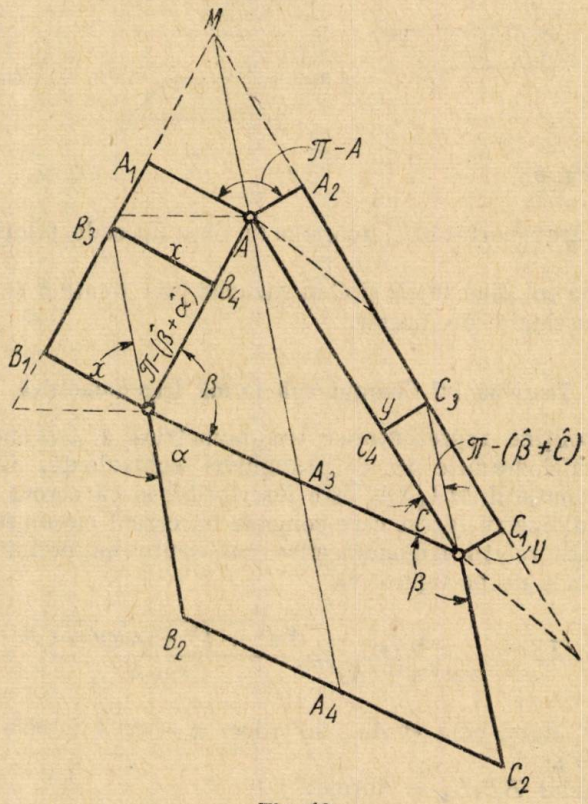


Fig. 10

Refăcînd calculele, de data aceasta cu β şi triunghiul CC_3C_4, obţinem şi

$$\sin C = \frac{y}{\overline{AM}} \sqrt{1 - \left(\frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}}\right)^2} - \frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{\overline{AM}^2}}. \tag{7}$$

Putem afirma acum, avînd în vedere că teorema lui Clairaut (deci relaţia (2)) a fost demonstrată mai sus, că *în orice triunghi există relaţiile*:

$$\sin B = \frac{x}{\overline{AM}} \sqrt{1 - \left(\frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}}\right)^2} - \frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\overline{AM}^2}}, \tag{6}$$

$$\sin C = \frac{y}{\overline{AM}} \sqrt{1 - \left(\frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}}\right)^2} - \frac{by + cx}{a \cdot \overline{AM}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{\overline{AM}^2}}, \tag{7}$$

[7]) Transformările care se fac asupra lui (5) pentru a ajunge la (6) sînt evidente.

în care

$$(8)\qquad \overline{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 \pm 2xy\cos A}}{\sin A} \qquad \begin{matrix} + \text{ dacă } \sphericalangle A < 90^\circ \\ - \text{ dacă } \sphericalangle A > 90^\circ \end{matrix}$$

x și y fiind arbitrari, pozitivi.

Luînd acum în aceste relații pe $y = b$ și $x = c$ (ceeace transformă dreptunghiurile de pe figură în patrate), sîntem conduși, printr-un calcul destul de

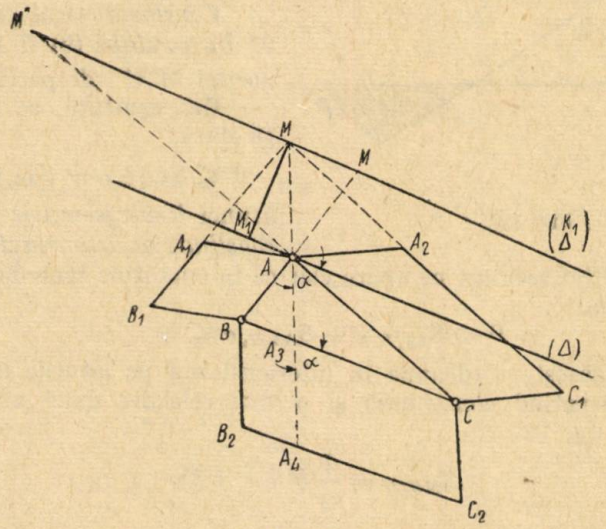


Fig. 11

laborios, la cel mai important rezultat al acestui punct: *teorema lui Pythagora generalizată* (sub formă trigonometrică), — *corolar al teoremei lui Clairaut.*

Un loc geometric

Teorema lui Clairaut ne permite să soluționăm imediat o interesantă problemă de loc geometric. Este vorba de locul geometric al punctului M (fig. 11) în condiția:

$$S_{AA_1B_1B} + S_{AA_2C_1C} = k \text{ (o constantă).} \qquad (9)$$

Într-adevăr, din teorema lui Clairaut deducem că:

$$S_{BB_2C_2C} = k$$

sau, aplicînd o cunoscută relație trigonometrică (v. și fig. 11), rezultă:

$$\overline{A_3A_4} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\alpha = k,$$

adică:

$$\overline{AM}\sin\alpha = \frac{k}{BC} = k_1 \text{ (o nouă constantă).}$$

Fie (Δ) paralela dusă prin A la (BC); dacă M_1 este proiecția lui M pe (Δ) se vede imediat că $\overline{MM_1} = k_1$, de unde concluzia că locul geometric căutat

(într-o formă primitivă) al lui M, îl constituie paralela (Δ^{k_1}) dusă la distanţa k_1 de (Δ).

Fie acum M' şi M'' intersecţiile lui (Δ^{k_1}) cu (AB) respectiv (AC). Din relaţia (9) deducem corespondenţele

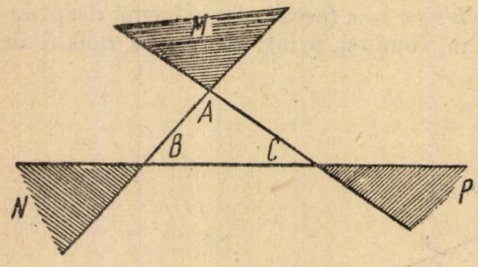


Fig. 12

$$M' \longleftrightarrow S_{AA_1B_1B} = 0 \; ; \; S_{AA_2C_1C} = k,$$

$$M'' \longleftrightarrow S_{AA_1B_1B} = k \; ; \; S_{AA_2C_1C} = 0.$$

Concluzia: *locul geometric al lui M în condiţia (9) îl constituie segmentul $M'M''$ de pe (Δ^{k_1}).*

Cu uşurinţă se demonstrează că dacă:

$$0 \leqslant S_{AA_2C_1C} + S_{AA_1B_1B} \leqslant k, \quad (10)$$

atunci *locul geometric al lui M este constituit de triunghiul $M'AM''$.*

Cu acest ultim rezultat ne apare clar că în condiţiile teoremei lui Clairaut, adică atunci cînd:

$$0 < S_{AA_1B_1B} + S_{AA_2C_1C} \leqslant \infty, \quad (10')$$

punctul M se găseşte totdeauna în interiorul sau pe laturile unghiului opus lui $\sphericalangle BAC$. Repetînd construcţia şi pentru celelalte două vîrfuri, obţinem diviziunea din fig. 12.

Egalitatea

$$S_{MBAC} = \frac{1}{2}(c\gamma + b\beta), \quad (11)$$

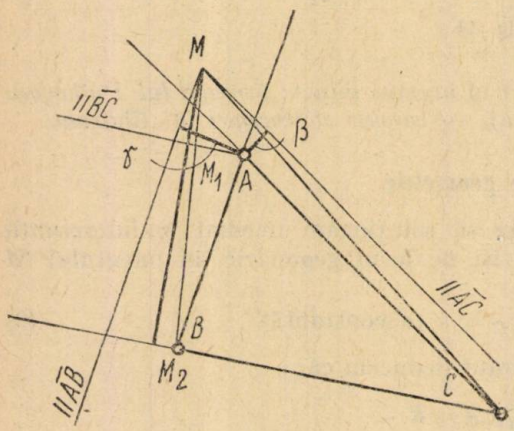


Fig. 13

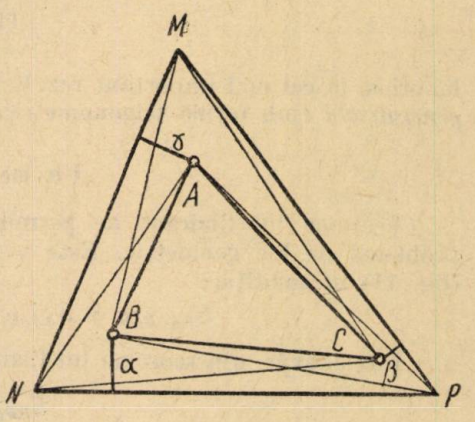


Fig. 14.

caracteristică diviziunii precedente (ea fiind valabilă pentru orice punct M aflat într-una din zonele haşurate ale fig. 12 şi numai pentru aceastea), a cărei demonstraţie decurge astfel (v. şi fig. 13):

$$S_{MBAC} = S_{MBC} - S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC}\,(\overline{MM_2} - \overline{M_2M_1}) = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{MM_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\frac{k}{BC} = \frac{1}{2}k \; ; \; S_{MBAC} = \frac{1}{2}(S_{AA_1B_1C_1} + S_{AA_2C_1C}) = \frac{1}{2}(c\gamma + b\beta),$$

ne permite să arătăm că în condiţiile fig. 14 există egalitatea:

$$S_{MBAC} + S_{NCBA} + S_{PACB} = a\alpha + b\beta + c\gamma \qquad (12)$$

şi să întărim rezultatul, în sensul că ea este valabilă atît timp cît vîrfurile M, N, P se găsesc în diviziunea amintită a triunghiului ABC.

NOTĂ MATEMATICĂ

Asupra teoremei lui Euler

1. Este vorba de teorema cunoscută. Într-un patrulater suma patratelor laturilor este egală cu suma patratelor diagonalelor plus de 4 ori patratul segmentului care uneşte mijlocul diagonalelor.

Fără a se specifica, teorema se referă numai la patrulaterul convex; se poate demonstra însă o teoremă analogă pentru două laturi opuse şi pentru diagonale. Aceste teoreme, aparent distincte, sînt în fond una şi aceiaşi.

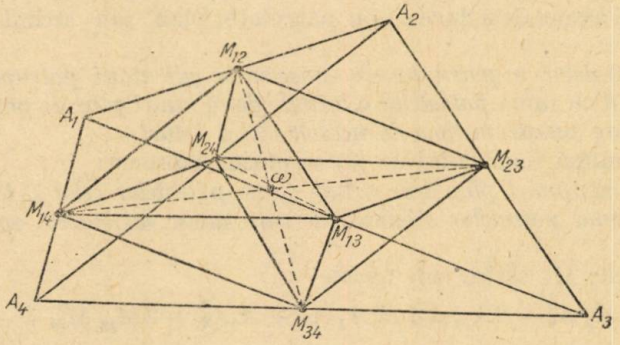


Fig. 1

Amintim următoarea terminologie: se numeşte patrupunct configuraţia formată de 4 puncte din care 3 nu sînt colineare; patrupunctul este *plan* sau *strîmb*, după cum cele patru puncte sînt sau nu coplanare. Cele patru puncte sînt *vîrfurile* patrupunctului, iar dreptele care unesc vîrfurile cîte două sînt *laturile* patrupunctului; deci un patrupunct are 6 laturi. Dreapta care uneşte două vîrfuri şi dreapta care uneşte celelalte două vîrfuri sînt *laturi opuse*, iar intersecţia a două laturi opuse este un *punct diagonal*; deci, există 3 perechi de laturi opuse şi 3 puncte diagonale, acestea determină *triunghiul diagonal* al patrupunctului.

În cazul cînd cele 4 puncte nu sînt coplanare ele sînt vîrfurile unui tetraedru, laturile patrupunctului fiind muchiile tetraedrului.

Dreapta care uneşte mijloacele a două laturi care pleacă din acelaşi vîrf este evident paralelă cu latura care uneşte extremităţile necomune ale celor două laturi şi egală cu jumătatea ei; de aici rezultă că mijloacele a 4 laturi consecutive ale patrupunctului sînt vîrfurile unui paralelogram şi că cele 3 paralelograme astfel formate au acelaşi centru.

Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrupunct plan sau strîmb, iar M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} mijloacele laturillor A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Se

ştie că teorema medianei aplicată unui paralelogram conduce la teorema următoare: Într-un paralelogram suma patratelor laturilor este egală cu suma patratelor diagonalelor. Aplicînd această teoremă celor 3 paralelograme şi făcînd să intervină laturile patrupunctului se obţin relaţiile:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = 2\left(M_{23}M_{14}^2 + M_{13}M_{24}^2\right), \\ A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = 2\left(M_{12}M_{34}^2 + M_{23}M_{14}^2\right), \\ A_1A_4^2 + A_2A_3^2 = 2\left(M_{12}M_{34}^2 + M_{13}M_{24}^2\right). \end{cases}$$

Adunînd două cîte două aceste relaţii şi ţinînd seama de relaţia rămasă obţinem noile relaţii:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_1A_4^2 + A_2A_3^2 = A_1A_2^2 + A_2A_4^2 + 4M_{12}M_{34}^2, \\ A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + 4M_{22}M_{14}^2, \\ A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + 4M_{13}M_{24}^2. \end{cases}$$

Aceste trei relaţii exprimă sub o formă unitară teorema lui *Euler*, indiferent dacă avem de a face cu un patrulater plan sau strîmb, convex sau concav, anume:

Suma patratelor a patru laturi consecutive ale unui patrupunct plan sau strîmb este egală cu suma patratelor celorlalte două laturi plus de patru ori patratul segmentului care uneşte mijloacele acestor două laturi.

Dacă se adună toate relaţiile (2) se obţine teorema:

Într-un patrupunct plan sau strîmb suma patratelor celor 6 laturi este egală cu de 4 ori suma patratelor segmentelor care unesc mijloacele opuse ale patrupunctului.

Tot relaţiile (1) scrise sub forma

$$(3)\qquad A_1A_2^2 + A_3A_4^2 + 2A_{12}A_{34}^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + 2M_{13}M_{24}^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + 2A_{12}M_{23}^2$$

exprimă teorema:

Într-un patrupunct plan sau strîmb suma patratelor a două laturi opuse plus dublul patratului segmentului care uneşte mijloacele acestor laturi este aceiaşi pentru toate perechile de laturi opuse.

2. Să dăm cîteva aplicaţii ale relaţiilor stabilite.

Să presupunem că laturile opuse ale patrupunctului sînt respectiv perpendiculare; în acest caz patrupunctul se zice *ortocentric*. Dacă el este plan, se vede imediat că fiecare vîrf este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei vîrfuri, iar triunghiul diagonal este triunghiul ortic comun triunghiurilor formate cu cîte trei din vîrfurile patrupunctului; dacă însă este strîmb, tetraedrul corespunzător are muchiile opuse perpendiculare şi se numeşte *tetraedru ortocentric* (el are numeroase proprietăţi interesante analoge cu cele ale triunghiului).

În acest caz, se vede uşor că cele trei paralelograme, despre care s-a mai vorbit, devin dreptunghiuri şi deci:

$$M_{12}M_{34} = M_{13}M_{24} = M_{14}M_{13} = \rho,$$

iar relaţiile (3) devin:

$$A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 = 4\rho^2,$$

deci: *Într-un patrupunct ortocentric, plan sau strîmb, suma patratelor a două laturi opuse este aceiaşi pentru toate perechile de laturi opuse.*

Reciproca este adevărată: *Dacă într-un patrupunct suma patratelor laturilor opuse este aceiaşi pentru toate perechile, atunci patrupunctul este ortocentric.*

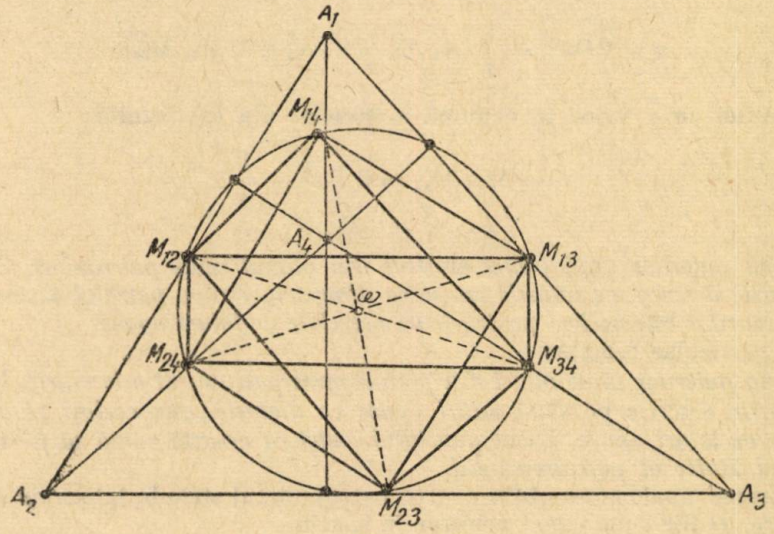


Fig. 2

În adevăr, în acest caz, din (3) rezultă că

$$M_{12}\,M_{34} = M_{13}\,M_{24} = M_{14}\,M_{23}$$

şi deci cele trei paralelograme devin dreptunghiuri.

Dacă patrupunctul ortocentric este plan, este evident că cele şase mijloace M_{ik} $(i,\ k = 1, 2, 3, 4)$ se află pe un cerc de rază $\frac{1}{2}\rho$, avînd drept centru punctul ω, centrul comun celor trei dreptunghiuri; este clar că acest cerc trece prin punctele diagonale ale patrupunctului.

Acest cerc este cercul lui *Euler* al celor patru triunghiuri $A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_4$, $A_1 A_2 A_4$, $A_1 A_2 A_3$ şi ar putea fi numit cercul lui Euler al patrupunctului.

Dacă însă patrupunctul ortocentric este strîmb, punctele diagonale nu mai există căci muchiile opuse nu se taie, iar cele şase mijloace M_{ik} se află pe o sferă cu centrul în ω, cu raza $\frac{1}{2}\rho$; se arată uşor că punctul ω este centrul de greutate al tetraedrului şi că această sferă mai trece şi prin picioarele perpendicularelor comune ale muchiilor opuse. Această sferă numită şi *prima sferă a celor 12 puncte,* corespunde în spaţiu cercului lui *Euler* din plan.

3. Fie P un punct în planul patrupunctului $A_1 A_2 A_3 A_4$; pe laturile patrupunctului luate ca diametri se descriu cercuri. Suma puterilor punctului P faţă de cercurile de diametri $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ este:

$$\sigma = P\,M_{12}^2 + PM_{34}^2 - \frac{1}{4}\,(A_1 A_2^2 + A_3 A_4^2)\,.$$

Teorema medianei în triunghiul $PM_{12}M_{34}$ dă:

$$PM_{12}^2 + PM_{34}^2 = 2P\omega^2 + \frac{1}{2}M_{12}M_{34},$$

deci:

$$\sigma = 2P\omega^2 - \frac{1}{4}(A_1A_2^2 + A_2A_4^2 - 2M_{12}M_{34}^2).$$

Dacă notăm cu α valoarea comună a sumelor din (3) rezultă:

$$\sigma - M_{12}M_{34} = 2P\omega^2 - \frac{1}{4}\alpha,$$

deci:

Suma puterilor unui punct arbitrar din planul unui patrupunct, în raport cu cercurile descrise pe laturile opuse ca diametru, minus pătratul distanței centrelor cercurilor este aceiași pentru toate perechile de laturi opuse.

În particular rezultă:

Suma puterilor unui punct din planul unui patrupunct ortocentric, în raport cu cercurile descrise pe două laturi opuse ca diametri, este aceiași pentru toate perechile de laturi opuse. Locul punctului astfel ca această sumă să fie nulă este cercul lui Euler al patrupunctului.

Teoreme analoge se obțin pentru patrupunctul strîmb, înlocuind cercurile prin sfere, P fiind un punct arbitrar în spațiu.

Presupunînd mai departe că patrupunctul este ortocentric, plan sau strîmb, relațiile (1), scrise astfel:

$$\left(\frac{1}{2}A_1A_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}A_3A_4\right)^2 = \overline{M_{12}M_{34}}^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}A_1A_3\right)^3 + \left(\frac{1}{2}A_2A_4\right)^2 = \overline{M_{13}M_{24}}^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}A_1A_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}A_2A_3\right)^2 = \overline{M_{14}M_{23}}^2,$$

exprimă că:

Într-un patrupunct ortocentric plan cercurile descrise pe laturile opuse ca diametri sînt ortogonale.

Într-un tetraedru ortocentric sferele descrise pe muchiile opuse ca diametri sînt ortogonale.

G. Coșniță

CALEIDOSCOP MATEMATIC

TIBERIU COLIBABA, student

1. **Puteți demonstra că $1 = 2$?!**

Veți răspunde desigur, că această egalitate este imposibilă din punct de vedere matematic. Și totuși există o «demonstrație»:

Pornim de la identitatea evidentă: $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$.

În membrul stîng scoatem pe a în factor comun, iar în membrul drept descompunem o diferență de patrate în produsul sumei prin diferență: $a(a-a) = (a+a)(a-a) = 2a(a-a)$. Simplificăm prin factorul comun $a(a-a)$ și obținem: $1 = 2$.

Acest rezultat paradoxal nu poate fi decît o urmare a unei greșeli comise. Într-adevăr, greșala consistă în simplificarea prin $(a-a) = 0$, deoarece știm că împărțirea prin zero este imposibilă.

Aceiași greșală, dar sub altă formă, comitem atunci cînd vrem să arătăm că: Două numere oarecare din șirul numerelor naturale sînt egale între ele? Ne propunem să arătăm spre exemplu, că $5 = 11$.

Pentru aceasta pornim de la egalitatea $m = \frac{4n}{3}$ care se mai poate scrie:

$$3m = 4n \text{ sau}$$

$$18m = 24n,$$

$$33m - 15m = 44n - 20n,$$

$$20n - 15m = 44m - 33m,$$

$$5(4n - 3m) = 11(4n - 3m).$$

Simplificăm prin factorul comun ambilor membri $4n - 3m$ și rezultă că $5 = 11$.

Greșala constă în simplificarea cu $4n - 3m = 0$.

Pentru a arăta că oricare alte două numere sînt egale între ele, înlocuim pe 5 și 11 cu numerele respetive, urmînd calea de la sfîrșit pînă la egalitatea inițială, după care « demonstrația » își urmează cursul direct.

2. **O adunare rapidă fără mașină de calculat.** Vreți să impresionați pe cineva cu rapiditatea efectuării unei adunări? Atunci rugați persoana respectivă să scrie unul sub altul două numere a cîte șase cifre fiecare; scrieți și dv. un număr dedesubt, spuneți persoanei să mai scrie unul, după care mai scrieți dv. unul. Trageți linia dedesubt și scrieți direct rezultatul. Dăm mai jos un exemplu:

Persoana scrie:	142794
	287543
Dv. scrieți:	712456
Persoana scrie:	157819
Dv. scrieți:	842180
Total	2142792

Dacă ați fost atent, ați observat că numerele scrise de dv. nu sînt oarecare: ele sînt astfel scrise, încît cifrele numărului scris de dv. adunate cu cele ale numărului de deasupra să dea rezultatul 9. De asemenea, nici rezultatul nu este oarecare, ci este primul număr din care am scăzut din ultima cifră 2 unități și la care am așezat înainte cifra 2. Explicația matematică este următoarea:

$$\begin{array}{rcrl} 287543 + & & 157819 + & \\ 712456 & & 842180 & \\ \hline 999999 & + & 999999 & = 1999998 + \\ \text{cifra scăzută din primul număr} \ldots & & & 2 \\ & & & \hline 2000000 + \\ \text{primul număr din care am scăzut 2} \ldots & & & 142792 \\ \text{Total} \ldots & & & \hline 2142792 \end{array}$$

3. **Numere interesante.** De multe ori sîntem încîntaţi de armonia muzicii fără să bănuim că şi matematica ne poate oferi asemenea exemple; iată cîteva din ele:

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \cdot 8 + 9 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \cdot 8 + 8 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \cdot 8 + 7 = 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6 \cdot 8 + 6 = 9\,8\,7\,6\,5\,4$$
$$1\,2\,3\,4\,5 \cdot 8 + 5 = 9\,8\,7\,6\,5$$
$$1\,2\,3\,4 \cdot 8 + 4 = 9\,8\,7\,6$$
$$1\,2\,3 \cdot 8 + 3 = 9\,8\,7$$
$$1\,2 \cdot 8 + 2 = 9\,8$$
$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

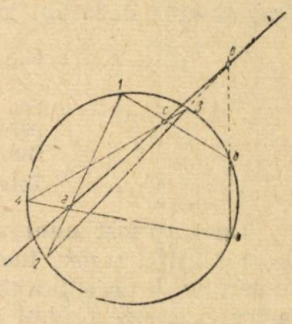
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \cdot 9 + 9 = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \cdot 9 + 8 = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \cdot 9 + 7 = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6 \cdot 9 + 6 = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3\,4\,5 \cdot 9 + 5 = 1\,1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3\,4 \cdot 9 + 4 = 1\,1\,1\,1\,0$$
$$1\,2\,3 \cdot 9 + 3 = 1\,1\,1\,0$$
$$1\,2 \cdot 9 + 2 = 1\,1\,0$$
$$1 \cdot 9 + 1 = 1\,0$$

$$1\,2\,3\,4\,5 \cdot 7 + 5 = 8\,6\,4\,2\,0$$
$$1\,2\,3\,4 \cdot 7 + 4 = 8\,6\,4\,2$$
$$1\,2\,3 \cdot 7 + 3 = 8\,6\,4$$
$$1\,2 \cdot 7 + 2 = 8\,6$$
$$1 \cdot 7 + 1 = 8$$

4. **O altă curiozitate,** de data aceasta în Geometrie, în acelaş timp, un exemplu de armonie, o constituiesc punctele lui *Steiner* şi *Kirkmann* din plasa lui *Steiner* a hexagramului lui *Pascal.*

Putem construi hexagramul lui Pascal plecînd de la un cerc, o elipsă sau de la o parabolă. Să luăm spre exemplificare, cercul:

Numerotăm de la 1...6 şase puncte oarecare luate pe circonferinţa unui cerc. Hexagramul ia naştere prin unirea punctelor 1...2, 2...3, 3...4, 4...5, 5...6, 6...1. Prelungim pînă se întretaie 1...2 cu 4...5 în *a*, 2...3 cu 5...6 în *b*, 3...4 cu 6...1 în *c*. Cel care a observat pentru prima oară că punctele *a*, *b* şi *c* sînt colineare a fost *Pascal*, din care cauză dreapta şi hexagramul îi poartă numele.



Dacă schimbăm numerele punctelor între ele obţinem 60 de astfel de hexagrame conţinînd fiecare dreapta caracteristică. Studiind cele 60 de drepte observăm că se întîlnesc cîte 3 după un punct. Există 80 de astfel de puncte dintre care 20 de puncte *Steiner* şi 60 de puncte *Kirkmann*. Prin cele 20 de puncte *Steiner* trec alte 20 de drepte care au fiecare cîte un punct *Steiner* şi 3 puncte *Kirkmann* şi care se întîlnesc cîte 4 în 15 puncte, etc. etc. Plasa devine din ce în ce mai deasă, obţinîndu-se astfel, una din cele mai frumoase construcţii geometrice.

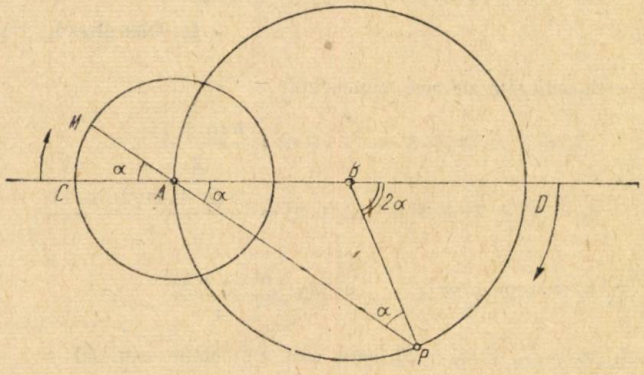
PROBLEME REZOLVATE

Problema 2013

Se consideră într-un plan două cercuri de centre A și B și de rază r și R, astfel încît al doilea trece prin centrul primului. Un mobil M descrie cercul A cu o mișcare uniformă cu viteza a. Să se calculeze viteza și accelerația unui mobil P care descrie cercul B, astfel ca punctele P, A, N să fie în linie dreaptă. Să se arate un dispozitiv tehnic simplu pentru realizarea practică a mișcării mobilului P. Care va fi expresia vitezei și accelerației lui P cînd M are o mișcare oarecare pe cercul A?

Alexandru Stoenescu

Soluție dată de **Valeriu Hulubei,** elev Craiova. Se notează unghiul $CAM = \alpha$, *unghiu* descris de M plecînd din C, luat ca punct de origină. Triunghiul APB fiind isoscel: $\sphericalangle PAB = \sphericalangle APB = \alpha$.



Unghiul DBP fiind exterior triunghiului ABP, avem: $\sphericalangle DBP = 2\alpha$.

Deci mobilul P a descris pe cercul B unghiul 2α.

Fie ω_M viteza unghiulară a mobilului M. Avem $\omega_M = \frac{2\pi}{T}$.

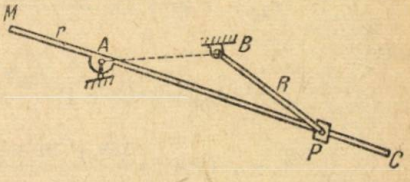
Fie ω_P viteza unghiulară a mobilului P. Avem $\omega_P = \frac{4\pi}{T}$. Deci: $\omega_P = 2\omega_M$.

Notăm viteza mobilului P cu V_P. Atunci: $V_P = \omega_P R$. Dar:

$$a = \omega_M r;\ \omega_M = \frac{a}{r}.\ \text{Deci: } \omega_P = 2\omega_M = 2 \cdot \frac{a}{r};\ V_P = \omega_P \cdot R = \frac{2a}{r} \cdot R.$$

Dacă notăm aecelcrația mobilului P cu γ_P atunci:

$$\gamma_P = \frac{V_P^2}{R} = \frac{4a^2R^2}{r^2R} = \frac{4a^2R}{r^2}.$$



Un dispozitiv tehnic simplu pentru realizarea practică a mișcării mobilului P este cel din figură: compus din barele MAC și BP mobile respectiv în jurul lui A și B și cursorul P.

Notă. — Pentru o mișcare oarecare a punctului M avem:

$$\omega_P = 2\omega_M = 2\dot{\alpha}\ ;\ v_P = \omega_P R = 2\dot{\alpha}R.$$

Accelerația în P va avea două componente: o componentă *normală*:

$$\gamma_n = \frac{v_P^2}{R} = 4\dot{\alpha}^2 R$$

și o componentă *tangențială*:

$$\gamma = R\dot{\omega}_P = 2\ddot{\alpha} R$$

$$\gamma_p = \sqrt{\gamma_n^2 + \gamma_t^2} = 2R\sqrt{4\dot{\alpha}^4 + \ddot{\alpha}^2}.$$

Accelerația totală în P este

Problema 2241

Să se rezolve ecuația:

$$48x^3 - 4n(n+1)(3n^2+7n+8)x^2 + 4n^2(n+1)^2(n^3+3n^2+4n+1)x -$$
$$- n^4(n+1)^4(2n+1) = 0.$$

H. Dăscălescu, profesor Ploești

Soluția I. — Considerăm sumele cunoscute:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

și notăm $x_1 = S_1$, $x_2 = S_2$ și $x_3 = S_3$ care sînt rădăcinile ecuației:

$$x^3 - (S_1 + S_2 + S_3)x^2 + (S_1S_2 + S_3S_1 + S_2S_3)x - S_1S_2S_3 = 0,$$

obținem ecuația din enunț.

Soluția II, dată de **Paul R. Popescu,** student București. — Se observă că pentru $x = \frac{n(n+1)}{2}$ ecuația se anulează. Atunci se mai scrie, împărțind,

$$\left[x - \frac{n(n+1)}{2}\right][24x^2 - 2n(n+1)(3n^2+7n+2)x + n^3(n+1)^3(2n+1)] = 0.$$

Deci: $x = \frac{n(n+1)}{2}$. Rezultă:

$$x_{2,3} = n(n+1)\frac{(3n^2+7n+2) \pm \sqrt{9n^4 - 11n^2 - 6n^3 + 4n + 4}}{24}$$

sau:

$$x_{2,3} = n(n+1)\frac{(3n^2+7n+2) \pm (-3n^2+n+2)}{24},$$

$$x_2 = n(n+1)\frac{3n^2+7n+2-3n^2+n+2}{24} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

și

$$x_3 = n(n+1)\frac{3n^2+7n+2+3n^2-n-2}{24} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

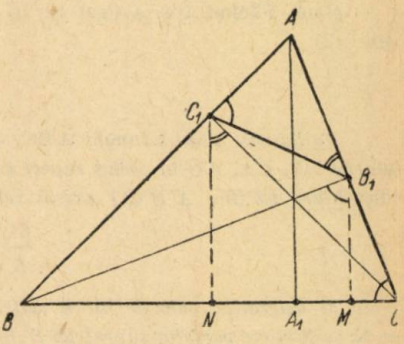
Problema 2242

În triunghiul oarecare ABC cu înălțimile AA_1, BB_1, CC_1 se proiectează punctele B_1 și C_1 pe latura BC, respectiv în M și N. Să se demonstreze relația: $MA_1 \cdot NC_1 = MB_1 \cdot NA_1$.

Dinu Gheorghe, elev Craiova

Soluție. — Proiecția unui segment pe o axă este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului format de segment cu axa de proiecție. Vom avea:

$$MA_1 = AB_1 \cdot \cos C; \quad NA_1 = AC_1 \cdot \cos B,$$



$$\frac{MA_1}{NA_1} = \frac{AB_1 \cos C}{AC_1 \cos B}. \tag{1}$$

Din asemănarea triunghiurilor AC_1B_1 și ABC deducem:

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

și relația (1) devine

$$\frac{MA_1}{NA_1} = \frac{c \cos C}{b \cos B}. \tag{2}$$

În triunghiul BB_1C. B_1M este înălțimea vîrfului drept și avem:

$$\sphericalangle BCB_1 = C = \sphericalangle BB_1M_1$$

adică,

$$\cos C = \cos (BB_1M) = \frac{B_1M}{BB_1}. \tag{3}$$

În triunghiul dreptunghic CC_1B pentru motive analoge avem:

$$\sphericalangle CBC_1 = B = \sphericalangle CC_1N \quad \text{și} \quad \cos B = \cos (CC_1N) = \frac{NC_1}{CC_1}. \tag{4}$$

Ținînd seama de relațiile (3) și (4) relația (2) devine:

$$\frac{MA_1}{NA_1} = \frac{c \cdot MB_1 \cdot CC_1}{b \cdot NC_1 \cdot BB_1}. \tag{5}$$

Din asemănarea triunghiurilor BB_1A și CC_1A rezultă: $\frac{c}{BB_1} = \frac{b}{CC_1}$, iar relația (5) devine:

$$\frac{MA_1}{NA_1} = \frac{MB_1}{NC_1} \text{ sau}$$

$$MA_1 \cdot NC_1 = MB_1 \cdot NA_1,$$

adică relația din enunț.

Problema 2276

Să se demonstreze că dacă $a, b, \ldots, l, m, n$ sînt cifre, există două numere $ab \ldots l\,mn$ și $ab \ldots lnm$ simultan divizibile prin 7, dar nu există astfel de numere pentru un divizor mai mare decît 9 și prim cu 9.

Gh. Buicliu

Soluție. — Fie $M = 100A + mn$ și $N = 100A + nm$ cele 2 numere. Dacă ele sînt simultan divizibile prin 7 atunci și diferența lor

$$mn - nm = 9(m-n) \tag{1}$$

se divide prin 7, ceea ce are loc pentru $m = n$ şi pentru

(2) $$m = 9,8,7,; \quad n = 2, 1, 0.$$

Prin urmare, dacă $100\ A + 92$, 81 sau 70 se divide prin 7, atunci şi $100\ A + 29$, 18, 07 se divide prin 7.

Din această demonstraţie nu rezultă că condiţia ca (1) să se dividă prin 7 atrage după sine divizibilitatea celor 2 numere prin 7, ci invers, condiţia (1) determină pe m şi pe n.

Cum $m - n \leqslant 9$, nu vom avea numere $ab \ldots mn$, $ab \ldots nm$ simultan divizibile prin $D > 9$ şi prime cu 9.

Notă. Făcînd $100\ A$ egal cu $7p + 1$, $7p + 2$,... se găsesc pentru m şi n tot valorile din (2).

Problema 2279

Pe laturile unui triunghi ABC, dreptunghic în A, se iau punctele A', B', C' ce împart laturile BC, CA, AB în acelaş raport k. Să se arate că între suprafeţele S şi S' ale celor două triunghiuri (ABC, $A'B'C'$) există relaţia:

$$\frac{S'}{S} = 1 - \frac{3k}{(1+k)^2};$$

— să se determine valorile lui k astfel încît $\sum \overline{A'B'^2} = 14\ \overline{BC^2}$;

— să se studieze variaţia suprafeţei S' în funcţie de S, cînd k variază.

C. Mihu

Soluţie dată de **Gh. I. Stoian,** Bucureşti. — 1°. Fie a, b, c respectiv ipotenuza şi catetele triunghiului ABC şi $\sphericalangle ACB = \alpha$. Prin ipoteză avem:

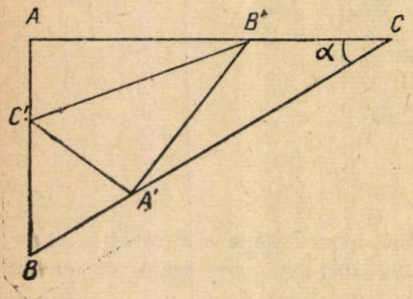
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B} = k,$$

$$A'B + A'C = a; \quad B'C + B'A = b; \quad C'A + C'B = c.$$

De aci deducem:

$$A'B = \frac{ak}{k+1}; \quad A'C = \frac{a}{k+1}; \quad B'C = \frac{bk}{k+1};$$

$$B'A = \frac{b}{k+1}; \quad C'A = \frac{ck}{k+1}; \quad C'B = \frac{c}{k+1}.$$



Ţinînd seamă de relaţiile stabilite mai sus şi aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile $A'BC'$, $A'B'C$ şi $AB'C'$ obţinem:

$$A'C'^2 = \frac{a^2k^2 + c^2}{(1+k)^2} - \frac{2ack\cos(90° - \alpha)}{(1+k)^2},$$

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2k^2}{(1+k)^2} - \frac{2abk\cos\alpha}{(1+k)^2},$$

$$B'C'^2 = \frac{b^2 + c^2k^2}{(1+k)^2}.$$

Dar $\sin\alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{c}{a}$ şi $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. Aşadar, vom avea:

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2(k^2 - 2k)}{(1+k)^2}; \quad A'C'^2 = \frac{a^2k^2 + c^2(1 - 2k)}{(1+k)^2}.$$

Avem:

$$S' = \frac{bc(1 - k + k^2)}{2(1 + k)^2} \quad \text{şi} \quad S = \frac{bc}{2}.$$

Deci:

$$\frac{S'}{S} = 1 - \frac{3k}{(1 + k)^2}.$$

2°. $\sum A'B'^2 = \frac{2a^2(1 - k + k^2)}{(1 + k)^2} = 14\,a^2$. De aci obţinem: $k = -2$, $k = -\frac{1}{2}$.

3°. Avem: $\frac{S'}{S} = 1 - \frac{3k}{(1 + k)^2}$ sau $(S - S')k^2 - (S + 2S')k + (S - S') = 0$, $\Delta = (S + 2S')^2 - 4(S - S')^2 \geqslant 0$, sau $S(4S' - S \geqslant 0$. Deci, trebue să avem $S \leqslant 4S'$. Numai în acest caz problema este posibilă.

Observare. — Prima relaţie are loc chiar pentru un triunghi oarecare.

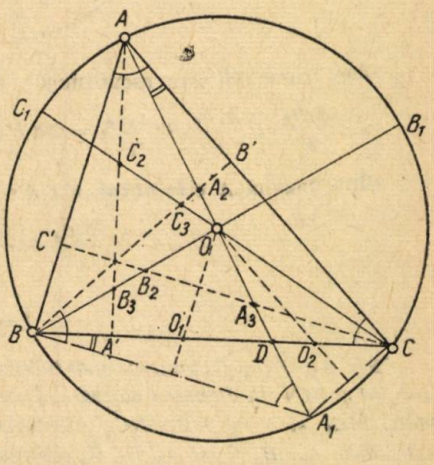
Problema 2286

Într-un triunghi oarecare ABC, înscris în cercul O, diametrul AA_1 taie înălţimile BB' CC' în A_2, A_3. Se notează cu a_1, a_2 segmentele A_1A_2, A_1A_3 şi cu b_1, b_2, c_1, c_2 segmentele analoge. Să se arate că:

1° *Punctele O_1, O_2 în care paralelele duse prin O la AB, CA întîlnesc pe BC, sînt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BA_2A_1, CA_1A_3;*

2° $\frac{a_1a_2}{a^2} + \frac{b_1b_2}{b^2} + \frac{c_1c_2}{c^2} = 1$, *dacă triunghiul ABC este ascuţit-unghiu; şi* $\frac{a_1a_2}{a^2} - \frac{b_1b_2}{b^2} - \frac{c_1c_2}{c^2} = 1$, *dacă unghiul A este obtuz.*

D. C. Panu



Soluţie. — 1° Notăm $D = (AA_1, BC)$. Triunghiurile BA_2A_1 şi ABC sînt asemenea avînd: unghiul A_1BA_2 = unghiul A (laturi perpendiculare) şi unghiul BA_1A_2 = unghiul C (aceiaşi măsură). Laturile omoloage BA_1, AC fac respectiv cu BD, AD unghiurile egale A_1BD, CAD (aceiaşi măsură), deci BD, AD sînt omologe. Cum AD trece prin centrul O al cercului ABC şi BD va trece prin centrul cercului BA_2A_1.

Din $OO_1 \parallel AB$, $AB \perp BA_1$ şi $AO = OA_1$ rezultă că dreapta OO_1 este mediatoarea segmentului BA_1. Prin urmare, punctul O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului BA_2A_1.

Analog, punctul O_2 este centrul cercului circumscris triunghiului CA_1A_3.

2°. Fie R raza cercului O. Raportul de asemănare K_1 al triunghiurilor BA_2A_1, ABC este:

$$K_1 = \frac{BA_1}{AC} = \frac{AA_1 \cos(BA_1A)}{AC} = \frac{2R\cos C}{2R\sin B} = \frac{\cos C}{\sin B}$$

şi

$$a_1 = aK_1 = a\frac{\cos C}{\sin B}.$$

Tot așa, pentru triunghiurile asemenea CA_1A_3, ABC avem:

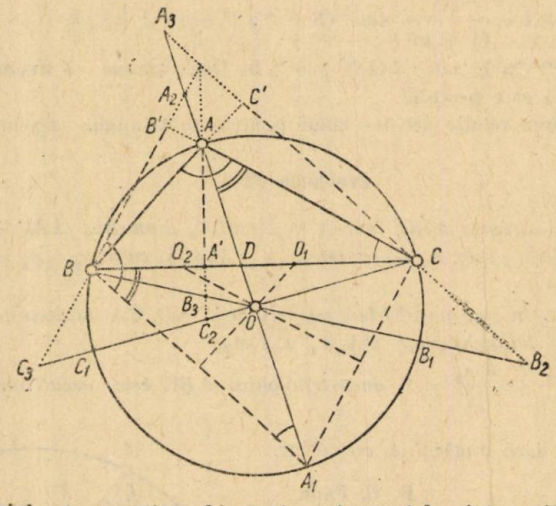
$$K_2 = \frac{\cos B}{\sin C} \quad \text{și} \quad a_2 = a\frac{\cos B}{\sin C},$$

deci:

$$\frac{a_1a_2}{a^2} = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C.$$

Și analog,

$$\frac{b_1b_2}{b^2} = \operatorname{ctg} C.\operatorname{ctg} A\,; \quad \frac{c_1c_2}{c^2} = \operatorname{ctg} A.\operatorname{ctg} B.$$



Cînd triunghiul este ascuțitunghi, toate cotangentele sînt pozitive și prin urmare:

$$\frac{a_1a_2}{a^2} + \frac{b_1b_2}{b^2} + \frac{c_1c_2}{c^2} = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1.$$

Cînd unghiul A este obtuz, $\operatorname{ctg} A < 0$ și avem:

$$\frac{a_1a_2}{a^2} - \frac{b_1b_2}{b^2} - \frac{c_1c_2}{c^2} = 1.$$

Problema 2287

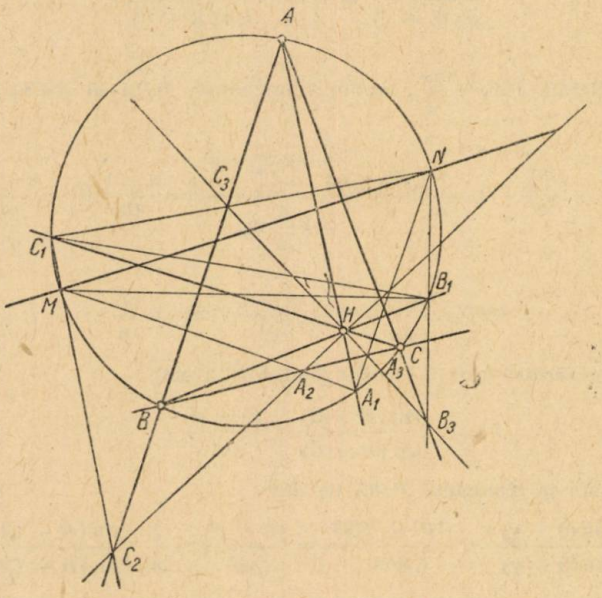
Fie A_1, B_1 și C_1 punctele unde înălțimile triunghiului ABC taie a doua oară cercul circumscris lui și MN un diametru oarecare al cercului ABC. Să se arate că grupele de drepte MA_1, MB_1, MC_1 și NA_1, NB_1, NC_1 intersectează laturile triunghiului ABC respectiv în cîte trei puncte A_2, B_2, C_2 și A_3, B_3, C_3 colineare. Dreptele $(A_2\ B_2\ C_2)$ și $(A_3\ B_3\ C_3)$ trec prin H, ortocentrul triunghiului ABC, și sînt perpendiculare între ele.

Theodor G. Cocea

Soluție. — Fie A_3, B_3 și C_3 proiecțiile lui M pe laturile triunghiului ABC și S intersecția dreptei lui Simson a punctului M față de ABC (adică dreapta $A_3B_3C_3$) cu dreapta MA_2A_1. În triunghiul dreptunghic MA_3A_2 punctul S este mijlocul ipotenuzei deoarece $\sphericalangle SA_3M = \sphericalangle B_3A_3M = \sphericalangle B_3AM = \sphericalangle CAM = \sphericalangle C_1AM = \sphericalangle A_3MS$.

Dreapta lui Simson a punctului M se știe că trece prin mijlocul dreptei ce unește pe M cu ortocentrul H al triunghiului ABC. Deci, în triunghiul MHA_2 dreapta lui Simson a

punctului M trece prin mijloacele laturilor MA_2 și MH și deci este paralelă cu HA_2. La fel se poate arăta că HB_2 și HC_2 sînt paralele cu dreapta lui Simson a punctului M față de ABC. Rezultă că punctele A_2, B_2 și C_2 sînt colineare pe o dreaptă ce trece prin H și este paralelă la dreapta lui Simson a punctului M față de ABC. Analog se arată că și punctele

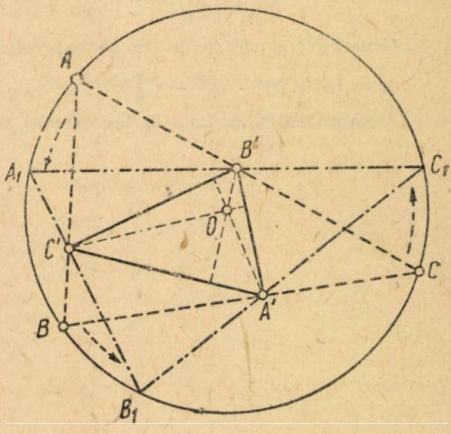


A_3, B_3 și C_3 sînt colineare pe o dreaptă ce trece prin H și este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului N față de ABC. Se știe însă, că dreptele lui Simson a două puncte diametral opuse față de un același triunghi ABC sînt perpendiculare. Rezultă că dreptele $(A_2B_2C_2)$ și $(A_3B_3C_3)$ sînt și ele perpendiculare. (A se vedea problema nr. 463, GMF—A. 3/1956, pag. 163).

Problema 2288

Să se construiască triunghiurile $A'B'C'$ avînd vîrfurile lor pe laturile triunghiului ABC astfel încît ortocentrul lor să coincidă cu centrul cercului ABC.

Gh. Dobrescu, Predeal



Soluție. — Notăm cu O centrul cercului ABC. Rotim triunghiul ABC pe cercul său și considerăm una din poziții $A_1B_1C_1$ obținînd punctele A', B', C' ca în figură. Cercurile $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ sînt egale, deoarece triunghiul $AC'A_1$ = tr. $BC'B_1$; tr. $BA'B_1$ = tr. $CA'C_1$ și ele au un punct comun O. Rezultă că punctul O este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

Observație. — Problema este construită pe baza celor prezentate în nota matematică «Asupra problemei 1062» de *N. Mihăileanu*, în G.M.F. seria B, nr. 2, vol. VI.

Problema 2290

Pe mediana AA_1 din triunghiul ABC se ia un punct oarecare P și se notează $\sphericalangle PBC = \beta$ și $\sphericalangle PCB = \gamma$. Să se demonstreze relația:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{A_1P}{A_1A} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}.$$

M. Adam

Soluție. — Notăm $PA_1 = \frac{m_a}{n}$, iar din triunghiurile BPA_1 și BAA_1 avem:

$$BP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{m_a^2}{n^2} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{m_a}{n} \cdot \frac{\frac{a^2}{4} + m_a^2 - c^2}{2\frac{a}{2} m_a} = \frac{n-1}{4n} a^2 - \frac{n-1}{n^2} m_a^2 + \frac{c^2}{n}$$

și analog,

$$CP^2 = \frac{n-1}{4n} a^2 - \frac{n-1}{n^2} \cdot m_a^2 \times \frac{b^2}{n}.$$

Pe de altă parte se verifică ușor că în triunghiul ABC avem:

$$\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2},$$

relație care aplicată în triunghiul PBC, ne dă:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{CP^2 - BP^2}{BC^2} = \frac{b^2 - c^2}{na^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}.$$

În cazul cînd P devine centru de greutate, găsim relația din problema 1395, GMF seria B vol. VI, pg. 423.

Problema 2291

Să se arate că expresia $E = (a + x)^n - anx^{n-1} - x^n$ este divizibilă cu a^2 și să se generalizeze.

* * *

Soluție. — Dezvoltînd $(a + x)^n$ după regula binomului avem:

$$E = x^n + nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^p x^{n-p} a^p + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n - anx^{n-1} - x^n =$$
$$= a^2 \left(C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^p x^{n-p} a^{p-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-3} + a^{n-2} \right).$$

Generalizare: Să se arate că expresia

$E = (a + x)^n - x^n - C_n^1 x^{n-1} a - \ldots - C_n^p x^{n-p} a^p$ este divizibilă cu a^{p+1} (unde $p \leqslant n$)

Demonstrația se face la fel ca mai sus.

PROBLEME PROPUSE *)

2633. Să se arate că ecuațiile următoare sînt verificate astfel:

$$(x+\sqrt{5})\sqrt{6-x\sqrt{5}}=\sqrt{2},\quad \text{pentru}\quad x=\sqrt{7}\quad \text{și}\quad x=-\frac{4}{\sqrt{5}};$$

$$(x-\sqrt{5})\sqrt{6+x\sqrt{5}}=\sqrt{2},\quad \text{pentru}\quad x=\sqrt{7};$$

$$(x+\sqrt{5})\sqrt{6-x\sqrt{5}}=-\sqrt{2},\quad \text{pentru}\quad x=\sqrt{7};$$

$$(x-\sqrt{5})\sqrt{6+x\sqrt{5}}=-\sqrt{2},\quad \text{pentru}\quad x=\frac{4}{\sqrt{5}}\quad \text{și}\quad x=-\sqrt{7}.$$

C. Ionescu-Țiu

2634. — Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mică AD egală cu înălțimea, iar baza mare BC egală cu diagonala mică AC. Perpendiculara din A pe AB taie latura DC în punctul E și dreapta EB taie diagonala AC și înălțimea AA' respectiv în punctele M și N. Să se demonstreze că: 1° triunghiurile ANB și AME sînt egale,
2° perpendiculara din A pe EB și perpendiculara din E pe AC se întîlnesc într-un punct O situat pe baza mare.

Gh. Bazacov

2635. — Se consideră trei puncte A_1, B_1, C_1 situate respectiv pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Dacă se notează: $AA_1=l_a$, $BB_1=l_b$, $CC_1=l_c$, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{2}<\frac{l_a+b_b+l_c}{a+b+c}<\frac{3}{2}.$$

* * *

2636. — Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC există relația

$$\frac{a^2}{II_a^2}+\frac{b^2}{II_b^2}+\frac{c^2}{II_c^2}=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right),$$

în care a, b, c sînt laturile, iar I, I_a, I^b, I_c respectiv centrul cercului înscris și ale celor înscrise triunghiului dat.

H. Dăscălescu

2637. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7.$$

* * *

2638. — Prin două puncte date ale unui cerc să se traseze două corzi paralele între ele, astfel încît suma lor să fie egală cu un segment dat.

(Olimpiada matematică 1956, cl. 8. Lwow)

2639. — Într-un triunghi echilateral ABC fiecare latură este împărțită respectiv prin punctele A_1, B_1, C_1 astfel încît $BA_1 : A_1C_1 = 1:2$; $CB_1 : B_1A = 1:2$; $AC_1 : C_1B = 1:2$.

---

*) Clasa VIII-a (2633, 2634, 2637, 2638, 2649, 2649, 2656, 2657, 2664, 2666, 2668, 2672, 2674, 2676, 2677, 2678, 2681, 2685)

Se trasează dreptele AA_1, BB_1, CC_1. Să se demonstreze că triunghiul format de intersecția lor are aria egală cu $\frac{1}{7}$ din aria lui ABC.

(Olimpiada matematică 1956, cl. 9, Lwow)

2640. — Să se găsească valoarea maximă și cea minimă a funcției:

$$y = 2 \sin x - \cos 2x.$$

(Olimpiada matematică, etapa II 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2641. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x - 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, cl. 10, Ordjonikidze)

2642. — Să se găsească locul geometric al punctelor ale căror coordonate verifică ecuația:

$$\sin [(y - 2x)\pi] = 0.$$

* * *

2643. — Să se arate că în orice triunghi avem relația

$$r \sum \left(r_a + a \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) r_a \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = S(8R - r);$$

Florian I. Goga

2644. — Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC α și β distanțele de la M la vîrfurile mai apropiate iar, γ distanța la vîrful al treilea, S să se arate că:

$$AC = \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}$$

dacă B este vîrful mai depărtat.

2) m_b', m_b'' fiind proiecțiile medianelor laturilor MA, MC duse din B și M' intersecția (MB, AC), avem:

$$\frac{2}{MM'} = \frac{1}{m_b'} + \frac{1}{m_b''}.$$

3) P și Q fiind proiecțiile vîrfurilor A și C pe MB, punctele M, P, M', Q formează o diviziune armonică.

I. Hadîrcă, Breaza

2645. — Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + (a+1)x^3 + ax^2 + (a-1)x - 1 = 0.$$

Ioanin Brezeanu, student

2646. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin 3x}{\sin^2 2x} = \frac{4}{3}.$$

C. V. Costăchescu

2647. — Fie A un punct oarecare pe axa radicală a două cercuri O, O'. Se duce secanta oarecare AMB în cercul O și secanta oarecare ANC în cercul O', punctele M și N fiind mai aproape de A de cît punctele B și C. Triunghiurile ABC și AMN sînt asemenea. (În cazul cînd punctul A este și pe tangenta exterioară comună celor două cercuri se obține enunțul problemei 2086 din *GMF*, *B*, anul VII, p. 541).

Gh. Buicliu

2648. — Dacă distanța dintre Soare și Pămînt este a, perioada de rotație a Pămîntului în jurul Soarelui T și raza Pămîntului R, există relația

$$c = \frac{g}{a}\left(\frac{R \cdot T}{\pi a}\right)^2,$$

unde $c = \dfrac{2{,}99}{2475 \cdot 10^2}$ și g = accelerația gravitației.

Emil Stănescu, student București

2649. — Să se arate că ecuațiile următoare sînt verificate astfel:

$$(x - \sqrt{7})\sqrt{6 + x\sqrt{7}} = \sqrt{2}, \quad \text{pentru} \quad x = \frac{8}{\sqrt{7}};$$

$$(x - \sqrt{7})\sqrt{6 + x\sqrt{7}} = -\sqrt{2}, \quad \text{pentru} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{și} \quad x = -\sqrt{5};$$

$$(x + \sqrt{7})\sqrt{6 - x\sqrt{7}} = \sqrt{2}, \quad \text{pentru} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{și} \quad x = -\sqrt{5};$$

$$(x + \sqrt{7})\sqrt{6 - x\sqrt{7}} = -\sqrt{2}, \quad \text{pentru} \quad x = -\frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Să se cerceteze dacă ecuațiile date mai sînt verificate și de alte numere.

C. Ionescu-Țiu

2650. — La un microscop ocularul are distanța focală f_2 și se află situat la distanța d de obiectivul a cărui distanță focală este f_1. La ce distanță de obiectiv se află un obiect de dimensiune «e» dacă privit prin microscop se vede sub unghiul 2α, puterea de mărire a microscopului este «n».

Al. I. Voinea, elev Craiova

2651. — Să se arate că:

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,cos}\frac{12}{13} = \operatorname{arc\,tg}\frac{20}{21} + \operatorname{arc\,tg}\frac{756}{121}.$$

Paul R. Popescu, student

2652. — Dacă G_1 este centrul de greutate al feței $A_2 A_3 A_4$ a tetraedrului $A_1 A_2 A_3 A_4$, iar A', A'', A''', O sînt intersecțiile unui plan oarecare cu $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_1 G_1$, atunci are loc relația:

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 A'} + \frac{A_1 A_3}{A_1 A''} + \frac{A_1 A_4}{A_1 A'''} = \frac{3 A_1 G_1}{A_1 O}.$$

(În cazul particular cînd O este centrul de greutate al tetraedrului se obține problema 2341.)

Marcel Bărbulescu, Slatina

2653. — La extremitățile unui diametru AB ducem două tangente. Luăm pe tangenta din B segmentul $BS = \dfrac{AB}{2}$. Un punct Q taie segmentul SB în medie și extremă rație. Segmentul AQ taie cercul în punctul N, iar dreapta SN taie tangenta din A în punctul D. Să se demonstreze că $AD = 4\,SB$.

Francisc Linder, Lipova

2654. — Să se arate că pentru n întreg și pozitiv fracția

$$\frac{5^{2n+3} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1}}{3^{1957} + 5^{1957} + 7^{1957} - 15^{1957}}$$

se simplifică cu 19.

I. Mateescu, Giurgiu

2655. — Se consideră trei cercuri tangente exterioare cu centrele în vîrfurile unui triunghi oarecare ABC. Fie $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ cevienele unui punct P din interiorul triunghiului. Să se demonstreze că punctele $A_1\,(BC, \beta\gamma)$, $B_1\,(CA, \gamma\alpha)$, $C_1\,(AB, \alpha\beta)$ sînt colineare.

Gh. Stoian, student București

CHESTIUNI DE EXAMEN[1])

DATE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ — ETAPA REGIONALĂ
DIN 31 MARTIE 1957

Pentru fiecare clasă timpul de lucru 3 ore; toate chestiunile obligatorii.

Clasa VIII-a

2656. — Trei tractoare A, B, C pot ara un teren agricol în a zile. După ce au arat timp de b zile se defectează tractorul C, iar cele două tractoare A și B împreună ar termina restul aratului în c zile; însă după d zile de la defectarea tractorului C, tractorul B este utilizat la altă muncă rămînînd tractorul A care termină de arat terenul în e zile.

a) Să se exprime în funcție de a, b, c, d, e în cîte zile ar putea ara tot terenul dacă ar ara numai cîte un tractor.

b) Rezultatele aflate să se verifice în enunțul problemei în cazul numeric $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 2$ și $e = 6$ zile; apoi în acest caz

c) să se construiască un grafic într-un sistem de axe dreptunghiulare din care să rezulte în orice moment care este procentul de teren care mai trebuie arat.

C. Ionescu-Țiu

2657. — Se consideră patratul $ABCD$. Bisectoarea unghiului BDC taie latura BC în M și diagonala AC în L. Perpendiculara dusă din B pe dreapta DM intersectează această dreaptă în E, iar prelungirea laturii DC o taie în F. Bisectoarea unghiului ABD taie diagonala AC în I și latura AD în G. Paralela dusă prin G la AC taie latura DC în P.

a) să se arate că dreptele GF și EP trec prin L;

b) Fie N intersecția dreptelor GF și BC. Să se arate că triunghiurile LMN și BGP sînt isoscele. Care este mărimea unghiurilor acestor triunghiuri?

c) Să se arate că cercul de diametru PG trece prin punctele I și L;

d) Acest cerc taie pe BD în S. Să se arate că arcele GI, IS, SL și LP sînt egale;

e) Fie J intersecția dreptelor PN și BF. Să se arate că punctele I, S, M, J sînt situate pe o aceiași dreaptă paralelă cu GF.

Gh. Bazacov (T.-Severin) și **C. Ionescu-Țiu**

Clasa IX-a

2658. — Se dă: $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Să se exprime $\log_{30} 8$.

* * *

[1]) La problemele propuse 2633 — 2685 se primesc soluții pînă la 15 septembrie 1957.

2659. — Se dau numerele: 1, 5, 9, 13 în progresie aritmetică.

a) Să se afle cele două ecuații de gradul doi care au ca rădăcini: una, primul și ultimul termen al progresiei; a doua, al doilea și al treilea termen al progresiei. Să se explice dece în ecuațiile obținute coeficienții lui x sînt egali.

b) Se dau ecuațiile:

$$x^2 - px + q = 0 \; ; \quad x^2 - px + q' = 0.$$

Să se afle ce relație trebuie să existe între coeficienții lor pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie aritmetică.

c) Ce relații trebuie să avem între coeficienții ecuațiilor:

$$x^2 - px + q = 0 \quad ; \quad x^2 - p'x + q' = 0$$

pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie geometrică, rădăcinile uneia din ecuații fiind al doilea și al treilea termen al progresiei.

A. Șaichin, București

2660. — Se consideră un cub cu bazele $ABCD$, $A'B'C'D'$. În planul bazei $ABCD$ se consideră cercul de diametru AB. Fie M un punct pe acest cerc, L mijlocul segmentului $A'M$, I mijlocul laturii AB, N intersecția dreptei IL cu planul bazei $A'B'C'D'$. Se cere:

a) să se arate că suma $IL^2 + A'L^2$ este constantă cînd M descrie cercul;

b) să se afle locul geometric al punctului N.

Petre Boldescu, Craiova

Clasa X-a

2761. — Coasta OA a unui deal face cu orizontala 45°. Din A înclinarea se micșorează și noua direcție Ax face cu orizontala unghiul α (unghiul OAx se află într-un plan vertical). În A este înfipt vertical un stîlp AM de lungime l, ancorat în punctele B pe Ax și C pe AO prin cablurile MB, MC care fac cu stîlpul unghiuri egale.

Știind că unghiul MBA și unghiul MCA sînt complementare și că diferența lungimilor AC, AB este egală cu diagonala patratului a cărui latură este cît lungimea stîlpului, să se determine:

a) unghiurile MBA, MCA, α și unghiurile făcute de cabluri cu stîlpul;

b) lungimile AB, AC α în funcție de lungimea stîlpului.

Gh. D. Simionescu, București

2662. — Muchiile laterale $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ale unei piramide triunghiulare sînt perpendiculare între ele. Prin centrul de greutate G al bazei ABC se duc plane paralele cu fețele laterale și se formează astfel, un paralelipiped dreptunghic.

a) Să se afle volumul piramidei;

b) în ce raport stau volumele paralelipipedului și piramidei;

c) să se afle distanța de la vîrful piramidei la bază;

d) să se exprime prin funcții trigonometrice unghiurile pe care le face diagonala OG a paralelipipedului cu muchiile OA, OB, OC ale piramidei.

I. Lepădatu, Galați

2663. — Să se arate că expresia:

$$E = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5}{x^5 - x^2 - x + 2}$$

ia valoarea 3 cînd x se înlocuește printr-o rădăcină a ecuației

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

* * *

ANUL II AL ŞCOLILOR PEDAGOGICE

2664. — După autocamioane pleacă în acelaşi timp din Bucureşti pe şoseaua Bucureşti — Craiova. Un autocamion are viteza de 30 km/oră, iar celălalt viteza de 25 km/oră. Se întreabă:

1) după cît timp punctul unde se află kilometru 66 de la Bucureşti se găseşte la mijlocul distanţei dintre cele două autocamioane.

2) care este piatra kilometrică prin faţa căreia al doilea camion trece la o oră după primul?

C. I. Ţ.

2665. — Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Paralela dusă prin M, mijlocul ipotenuzei, la cateta AB, întîlneşte înălţimea dusă din A sau prelungirea ei în punctul D.

1) Să se arate că dreptele AM şi OD sînt perpendiculare.

2) Să se calculeze unghiurile şi laturile triunghiului ACD în funcţie de elementele triunghiului ABC.

Olimpia Gheorghiu, Bucureşti

ANUL III ŞI IV ŞCOLI PEDAGOGICE.

2666. — Trei robinete A, B şi C pot umple un bazin în 14 ore dacă ar curge împreună. Se lasă să curgă cele trei robinete împreună timp de 10 ore, apoi se închide robinetul C şi ar mai trebui încă un timp de 8 ore ca aceste două robinete să umple bazinul; însă după 4 ore de la închiderea robinetului C se închide şi robinetul B, rămînînd ca robinetul A să mai curgă singur timp de 12 ore pentru a umple bazinul.

Să se afle timpul în care s-ar umple bazinul dacă ar curge numai robinetul B.

* * *

2667. — *a*) La ce distanţă de centrul unei sfere de rază R trebuie dus un plan astfel ca aria calotei mici ce se formează să fie egală cu aria laterală a conului drept înscris în calota mare, avînd ca bază cercul de intersecţie al planului cu sfera.

b) Să se afle raportul dintre volumul conului şi volumul sferei.

Florica Pătraşcu, Bucureşti

ANUL I ŞCOLI TEHNICE DE MAIŞTRI

2668. — Se dă ecuaţia $x^2 - 2mx + 4m^2 - 10m + 7 = 0$.

a) Pentru ce valori ale lui m, rădăcinile acestei ecuaţii sînt reale?

b) Se dă lui m valoarea particulară $m = 2$ şi se obţine ecuaţia $x^2 - 4x + 3 = 0$. Să se calculeze fără a rezolva ecuaţia, valoarea expresiei $x_1^2 + x_2^2$, x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

c) Să se determine m în aşa fel încît între rădăcinile ecuaţiei date să avem relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 = 10;$$

care sînt aceste rădăcini? Să se verifice relaţia $x_1^2 + x_2^2 = 10$ cu valorile acestor rădăcini.

* * *

2669. — Se dă un trunchi de con cu raza mare de 7 dm, înălţimea de 8 dm, volumul de $152\,\pi$ dm^3.

a) Să se calculeze aria totală a acestui trunchi de con.

b) Se împarte înălţimea conului în trei părţi egale şi prin punctul de diviziune cel mai apropiat de baza mare a trunchiului de con se duce un plan de secţiune paralel cu bazele.

Să se calculeze ariile laterale ale celor două trunchiuri de con obţinute.

* * *

ANUL II ŞCOLI TEHNICE DE MAIŞTRI

2670. — Într-o sferă de rază 3 dm se înscrie un corp format dintr-un cilindru şi două conuri (conurile au baze comune cu bazele cilindrului).

a) Pentru ce valoare a înălţimii cilindrului este maxim volumul acestui corp?

b) Să se exprime volumul maxim în procente din volumul sferei.

* * *

2671. — Se dau punctele A (2, —2); B(6,0). Se cere:

a) Să se determine pe axa Oy un punct M aşa fel încît unghiul AMB să fie de 45°.

b) Se vor obţine două puncte, unul din ele fiind M (0,2). Să se afle ecuaţia cercului ce trece prin A,B,M.

c) Să se explice geometric de ce acest cerc trece prin origină.

d) Fie C centrul cercului. Să se calculeze unghiul ACB. Se putea prevedea fără calcul rezultatul obţinut?

Petrescu Ştefan şi Şaichin A., Bucureşti

ANUL I ŞCOLI PROFESIONALE

2672. — Să se rezolve sistemul:

$$1{,}5x - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}\,y = 12,$$

$$\frac{\sqrt{4{,}5}+\sqrt{2}}{\sqrt{4{,}5}-\sqrt{2}}\,x - 2y = 32.$$

* * *

2673. — Pe un cerc cu centrul în O se iau punctele A şi B aşa ca tangentele la cerc în aceste puncte să fie perpendiculare; punctul lor de intersecţie se notează cu P. Pe arcul mare AB se ia un punct C.

a) Să se afle măsura arcelor AB şi ACB şi a unghiurilor ACB şi AOB.

b) Să se arate că $AOBP$ este un patrat.

c) Bisectoarea unghiului OPB taie cercul în punctele D şi E. Să se afle mărimea unghiurilor DBP şi EBP.

d) Să se calculeze unghiul format de tangentele duse la cerc în punctele D şi E.

* * *

2674. — Un ceas deşteptător întîrzie cu 3 minute pe oră. El este potrivit la ora 8 seara ca să sune dimineaţa la 6. La ce oră trebuie aşezat indicatorul soneriei pentru ca deşteptătorul să sune exact la ora 6. (Se spune că un ceas întîrzie cu 3 minute pe oră, dacă în timp ce un ceas ce merge exact indică 60 minute ceasul ce întîrzie indică 57 minute.)

* * *

ANUL II ŞCOLI PROFESIONALE

2675. — Se trasează pe o tablă un triunghi echilateral cu latura de 240 mm. Se înseamnă mijloacele laturilor care se unesc prin segmente. Se îndoaie colţurile de-a lungul acestor segmente, formîndu-se o piramidă cu baza un triunghi echilatral. Să i se afle volumul.

Dumitru Nicolae, Bucureşti

2676. — Avem la dispoziţie o bară de fier lungă de 2,5 m pe care vrem să o îndoim formînd o piesă $ABCD$ alcătuită din două porţiuni drepte AB şi CD şi o porţiune semicirculară BC. Ştiind că înălţimea totală este de 1 m, să se calculeze celelalte dimensiuni ale piesei.

A. Şaichin, Bucureşti

2677. — Avem la dispoziție două ceasornice: unul care întîrzie, altul care avansează. Primul marchează într-o oră adevărată, 55 de minute. Al doilea merge așa încît în timp ce el marchează o oră, un ceas ce merge exact marchează doar 50 de minute. La ora 12 cele două ceasornice se pun exact.

Care va fi ora adevărată știind că timpul arătat de cele două ceasornice diferă cu o oră și 25 minute.

PROBLEMELE DATE LA OLIMPIADA DE FIZICĂ — ETAPA REGIONALĂ DIN 31 MARTIE 1957. LA PROBLEME SE PRIMESC SOLUȚII

Clasa VIII-a

2678. — Un tren merge cu viteza de 36 km/oră. Să se determine:

a) cîte rotații pe minut face roata de 0,8 m diametru a trenului;

b) dacă trenul este frînat brusc, să se determine distanța pe care trenul o va parcurge patinînd pînă în momentul în care se va opri.

Coeficientul de frecare de alunecare între roți și șine este de 0,15.

— Energia mecanică; legea conservării energiei.

* * *

Clasa IX-a

2679. — În doi cilindri de oțel cu capacitatea de 20 l fiecare se găsește oxigen la presiunea de 120 atm. Ciiindrii se află la temperaturi diferite: unul la 0° și al doilea la 60°C. Să se calculeze greutatea oxigenului la presiunea atmosferică normală aflată în plus în cilindrul mai rece (greutatea unui litru de aer la presiunea normală și temperatura de 0°C este 1,3 g, iar densitatea oxigenului este 1,1).

— Forțe intermoleculare la lichide și fenomene care rezultă din aceste forțe.

* * *

CLASA X-A, ȘCOLI PROFESIONALE ANUL II ȘI ȘCOLI MEDII TEHNICE DE MAIȘTRI

2680. — În circuitul exterior al unei baterii formată din 10 elemente avînd fiecare f.e.m. de 1,5 V și rezistența interioară de 0,4 ohmi, legate în serie, se găsește un voltametru cu $AgNO_3$. La catod se depun 0,6708 g de Ag în 5 minute.

Care este căderea de tensiune în interiorul bateriei în timpul funcționării?

Ce rezistență opune voltametrul și ce cantitate de electricitate trece prin el?

— Legile curenților derivați; aplicațiile lor tehnice.

* * *

ANUL I ȘCOLI PROFESIONALE

2681. — Se dă o supapă de siguranță acționată printr-o pîrghie.

Distanța de la tija supapei pînă la capătul unde se aplică greutatea este egală cu 43 cm, iar distanța de la tija supapei și pînă la axul de rotație este de 7 cm. Diametrul supapei este de 6 cm. Dacă vaporii din cazan au presiunea de 11 atm se întreabă pentru ce greutate *G* supapa va începe să se deschidă, cunoscînd că greutatea proprie a pîrghiei *OA* este egală cu 1 kg.

Să se arate ce fel de eforturi suportă pîrghia și tija supapei.

— Solicitări mecanice ale materialelor: întindere, compresiune, forfecare, tensiune, încovoiere. Rezistențe admisibile și coeficienți de siguranță.

2682. — Trei bărci de cîte 90 kg merg una după alta pe un lac liniştit, cu viteza de 10 m/s fiecare. Din barca de la mijloc se aruncă în acelaşi moment din mers, în barca din faţă şi în cea din spate, cîte un sac de 10 kg, cu viteza de 2 m/s faţă de barca din mijloc. Ce viteză finală are fiecare barcă?

(La Olimpiada de fizică, cl. VIII, etapa II 1957)

2683. — De un lanţ care poate susţine o greutate maximă de 40 kg este suspendat un corp de 1 kg. Care este unghiul maxim pe care-l face corpul cu poziţia lui de echilibru, dacă este pus în mişcare de oscilaţie, fără ca lanţul să se rupă în timpul oscilaţiei?

(La Olimpiada de fizică, clasa IX etapa II 1957)

2684. — O undă sonoră se propagă într-un mediu elastic şi parcurge 11,48 km în 8 secunde. Ce frecvenţă are sunetul dacă lungimea lui de undă în acel mediu este de 3,298 m?

Ce viteză unghiulară trebuie să aibă un mobil pe un cerc pentru ca proiecţia lui pe un diametru să oscileze cu această frecvenţă?

(La Olimpiada de fizică, clasa X-a etapa II 1957)

2685. — La o transmisie prin curele roata conducătoare are diametrul $D_1 = 10$ cm. Să se calculeze diametrul roţii conduse D_2 şi lungimea curelei necesare, ştiind că raportul de transmisie este $i = 2 : 7$ şi că distanţa între cele două roţi este de 1250 mm. Unghiul AOA_1 format de razele roţilor duse în punctele de tangenţă ale curelei se va lua 157° aproximativ.

(La Olimpiada de fizică, şc. profesionale etapa II 1957)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI[1])

E: **962.** — Să se găsească un număr format din trei cifre, ştiind că este mai mare cu 198 decît răsturnatul lui, iar împărţindu-l la suma cifrelor sale ne dă cîtul 53 şi restul 3, iar cifra sutelor este egală cu suma cifrelor zecilor.

Petru Mecea

E: **963.** — Dirigintele clasei a VII-a fiind întrebat spre ce şcoli şi-a îndrumat absolvenţii, a răspuns: « Unii din ei învaţă în şcoli profesionale, alţii în şcoli tehnice, iar 8 sînt în şcolile de 11 ani. »

Ştiind că $\frac{4}{9}$ din numărul absolvenţilor plus $\frac{2}{13}$ din cei care merg la şcolile tehnice şi de 11 ani la un loc, frecventează şcolile profesionale, iar $\frac{1}{2}$ din numărul celor care merg la şcolile profesionale şi de 11 ani la un loc frecventează şcolile tehnice, să se calculeze:

1) cîţi absolvenţi a avut şcoala?
2) cîţi din ei frecventează şcoli profesionale?
3) cîţi din ei frecventează şcolile tehnice?

I. Munteanu, Zăpodeni

E: **964.** — O foaie de tablă galvanizată lungă de 1,25 m şi lată de 0,8 m cîntăreşte 17 900 g. Ştiind că 1 dm^3 de foaie cîntăreşte 8950 g să se afle:

1) grosimea acestei foi în milimetri:
2) cît vor costa cele 125 foi galvanizate necesare pentru un acoperiş de magazie dacă kilogramul de foaie galvanizată costă 7,60 lei?

B. I. Baieră, profesor

---

[1]) V (E: 964, 967, 968, 972, 973), VI (E: 963, 969, 970), VII (E: 962, 965, 966, 971),

E: **965.** — Să se arate că dacă

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c} \text{ și } \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{a},$$

atunci avem și

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{2}{b} \text{ și } a=b=c.$$

C. D. Bulucea, elev, R. Vîlcea

E: **966.** — Pe o dreaptă sînt așezate 4 puncte în ordinea A, B, C, D. Să se arate că

$$AD^2 \cdot BC + CD^2 \cdot AB = BD^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC,$$

$$AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD.$$

C. I. Ț.

E: **967.** — Să se arate că:

$$5 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot (2 + 3 + 4 + 7 + 9) = 1\,000\,000\,000,$$

$$2^{3.6-9} \cdot 5^{8+7+4-10} = 1\,000\,000\,000,$$

$$2^3 \cdot 4 \cdot 5^{9+6-7} \cdot 8 \cdot 10 = 1\,000\,000\,000,$$

$$2^6 \cdot 5^7 \cdot [8 \cdot (1 + 9) + 4 \cdot 30] = 1\,000\,000\,000.$$

Eugen Iacob

E: **968.** — Să se calculeze

$$(64 - 59)^8 \cdot 20 \cdot (3 - 1)^7;$$

$$5 \cdot 20 \cdot (1 + 3 \cdot 9 - 4 - 6 - 8)^7;$$

$$[2 \cdot 10 \cdot (4.5 + 6 + 7 + 8 + 9)]^3;$$

$$\left(\frac{40}{8} - 3\right)^{\frac{62+1}{7}} \cdot 5^9.$$

Eugen Iacob

E: **969.** — Să se împartă un dreptunghi cu laturile de 36 și 25 în două părți, astfel încît din ele să putem construi un patrat.

E: **970.** — Să se împartă un dreptunghi cu laturile de 36 și 16 în două părți, astfel încît din ele să putem construi un patrat.

C. I. Ț.

E: **971.** — Dacă $1 < a$, să se dovedească că:

$$\frac{2a}{1+a^2} < 1 < \frac{2a-1}{a^2}.$$

Dorin Tomoiagă, elev, Sighet

E: **972.** — La ora 8 dimineața un tren personal pleacă din București spre Timișoara cu viteza de 30 kilometri pe oră. La ora 4 după amiază pleacă din București un automotor în aceiași direcție, dar cu viteza medie de 90 kilometri pe oră. Automotorul ajunge personalul plecat înaintea lui, la Turnu Severin, apoi își continuă drumul spre Caransebeș

unde sosește cu două ore înaintea personalului. Să se afle distanțele de la București la Turnu Severin și la Caransebeș.

N. N. Ghelmeziu, elev, București

E: **973.** — Biletul de intrare la o expoziție costă 1 leu. După reducerea prețurilor la bilete, numărul vizitatorilor s-a dublat, iar încasarea a crescut cu jumătate. Care a fost reducerea?

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 15 februarie 1957 au mai fost evidențiați următorii rezolvitori de probleme propuse în G.M.F. — B:

Iorgulescu Alexandru (student I. P. București), *Nicolescu A. Basarab* (clasa 8 Ploești), *Popescu Paul Roger* (Fac. electrotehnică București), *Paulescu N. Dan* (student București), *Căsăndroiu C. Tudor* (clasa 10 Ploești) *Oprică Mihai* (clasa 9, s. m. 17 București), *Virgolici Virgil* (Fac. instalații București), *Sgăvîrdea Dumitru* (absolvent Caransebeș), *Șaganai A. Nusfet* (Fac. mecanică București), *Tudor N. Constantin* (Fac. matematică București), *Ballag Vasile* (clasa 10 Ploești), *Bilcu C. Petre* (absolvent București), *Stan N. Dumitru* (absolvent Pucioasa), *Teodorescu Nicolae* (clasa 10 s. m. 2 București), *Tofan Liliana* (prof. Codlea, Reg. Stalin), *Bănică Radu* (clasa 10 Ianca-Galați), *Landmann Alexandru* (Fac. energetică București), *Schain Theodor* (clasa 10 ș. m. 1 București), *Enescu Nicolae* (Fac. mecanică București), *Sin C. Alexandru* (Fac. construcții București), *Tuicu Valeria* (clasa 10 Giurgiu), *Caracoti Stere* (clasa 10 Ianca-Galați), *Ciobanu N. Marin* (absolvent Giurgiu), *Ancuțoiu Gh. Ioan* (clasa 10 Rîmnicu Vîlcea), *Delibas Constantin* (clasa 10 Ploești), *Klecner V. Adrian* (clasa 10 ș. m. 1 București), *Belinger Dumitru* (absolvent București), *Cipere I. Lucian* (clasa 10 ș. m. 1 București), *Mira Eugen* (clasa 7, ș. el. 119 București), *Zorapapel Tiberiu* (clasa 10 ș. m. 20 București), *Martiș Gh. Ioan* (clasa 10. ș. m. 4 București), *Chiriac Dumitru* (clasa 8. ș. m. 1 Bacău), *Tudor Mircea* (clasa 10 Cîmpulung Moldovenesc), *Indoleanu Ion* (anul 4, șc. pedag. nr. 2 Cluj), *Doniga Nicolae* (clasa 10 ș. m. 1 București), *Profirescu D. Marcel* (clasa 9 Giurgiu), *Apostolescu Mihail* (clasa 10 Ploești), *Mîrlogeanu Florea* (clasa 10 Giurgiu), *Lăscuțoiu Virgil* (absolvent Ghelar Hunedoara), *Bădoiu Gheorghe* (clasa 10 Curtea de Argeș), *Matei Didina* (clasa 9 ș. m. 3 Tîrgu Mureș), *Nerodea Tiberiu* (student Timișoara), *Matei V. Aurel* (absolvent Tîrgu Mureș), *Stan C. Dumitru* (Acad. tehn. militară București), *Bodea C. Mircea* (clasa 10 ș. m. 1 București), *Epureanu P. Alexandru* (clasa 10 ș. m. 1 Galați), *Pițigoi I. Gheorghe* (clasa 10 Rîmnicu Vîlcea).

Pînă la 15 februarie 1957 s-au primit cîte cel puțin zece soluții bune la probleme propuse în GMF — B în numerele 10, 11 și 12 din anul 1956, după cum urmează:

ABRUD. *Școala medie nr. 2.* Clasa 8. Mîrza Moise (2347, 59, E: 882, 84—86, 90).

ADJUD. Absolvent Flueraru Costică (2349, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 78, 79, 404—11, 45, 55, 57).

ALBA IULIA. *Școala medie nr. 2.* Clasa 9. Trifu Mircea (2359, 60, 62, 63, 95, 404, 05, 07, 09—11, 45, 46, 56).

ALEXANDRIA. Clasa 10. Ploeșteanu S. Ion (2380, 83, 94, 97, 98, 402, 04—07, 09, 10, 14—16).

ARAD. *Școala medie nr. 1.* Clasa 9. Beștea Gh. Cătălin (2356, 57, 59, 60, 74, 77, 80, 92, 400, 04, 06, 07), Bogdănescu Silviu (2349, 57, 64, 80, 95, 404—10), Savin Virgil (2353, 57, 59, 60, 72, 95, 404, 05, 07—11, 15).

BACĂU. *Școala de 7 ani Păunești.* Clasa 7. Novac Gh. Gheorghe (2320, 92, 94, 404, 06, E: 873, 85, 90), Panaite Adrian (E: 867, 68, 71, 72, 74, 79, 83, 88, 90, 92, 93), Pintilie Florica (2392, E: 863, 68—70, 72—74, 93, 94), Vasilichi Zarafina (2320, 92, 94, 404, 06, E: 877, 85, 93—95).

Școala medie nr. 1. Clasa 8. *Chiriac D. Dumitru* (2378, 95, 99, 410, 11, 45, 53, 55—58, 61—63, E: 882, 85, 87, 91, 94, 96, 99, 900, 01, 03, 05, 07—09), Grill Alfred (2392, 99, 438, 53, 55, 56, 62, E: 894, 98, 903, 07, P). Clasa 9. Grigoraș Vasile (2332,

60, 72, 85, 94, 404, 08, 13, 19, 23, 48, 44—47, 50, 55—58, 61—64, P). Clasa 10. Roman Corneliu (2404, 05, 07, 09, 45, 46, 48, 50, 52, 55—57, 62, 63).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj). Clasa 10. Manolache Liviu (2359, 405, 07, 10, 11, 14, 15, 27, 45—48, 50—52, 56, 58), Opriţa Nicolae (2356, 59, 78, 79, 85, 92, 96, 99, 404, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 16).

BÎRLAD. Clasa 8. Nicolau Maria (E: 874, 76, 78, 80, 83, 84). Clasa 9. Spulber Dorian (2392, 95, 404—06, 09, 10, 46, 55, 56, 58, 61).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti). Clasa 8. Răduţă Apolodor (2352, 56, 74, 85, E: 874, 80, 84, 93, 98).

BOTOŞANI. Clasa 8. Misir Ioana (E: 874, 75, 78—80, 83, 86, 88, 90, 93, 94, 98). Clasa 10. Vasiliu Monica (2387, 94, 405—07, 10, 11, 45, 46, 48, 49, 55, 56, 62, 63).

BRĂILA. Clasa 10. Gomolea Aurelia (2359, 61—63, 73, 406, 07, 10, 15, 48, 55, 62).

BREAZA. *Liceul militar «D. Cantemir»*. Clasa 10. Lache Florică (2445, 46, 48—52, 55—57, 62, 63).

BUCUREŞTI. — *Studenţi*: Cochinţoiu Ion (fac. hidrotehnică) (2386, 87, 404, 05, 08, 09, 45, 46, 55, 56, 58, 61—63), Enescu Nicolae (fac. mecanică) (2386, 87, 90, 95, 98, 402, 04-10, 17, 18, 20, 23, 27, 33, 38, 41, 42, 44—50, 52—57, 60—64, P), Dobrescu C. Alex. (inst. c. f. r.) (2400, 14, 44, 46, 49, 50, 52, 54, 55, 57, 61, 62, 72, 78, 99), Ieremia I. Mircea (fac. constr.) (2386, 95, 405, 07, 10, 15, 38, 44—46, 48, 50, 52, 55—58, 61—63), Iorgulescu Alex. (IPB) (2357, 59, 60, 64, 68, 72, 77—80, 84—87, 89—92, 94—99. 404,—11, 13—17, 24, 26, 35, 45, 46, 48—50, 52—58, 60—62, 64, 72, 81, 83, 87, 97), Landmann Alexandru (fac. energetică) (2362, 49, 52, 56, 57, 60, 64, 66, 70—74, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 92, 95, 97, 402, 05—07, 09—11, 15, 17, 30, 38, 42, 45, 48, 52, 55, 57, 61—63), Paulescu N. Dan (2338, 41, 47, 57, 58, 60, 70—72, 74, 77, 78, 81, 83, 85—87, 90, 92, 95, 97—99, 404—11, 14, 15, 18, 20, 23—26, 30, 33, 38, 44—46, 48—50, 52—57, 61—63, P), Popescu Paul (fac. electronică) (2361, 64, 76, 85, 413, 14, 16, 17, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 36, 38—40, 44—46, 48, 49, 51—59, 61—63, 71, 72, 77—79, 82—87, 90, 91, 97, P), Prisadă Dan (fac. mecanică) (405, 07, 09, 10, 12, 15, 46, 48, 56, 81—83, 89,P), Sevastie I. Gheorghe (inst. petrol şi gaze) (2368, 87, 92, 400, 04—12, 15, 19, 20, 24, 29, 31, 32, 34, 38, 41—46, 48, 49, 52, 54—57, 59, 61, 62, 64), Sin C. Alexandru (fac. construcţii) (2386, 92, 95, 404—06, 09, 10, 14, 15, 17, 24, 29, 39, 44—63, P), Stan C. Dumitru (acad. tehn. militară) (2349, 53, 56, 57, 59, 63, 70—75, 77—80, 86, 87, 92, 94—97, 404—11, 14—17, P), Şaganai Aciîc Nusfet (fac. mecanică) (2384, 86, 87, 95, 96, 404, 05, 07—10, 17, 18, 24, 26, 27, 30, 33, 45—63, 72, 73, 78, 80—83, 87, 90, 97—99, P), Tudor N. Constantin (2356, 59, 60, 64, 70, 84, 86, 87, 92, 95—97, 400, 04—11, 13, 26, 29, 44—52, 55—58, 62, 63), Vîrgolici V. Virgil (inst. constr.) (2346, 48, 49, 54, 56, 57, 59—62, 64, 72, 74, 75, 77—80, 92, 94—97, 400, 04—11, 13—17, 25, 26, 30, 35, 37, 45—59, 51—63, P).

Absolvenţi: Belinger Dumitru (2392, 94, 95, 97, 406, 17, 10, 12, 23, 30, 33—35, 38, 44—50, 52,—56, 58, 59, 61—64), Bilcu Petre (2360, 81, 402, 06, 18, 12, 24, 29, 32, 33, 38, 43, 45—48, 50, 52, 54—58, 60—63, 68, 72, 76, 77, 86—91, 97, 98), Boambeş Gabriel (2383—85, 95, 97, 402, 04, 05, 07, 09, 10, 12, 15), Dincă A. Vasile (2404, 05, 07, 09, 14, 33, 38, 45, 48, 50, 52, 56, 57, 61—63, 72, 79, 95), Harmata L. Mihai (2386, 87, 92, 424, 26, 33, 34, 38, 44—64), Isbăşescu Radu (2357, 59, 60, 63, 64, 70, 72, 78, 87, 92, 95, 97, 404—07, 09—12, 14—16, 44—46, 57, 61), Leucă Anatolie (2356, 57, 79, 95, 407—11, 44—48, 50, 56, 58, 59, 61), Lungulescu Nuţică (2386, 95, 407, 15, 17, 45, 48, 50, 55, 57, 61—63), Panait Nicolae (2392, 95, 97, 405—07, 09—12, 14, 15, 17, 45—48, 55, 57, P), Proşcan C. Ion (2316, 32, 35, 79, 81, 92, 94—97, 99, 405, 06, 09, 13—17, 48, 50, 54, 62, 63).

Şcoala medie nr. 1 «N. Bălcescu». Clasa 8. Dascălu Dan (2392, 94, 405, 06, 09, 13, 16, E: 885, 89, 90, 94, 98,) Iurciuc Vasile (2375, 405, E: 856, 63, 65, 74, 76, 77, 80, 84, 90, 93, 94, 98,) Lupaş Laurenţiu (2349, 68, 406, E: 874—76, 78—81, 83, 84), Răşcanu Radu (2394, 96, 407, 08, 13, 16, 20, 45, 56, 61, 62, E: 907—09, 11, 17, 18). Clasa 9. Geamănu Anghel (2444—46, 48, 52, 53, 55, 56, 58, 59, 61, 62). Isbăşescu Mihai (1346, 48, 61, 70, 72, 75, 78, 79, 84, 85, 92, 95, 96, 99, 405—07, 10, 11), Lupan Mircea (2353, 56, 59—61, 63, 68, 72, 78—80, 92, 95, 404, 08, 11, 45—47, 50, 55), Mehr Boris (2392, 444, 45, 46, 52, 55, 56, 58, 61, 62), Paşcanu C. (2415, 38, 45—48, 50, 52—58, 62, 65, 78), Velicu Vasile (2395, 411, 45—48, 51, 52, 55—59, 61, 62). Clasa 10. *Bodea C. Mircea* (2402, 24, 27, 30, 34, 35, 38, 42, 44—64), Boşneag T. Cristian (2404—07, 09, 10, 46, 52, 55—57, 61—63), *Cipere I. Lucian* (2394, 98, 402, 05—09, 14—17, 26, 34, 35, 45, 55, 56, 61—63, 71, 72, 83, 87, 90, 97, 99), Cocieru Ion (2357, 59, 60, 70—72, 78, 79, 95, 402, 04, 05, 07, 09, 10, 15, 16), *Doniga Nicolae* (2348—51, 53—57, 59, 60, 72, 74, 79, 80, 84, 85, 92, 95—97, 99, 400, 04—07, 09, 10, 15—17), Martin Traian (2358, 404, 05,

07, 09, 10, 15, 38, 45, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 61—63), *Klecner V. Adrian* (2399, 402, 14, 18, 20, 24, 30, 31, 33, 44, 46, 49—51, 53, 54, 58—60, 72, 73, 77, 79, 80, 82, 83, 85, 87, 88, 90, 91, 97, 99, P), Mihăilescu Ştefan (2393, 95, 404—06, 09, 10, 46, 47, 53, 61, 82), *Schain Theodor* (2384—86, 89—92, 94—97, 99, 400, 02, 04,—18, 20, 24, 35, P). Pesci Radu 2404—07, 09, 10, 46, 48, 49, 52, 53), Voicu Victor (2405, 09, 44, 46, 47, 49, 52, 62, 63, 89), Voinea P. Radu (2438, 45, 46, 48, 50, 52, 54—57, 61—63), abs. Vovcenko Andrei (2405, 07, 09, 10, 15, 45, 48—50, 52—56, 58, 60—63).

Şcoala mədie nr. 2. Clasa 10. *Teodorescu Nicolae* (2382, 87, 89, 413, 16, 18, 23, 28, 40, 31, 34, 35, 38, 39, 44—64, P).

Şcoala medie nr. 4 « Aurel Vlaicu ». Clasa 8. Grigore I. Felicia (2392, E: 863, 65, 67, 69, 72, 86, 89, 90, 91, 93, 902), Triaire Christian (2404, 05, 55, E: 852, 56, 86, 90, 91, 98, 905). Clasa 9. Dobre D. Cornel (2445—48, 50, 52—57, 61, 62), Dumitrescu Elisabeta (2392, 94—96, 404—07, 09, 10, 46, 48, 54, 56, 61—63), Nicolau C. Virgil (2424, 38, 44—48, 55—58, 61—63), Rădulescu Marin (2349, 53, 56, 57, 68, 74, 77, 78, 80), Teodorescu Ioan (2404—11, 13, 14, 16, 17), Zahariuc Dan (2322, 40, 48, 67, 68, 84, 92, 99). Clasa 10. Ionescu G. Mircea (2292, 96, 97, 99, 304, 08, 09, 17, 33, 35, 38, 40), *Marţiş Gh. Ioan* (2357, 59, 71, 78, 82, 92, 95, 402, 04—12, 14—17, 45, 46, 48—50, 53, 54, 56, 60—63, P).

Şcoala medie nr. 7 « I.L.Caragiale ». Grofşoreanu T. Gelu (E: 864, 65, 67, 69, 72—80, 83, 84, 86, 93), *Mazilu Luminiţa* (2404, 05, 08, 09, 25, 40, 44, 61, 62, 91, E: 899—903, 05, 06, 08, 09, 11, 15, 17).

Şcoala medie nr. 8. Clasa 8. Isbăşescu Mircea (2349, 59, 404, 55, 56, E: 875, 78, 80, 81, 86, 88, 97, 901, 03, 05, 08, 09).

Şcoala medie nr. 10. Clasa 9. Andronescu Sarmiza (2392, 95, 404, 05, 07, 08, 11, 45—47, 56, 65), Georgescu Magda (2395, 405, 09, 10, 45, 46, 55, 56, 61, 62), Iulian Maria (2316, 20, 39, 56, 57, 60, 64, 409, 10, 44—48, 52, 55), Repciuc Rodica (2381 98, 404, 05, 10—12, 27, 55, 56), Teodorescu Anca (2445, 47, 52, 55, 66, 57, 58, 61, 72, 74), Wagenberg Fany (2405, 09, 10, 38, 45, 46, 48, 53, 55—57, 61—64). Absolventă Stanciu Loretta (2392, 95, 405, 09, 15, 46, 48, 52, 56, 58, 61, 62, 63).

Şcoala medie nr. 11 « D. Cantemir ». Clasa 9. Antoniu I. Sorin (2357, 60, 63, 95, 404—10).

Şcoala medie nr. 12. Clasa 10. Cserveny Ştefan (2347, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 62, 63, 66, 78—80).

Şcoala medie nr. 13. Clasa 8. Bicu R. Dan (2404, 38, E: 874, 76, 80, 83, 84, 86, 90, 93, 94, 99, 902), Popescu I. Ovidiu (2438, 55, E: 877, 90, 91, 96, 99, 900, 02, 05). Clasa 9. Bănică Dan (2356, 57, 59, 60, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 46, 56), Ţugulea Mircea (2404—07, 09, 10, 20, 38, 39, 45—48, 55—57, 61, 62, 74, 80, 92, 94, 95, 98).

Şcoala medie nr. 17 « Matei Basarab ». Clasa 8. Ionescu T. Aurel (E: 863—65, 74, 76, 79, 84), Lupescu Al. Atena (2405, 09, E: 863, 65, 67, 69, 70, 86, 91, 93). Clasa 9. Furman Justin (2359, 92, 405—07, 09, 10, 45, 47, 55, 56, 58, 61, 62), *Oprică Mihai* (2316, 21, 26, 30, 32, 36, 39, 40, 47, 49, 56, 57, 59, 61—64, 70—74, 80, 84, 85, 92, 94—401, 05, 07, 09, 10, 13, 16).

Şcoala medie nr. 18. Clasa 9. Eftimie Radu (2392, 95, 404, 05, 08, 09, 38, 45, 46, 48, 52, 55, 56, 61—63).

Şcoala medie nr. 20 « Gh. Şincai ». Clasa 9. Marcu Mihai (2349, 57, 60, 78, 409, 10, 49, 55—57, 60, 62). Clasa 10. Alexe Dan (2357, 68, 95, 404—11, 24, 42, 44—46, 55—58, 61, 62, P), *Zorapapel Tiberiu* (2321, 26, 39, 61, 70—72, 74, 76, 84, 91, 92, 94—97, 99, 405—07, 09, 10, 13—17, P).

Şcoala medie nr. 22. Clasa 7. Niţă Georgeta (E: 880, 81, 83, 84, 88, 91—94, 97—902, 06—09). Clasa 8. Ciorănescu Ioana (2420, 35, 38, E: 886, 89, 90, 93, 94, 98, 909, 11, 14, 15, 17). Clasa 10. Ciocănaş Doina (2406, 09, 45, 46, 49, 51, 55, 56, 61—63), Gheorghiţă Mariana (2370, 71, 74, 92, 97, 402, 15, 38, 42, 45—49, 53, 55, 56, 59, 61—63).

Şcoala medie nr. 23. Clasa 9. Burumţia Constantin (2393, 95, 99, 410, 13, 14, 16, 17, 45, 48, 52, 55, 61, 62), Revin S. Eugen (2357, 63, 92, 95, 404, 05, 07—11, 45, 46, 48, 52, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Cociu Mircea (2438, 42, 43, 48—50, 52—57, 59, 61, 63),

Şcoala medie nr. 26. Clasa 10. Niculescu Ştefania (2357, 78, 95, 406, 07, 45, 48, 52, 62, 63).

Şcoala tehnică de metrologie. Drăguşin Mircea (2384, 92, 94—97, 402, 04—16, 32).

Şcoala de 7 ani nr. 2. Clasa 7. Berca Gabriela (E: 886, 90, 93, 97, 98, 902—05, 08).

Şcoala medie nr. 119. Clasa 6. Mira Constantin (2347, E: 874, 76, 79—81, 84, 87, 88, 93—97). Clasa 8. *Mira Eugen* (2348, 49, 51, 56, 58, 59, 61, 74, 80, 85, 99, 404—10, 13; E: 875, 77, 78, 82, 83, 85, 86, 89, 90, 98).

BUZĂU. Clasa 8. Gheorghe A. Cezar (2347—49, 56, 57, 59—61, 63, 64, 71, 73, 74, 80, E: 874—81, 83, 84, P). *Absolvenţi:* Bătireanu Gheorghe (2414, 30—33, 38, 42—48,

50—54, 56—59, 62—64), Taia Georgeta (2357, 58, 404—06, 07, 99, 10, 38, 45, 48, 52, 54, 58, 61—63).

CALAFAT. Clasa 8. Iordache Cornel (2438, E: 876, 79, 93, 900, 02). Clasa 9. Dărvăreanu V. Ilie (2353, 56, 92, 405—07, 09, 10, 45, 55, 61, 62), Popa Georgeta (2357, 61, 74, 94, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 12, 45, 56, 61, 62), Stoenică A. Ion (2353, 56, 57, 74, 75, 77, 95, 404, 06), Urziceanu Constantin (2347—49, 56, 57, 63, 64, 67, 69, 74, 80).

CĂLĂRAŞI. Clasa 9. Alexandru Gh. Traian (2357, 60, 92, 404, 07, 10, 11, 45, 55, 56, 62), Drăgoi M. Valeriu (2320, 49, 57, 78, 80, 92, 404, 07, 10 11, 55, 62), Hoffmann P. Ioan (2357, 60, 80, 92, 404, 07, 10 11, 45, 55, 62), Negru Octavian (2347, 49, 56, 60, 63, 64, 68, 80, 92, 404, 10), Voinea I. Gheorghe (2357, 92, 404, 07, 10, 11, 45, 55, 56, 62). Clasa 10. Farmache Gheorghe (2349, 59, 60, 68, 72, 95, 404, 05, 07—10, 48, 52, 62), *Strătescu Ion* (2319, 32, 44, 46—49, 53, 54, 56, 57, 59—64, 70—72, 74, 76, 80, 82, 85, 90—400, 02, 04—17, 23, 26, 31, 35, 37—39, 44—63, P), abs. Demciuc Anatolie (2384—87, 92, 99, 400, 02, 11, 13, 18, 26, 39, 45—48, 52—54, 56—58, 62, 63, 50, 59).

CARACAL. Clasa 9. Amzu I. Dumitru (2396, 405, 07, 09, 45, 46, 48, 56, 61, 62), Leoveanu Constantin (2340, 56, 57, 63, 64, 405, 09, 10, 36, 45, 46, 48, 55, 61, 62). Clasa 10. Rădulescu N. Victor (2357, 60, 70, 72, 78, 92, 95, 97, 402, 04, 06, 08, 10).

CARANSEBEŞ. *Sgăvîrdea Dumitru* (2323, 47—49, 51, 56, 59—61, 72, 74, 77, 78, 80, 83, 86, 92, 94, 96, 400, 03, 05—07, 09—12, 15, 17, 24, 27, 39, 45—50, 59, 61—63, P).

CÎMPINA (Ploeşti). Clasa 9. Palaghiţă I. Iordache (2356, 57, 59, 60, 64, 68, 78. 79, 87, 92, 94—97, 99, 405, 07, 08, 10, 16, 24, 38, 46, 51, 55—58, 62). Clasa 10. Frăţilă Radu (2385, 92, 95, 406, 09, 10, 46, 62), Măiţă Dragoş (2392, 404—10, 44—47, 49, 55, 58).

CÎMPULUNG Moldovenesc. Clasa 10. *Tudoraş Mircea* (2395, 404—07, 09, 10, 15, 31, 38, 42, 45, 46, 48—63).

CÎMPULUNG Muscel. Clasa 8. Simionică I. Traian (E: 877—81, 83—86, 88—94, 97—900, 02,). Clasa 10. Braga Zonel (2378, 95, 400, 04, 05, 08—12, 15, 24, 45, 48—50, 52—57, 61—63), abs. Dobrinoiu I. Gheorghe (2405, 09, 10, 42, 43, 46, 48—50, 52—57, 61—63).

CLUJ. *Şcoala pedagogică nr. 2.* Anul I. Cordoş Octavian (2356, E: 874, 76, 77, 79—81, 83, 97, 98). Anul IV. *Indoleanu Ion* (2340, 49, 54, 56, 57, 60, 74, 78, 85, 94, 95, 404—13, 15, 16, E: 874—81, 83—86).

Şcoala medie nr. 4. Clasa 9. Maier Ion (2395, 404—07, 10, 11, 38, 55, 56), Severeanu Adrian (2360, 78, 407, 10, 15, 45—48, 55, 56). Clasa 10. Bîrzan Romanel (2346, 402, 27, 44—48, 55, 56, 58, 62, 63).

Şcoala medie nr. 6. Clasa 9. Neveanu Mihai (2444—46, 48, 52, 54, 55, 58, 61, 62), Zlăgnean Francisc (2444—46, 48, 52, 55, 56, 61, 62).

Şcoala medie nr. 9. Clasa 10. Pop Alexandra (2348, 57, 78, 79, 92, 404—10, 17).

CODLEA (Stalin). Abs. Puiu Liliana (2395, 400, 04—10, 45, 46, 48, 50, 55, 61—63). Prof. *Tofan Liliana* (2349, 57—59, 63, 70—72, 77, 83, 87, 92, 95, 402, 04—12, 14—17, 24, 38, 45, 48, 50, 52—57, 61—63).

CONSTANŢA. Clasa 9. Simion C. E. (2349, 57, 78, 95, 404, 10, 45, 48, 52, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Delametra Emilia (2366, 81, 98, 402, 31, 32, 34, 38, 42, 43), Diacu Pompilia (2366, 81, 98, 402, 31, 32, 34, 38, 42, 43), Giurgea C. Gabriela (2329, 34, 37, 38, 65, 66, 81, 98, 402, 32, 34, 38, 42, 43).

CORABIA. Clasa 9. Truică Marin (2359, 61, 72, 74, 91, 95, 404, 05, 07—11, 45, 56, 61—63). Abs. Băgan Mihai (2346, 49, 53, 54, 56, 57, 64, 70, 72—74, 77, 79, 80, 95). Biţică D. Virgil (2356, 57, 64, 92, 95, 405, 07, 09—11, 17, 45, 48, 54, 55, 62).

CRAIOVA. *Şcoala medie nr. 1 « N. Bălcescu ».* Clasa 9. Duţi N. Corneliu (2395, 404, 08, 10, 12, 38, 45, 46, 48, 52, 55—59, 61, 62, 64). Clasa 10. Albu C. Gheorghe (2351, 57, 73, 74, 77—79, 92, 95, 405, 07, 09), Stancu Dinu (2354, 56, 60, 70, 79, 92, 402, 54, 57, 64). *Absolvenţi:* Bratcovici Marin (2379, 404, 05, 07, 09—11, 15, 45, 46, 48, 52—54, 56, 61—63), Chitucea Mihai (2404—07, 10—13, 18, 32, 45, 46, 55—57, 61, 62), Dinuţ Tudor (2359, 60, 65, 83, 87, 91, 94, 98, 404, 07, 11, 14, 24, 26, 33, 45—47, 49, 50, 53—63), Truţă Coriolan (2382, 86, 87, 92, 95, 400—03).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. Bărboiu Mircea (2374, 79, 80, 95, 97, 405—07, 10, 45, 46, P), Staicu N. Ştefan (2354, 56, 57, 68, 72, 77, 78, 92, 407, 10, 14, 15, 17).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 10. Rădulescu Ecaterina (2392, 45, 405, 09, 10, 46, 56, 61—63).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa 9. Băcăuanu Mihai (2357, 77, 95, 405, 06, 10, 20, 38, 45, 55). Clasa 10. *Bădoiu Gheorghe* (2392, 402, 04—11, 15, 38, 44—49, 51—57, 59, 61—63), Iliescu M. Şerban (2392, 95, 406, 07, 10—12, 36, 45, 46, 48, 51, 52, 55, 62), Toteanu Tudor (2325, 405—07, 09—11, 45, 46, 48, 52, 55, 57, 61, 62).

DEJ. Clasa 10. Munteanu Augustin (2419, 27, 31, 32, 34, 38, 42, 44—46, 48, 52, 55, 56, 62, 63).

DEVA. *Şcoala medie nr. 2.* Clasa 10. Florincaş Gelu (2368, 78, 404—06, 09, 10, 44—46, 55, 61, 62), Ionescu Adrian (2402, 04, 05, 09, 10, 46, 48, 52, 55, 56, 61—63), Pîrvu Ioan (2404—06, 09, 10, 44, 46, 48, 52, 55—57, 61, 62).

FĂGET (Timişoara). Clasa 10. Antănaş Petru (2392, 98, 420, 24, 31—33, 38, 42, 48, 49, 52, 56, 58, 61—63).

FOCŞANI. *Şcoala medie « Unirea ».* Clasa 8. Rădescu Gabriela (2463, E: 874, 84, 86, 89, 90, 97, 98, 902, 04, 09). Clasa 9. Croitoru Florica (2418, 19, 21, 23, 27, 39, 42, 43, 45—49, 52—54, 56), Cruceanu Dan (N), Rădescu Eugen (2404, 13, 16, 44—48, 52, 55—58, 61—64). Clasa 10. Horovitz Iulian (2447, 48, 50, 52—58, 61—63), Munteanu Valeriu (2359, 61, 79, 87, 95, 405—07, 09—11, 14, 45, 46).

GĂEŞTI. Clasa 10. Tîrtan Gabriel (2398, 413, 42, 46, 48, 52—55, 57, 61—63, P).

GALAŢI. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 10. Caraman Gheorghe (2397, 406, 17, 38, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 61—63), Chirilă Marian (2344, 54, 61, 71, 74, 84—86, 93, 96, 412—15, 44—63), *Epureanu P. Alexandru* (2332, 56, 59, 97, 92, 95, 87, 402, 05, 07, 09—11, 14—17, 42, 44—46, 48—50, 52—57, 59, 61—63, P), Gavăţ C. Silviu (2357, 59, 60, 78, 79, 86, 97, 409, 48, 52, 59, 63), Jinescu V. Valeriu (2356, 79, 404, 06, 15, 31—33, 44, 45, 48, 49, 53, 55, 61—63, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 9. Turcu Ecaterina (2404, 05, 08—10, 45, 55, 56, 61, 62).

Şcoala medie militară de marină. Clasa 9. Boldeanu Ichim (2357, 64, 95, 404—08, 10, 11), Constantinescu Corneliu (2356, 57, 80, 95, 404—08, 10), Matea Gh. (2356, 59, 404—11), Munteanu O. Dumitru (2356, 57, 95, 404—10). Clasa 10. Hobai Marcel (2322, 56, 59, 60, 68, 405—09, 11, 14, 45, 55, 56, 61—63), Panait Gheorghe (2378, 404—11, 17), Tudorache Mihai (2346, 52, 54, 57, 61, 63, 66, 73, 84, 94, 97, 310, 62—64, 80, 94, 414, 17, 45, 55, 66), Ştir Dumitru (2357, 59, 404—07, 09—11, 14).

GHELAR (Hunedoara). Abs. *Lăscuţoiu Virgil* (2349, 56, 57, 64, 71, 80, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 14, 15, 17, 18, 45, 52—55, 57, 62, 63).

GHEORGHENI. Clasa 10. Guţă Grigore (2407, 20, 38, 45, 48, 49, 52, 55—57, 62, 63), Lupeş Gheorghe (2378, 445, 46, 48—50, 52—57, 59, 61—63).

GIURGIU. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Lăzărescu G. (2356, E: 876, 79, 80, 83, 84, 89, 91, 93, 94). Clasa 9. Caraconcea Emanoil (2357, 63, 67, 68, 78, 92, 95, 403—10, 45, 47, 48, 52), *Profirescu D. Marcel* (2304, 10, 11, 49, 56, 57, 59, 60, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 95, 98, 404—06, 80—10, 12, 32, 34, 38, 46, 55, 56, 61). Clasa 10. *Mîrlogeanu Florea* (2357, 59, 63, 74, 78, 86, 92, 94, 95, 98, 404—10, 38, 45—48, 52, 55—57, 59, 61—63), Stoichiţa Vasile (2353, 57, 78, 92, 95, 400, 04, 06—11, 14, 15).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. *Tuicu Valeria* (2349, 54, 56—58, 72, 74, 78—80, 92, 94, 95, 400, 02, 04—11, 13—15, 17, 38, 42, 44—46, 48—50, 53, 55, 57, 63, P). Abs. *Ciobanu N. Marin* (2386, 95, 404, 05, 07—10, 14—20, 26, 31—33, 38, 39, 44—46, 48—50, 52—64, P).

HOREZU (Vîlcea). Clasa 9. Mateescu Gh. (2392, 404—10, 45, 56, 61, 62), Popa Elena (2404, 05, 07—10, 55, 56, 61, 62), Rădulescu L. Ion (2404—11, 45, 55, 57, 62, 63), Voinescu N. Emilian (2404—10, 45, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Olaru I. Iosif (2363, 78, 404—07, 09, 10, 48, 52, 55, 62), Rădescu N. Nicolae (2363, 68, 412, 15, 45, 48, 50, 52, 55, 56, 61—63).

HUNEDOARA. *Şcoala tehnică de maiştri*, anul II. Crăciun Iacob (2385, 95, 404—11, 14, 16). Abs. Toma Dumitru (2372, 404, 05, 14, 48, 49, 52—57, 61, 62).

HUŞI. Abs. Dolteanu Temistocle (2404—10, 12, 15, 45, 46, 48—50, 52—56, 59, 61—63).

IANCA (Galaţi). Clasa 10. *Bănică Radu* (2346, 47, 49, 52, 75—77, 80, 84, 85, 94, 96, 98, 402, 13, 14, 16, 24, 42, 44—64), *Caracoti Stere* (2347, 49, 80, 84, 85, 94, 96, 97, 400, 02, 12—14, 17, 24, 38, 44—63).

IAŞI. *Şcoala medie nr. 1 « M. Sadoveanu ».* Clasa 10. Cuşmaru Ilie (2346, 47, 51, 61, 62, 77, 80, 94, 96, 97, 400, 01, 26, 45, 46, 48, 50, 55, 56—58, 62), Grişaru Iancu (2344, 94—97 400, 06, 07, 10, 11, 55), Şor Liber (2346—48, 51, 61, 62, 77, 79, 80, 94, 96, 400, 01, 03, 06, 15, 46, 55, 57).

Şcoala medie nr. 3 « C. Negruzzi ». Clasa 8. Homutescu Virgil (2456, E: 855, 86, 88—90, 93, 97, 98, 905, 08, 09). Clasa 9. Nanu Gh. Oct. (2372, 77, 80, 86, 87, 400, 03, 46, 55—57). Clasa 10. Ţibuleac Florin (2367, 86, 92, 94, 95, 402, 04—12). Abs. Simion Ispas (2123, 25, 35, 52, 54, 59, 405—07, 09, 11, 45, 48, 56, 61, 63, P).

LUGOJ. *Şcoala de 7 ani nr. 4.* Clasa 7. Sarmeş Dan (E: 874—76, 78—80, 83, 84, 88, 91, 93, 98), abs. Nemeş Alexandru (2349, 60, 64, 78, 95, 98, 404—10, 14, 15, P)

MEDIAŞ. Marcovici Anton (2349, 56, 57, 59, 60, 68, 71, 72, 78—80, 90, 92, 94, 95, 99, 404, 05, 07—09, 15, 17).

ORADEA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Baciu Ioan (2392, 94, 95, 404, 05, 07—11, 56, 61, 62), Carţiş Dan (2357, 74, 92, 95, 99, 404, 05, 09, 10, 47, 62), Pop Cornel (2356,

57, 82, 85, 92, 99, 404, 05, 08—10), Schiop Alexandru (2357, 85, 92, 94, 95, 98, 99, 404—07, 09, 10, 24, 38, 45—47, 51, 55—57, 61, 62), Sîrbu Pavel (2385, 92, 95, 405, 09, 10, 45, 47, 55, 56, 62). Clasa 10. Alămoreanu Mircea (2357, 78, 92, 95, 404—11, 14, 30, 31, 38, 42, 44—47, 49, 53—58, 61—64), Avram Vasile (2392, 94, 95, 404, 05, 07, 09—11, 31, 38, 45, 46, 48, 49, 53, 55—57, 61—64), Held Petru (2354, 59, 72, 79, 80, 92, 95, 400, 02, 04—11, 14, 15, 17), Patcaş Ioan (2354, 57, 64, 79, 92, 95, 404, 05, 07, 09—11, 14). Abs. Ardeleanu Remus (2378, 92, 94, 95, 405—07, 09—11, 38, 45, 46, 48—50, 52—58, 63), Barbur Ioan (2446, 48, 52, 55—58, 61—63).

ORAŞUL STALIN. Student Ciobanu I. Ioan (2349, 56, 70—72, 77—80, 86, 87, 90, 95, 402, 04—06, 08—10, 18, 33, 34, 38, 45, 61—63).

Şcoala medie nr. 4. Clasa 10. Istok Albert (2392, 94, 95, 97, 402, 05—07, 09—11, 14, 17).

PĂTÎRLAGELE (Ploeşti). Clasa 10. Cîrstei Elena (2357, 98, 405—10, 48, 55, 62, 63).

PETROŞANI (Hunedoara). Clasa 8. Lepădatu C. Ilie (E: 864, 65, 71, 74, 76, 79, 80, 84, 88, 93, 98). Clasa 9. Bergthaler Cristian (2384, 90—92, 94—96, 400, 04—11, 13, 16). Stud. Savin Dan (2357, 59, 60, 70, 72, 78, 95, 406, 31, 32, 36, 38, 44, 45, 48, 52, 54—57, 60—64).

PIATRA NEAMŢ. Abs. Trestian Eva (2378, 79, 92, 95, 405—07, 09—11).

PIATRA OLT (Slatina). Clasa 7. Florea Doina (2356, 408, E: 874, 76—81, 83, 84, 86).

PITEŞTI. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Bîcă I. Constantin (2349, 61, 63, 94, 405, 11, 45—47, 55, 56, 58, 62). Clasa 10. Dumitrache Gr. Ion (2349, 52, 56, 57, 60, 63, 64, 70, 72, 73, 78, 79, 92, 97, 401, 04—12, 17), *Olteanu D. Constantin* (2344, 49—52, 54, 56, 57, 59, 60, 63—65, 70—73, 75, 77—80, 92, 95—97, 401, 04—17, P).

PLOEŞTI. *Şcoala de 7 ani nr. 14.* Clasa 7. Gheorghiu A. Nicolae (E: 863, 67, 70, 71, 73, 75, 77, 78, 81, 89).

Şcoala medie nr. 1 «I. L. Caragiale». Clasa 8. Fezi Adrian (2348, 56, 60, 80, 404, 55, 56, E: 875, 76, 86, 90, 93, 94, 98, 909), Nicolae Viorel (2347—49, 56, 59, 63, 404—06, 09, E: 863—81, 84—85, 88—94, 98), *Nicolescu A. Basarab* (2347—49, 56, 57, 59, 84, 87, 92, 400, 05, 09, 38, 55, 56, E: 874—81, 83, 84, 86, 88—90, 93, 94, 98, 903, 09, 11, 14, 15, 18), Radu Ioana (2405, 06, 09—10, E: 886, 88—90, 98). Clasa 9. Constantinopol Alexandru (2316, 22, 49, 57, 58, 60, 70, 74, 80, 92, 94, 95, 404—10, 15), Dabija Bogdan (2357, 60, 63, 92, 405, 06, 09, 10, 45, 61, 63), Ianovitz Rudorf (2317, 35, 40, 47, 48, 56, 57, 59, 60, 69, 77—79, 84, 90, 92, 95, 404—11, 15), Năstase Victorian (2372, 78, 92, 95, 400, 05—07, 10, 15), Tănăsescu Anton (2410, 49, 53, 55—57, 61—63), Ţaga S. Mihail (2387, 92, 95, 404—11, 15). Clasa 10. *Apostoleanu Mihail* (2349, 53, 57, 72, 78—80, 92, 95, 404—07, 09—11, 15, 45, 46, 48, 49, 52—57, 61—63, P), *Baltag Vasile* (2386, 418, 21, 24—31, 33—35, 37, 39, 40, 42—63, P), Bogdan A. Ioan (2404—11, 45, 46), Boiangiu Nicolae (2349, 56, 57, 59, 60, 72, 78, 95, 404—11, 15), *Căsăndroiu C. Tudor* (2349, 54, 56, 57, 61, 72, 74, 78—80, 87, 92, 94—97, 400, 02, 04—10, 14, 15, 17, 37, 39, 42, 44—49, 51, 52, 55—58, 61—63), *Delibas Constantin* (2382, 89, 91, 423, 24—27, 30—32, 35, 37—39, 42, 44—64), Drosu Cristian (2372, 78, 80, 92, 95, 96, 400, 06, 07, 10, 15), Ilie Nicolae (2357, 78, 95, 404—10, 12, 15, 17), Nicolescu Mihai (2368, 77, 78, 83, 403—05, 08, 09, 15), Panaitescu M. Gheorghe (2317, 49, 53, 57, 59, 60, 64, 70, 72, 78, 80, 82, 93, 95, 400, 04—12, 15, 17), Pînţă A. Titua (2370, 72, 77, 80, 92, 95, 96, 400, 04—11, 46, 47, 55—57, 62, 63), Sterea I. Constantin (2378, 405, 09, 45, 54—56, 58, 61—63), Tomulescu Gr. Petre (2372, 78, 92, 95, 402, 04—11, 37, 39, 45, 46, 48, 51, 52, 55—58).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 9. Dragomirescu Mariana (2395, 404, 09, 10, 14, 17, 45, 48, 49, 54—56, 62), Jurcă Anca (2357, 64, 95, 405, 09, 10, 32, 38, 45, 55, 56).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 9. Caliniac M. Nicolae (2398, 404—06, 09, 10, 33, 34, 38, 46, 55, 56, 61). Clasa 10. Marin Maria (2404—07, 09, 10, 46, 47, 52—57, 61, 63).

Şcoala medie nr. 4. Clasa 9. Negru Vasile (2357, 60, 63, 92, 405, 06, 09, 10, 45, 61). Abs. Curelea D. Iulian (2344, 49, 59, 72, 76, 92, 95, 404—14, 16, 17). Tehnician. Bunea Mircea (2357, 72, 78, 95, 405—07, 09, 45, 48).

PREDEAL. Clasa 9. Olteanu I. Ilie (2395, 404, 05, 07, 09, 10, 45, 48, 55, 61, 62).

PUCIOASA. Clasa 9. Dumitru Gh. Petre (2357, 70, 72, 95, 405, 07, 09, 10, 15, 17). Abs. *Stan N. Dumitru* (2316, 19, 21—23, 26, 32, 33, 36, 38—40, 47—49, 54, 56, 57, 59—62, 70—74, 76—79, 404—11, 13—15).

REGHIN. Abs. Frîncu M. Liviu (2349, 56, 95, 4004—09).

REŞIŢA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Perianu Dan (2349, 56, 92, 95, 404, 05, 08, 09, E: 874, 76, 79—81, 83, 84, 86, 90, 94). Clasa 10. Străinescu Ion (2392, 94, 95, 98, 401, 02, 04—07, 09—11, 14, 17), Tat Mircea (2359, 63, 64, 74, 80, 92, 94—96, 98, 401, 02, 04—07, 09—11, 14, 17).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa 7. Bulucea Dumitru (2405, 09, E: 884, 86, 90, 93, 94, 900, 01, 02, 09). Clasa 10. *Ancuţoiu Gh. Ioan* (2423, 24, 26—28, 30—32, 34, 37—39, 41, 42, 44—64, P), Bălănescu V. Emilian (2348, 63, 78, 84, 92, 402, 04, 06—11, 15, 44, 46, 48, 49, 52, 55, 56, 61—63), Enescu I. Vasile (2404—06, 09, 46, 48—50, 53, 55, 59, 61—63), Fărtat Ion (2442, 44, 46, 48, 49, 51, 53, 55, 57, 58, 62), Georgescu Nicolae (2404, 05, 09, 10, 44—46, 48, 49, 52, 53, 55—57, 61—63), Ghibea Alexandru (2368, 78, 84, 92, 94, 98, 400, 04, 05, 08—10), *Piţigoi I. Gheorghe* (2351, 56, 57, 59—61, 64, 70, 74, 78—80, 94, 95, 405, 07, 09, 10, 15, 24, 31, 43, 45, 46, 48, 50, 52, 55—57, 51, 63), Smadea Dumitru (2345, 55—57, 60, 63, 77, 79, 95, 405—07, 09—11), Urea I. Ion (2379, 94, 95, 400, 04—11, 15, 17, 37, 42, 45, 48, 50, 52—56, 59, 61—63), Vlăşceanu Gh. (2319, 49, 56, 57, 63, 77, 79, 95, 400, 06, 10).

ROMAN. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Ilioi C. Constantin (2370, 72, 92, 95, 405—07, 09, 10, 19, 20, 38, 44—47, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Spinei Fănică (2353, 56, 57, 59, 60, 73, 78—80, 92, 95, 97, 407, 10, 48, 61).

Şcoala tehnică de maiştri. Anul II. Vasia Niculăiasa (2405, 09—11, 14, 17, 39, 48, 54, 56, 62, 79).

SATU MARE (Baia mare). Lupuţiu Gheorghe (2356, 60, 78, 404, 05, 07—10, 45, 47, 55—58, 61, 63).

SIBIU. *Şcoala militară de artilerie. Pupăzan V. Nicolae* (2383—87, 90, 92, 94—97, 99—401, 04—17, 44—63, P). Abs. Tulai Gh. (2349, 52, 53, 68, 78, 80, 438, 52, 55, 62).

SIGHET. Clasa 8. Tomoiagă M. Dorin (2368, E: 887, 89—91, 93—97, P).

SIGHIŞOARA. *Şcoala medie germană.* Clasa 10. Gingner Harold (2409, 10, 15, 48—50, 52, 53, 55—57), Homm Alfred (2405, 06, 09, 10, 15, 48, 50, 52, 53, 55, 56), Honigberger Helga (2360, 78, 95, 404—07, 09, 10, 48, 52, 55, 59, 62), Roth Harold (2360, 73, 78, 80, 95, 406, 08—10, 12, 14, 15, 48, 49, 52, 56), Theil Hermann (2360, 78, 404, 05, 07—10, 12, 14, 15, 46, 49, 52, 59).

SÎNICOLAUL MARE (Timişoara). Clasa 9. Peternell Oskar (2405, 06, 09, 11, 38, 45, 55—57, 61—63).

SLATINA. Clasa 10. Cincă F. Ion (2360, 78, 92, 405—07, 09, 10, 38, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 62), Florea Dorel (2349, 53, 60, 64, 71, 72, 92, 97, 98, 400, 08, 14, 17, 62), Osiceanu Dan (2360, 78, 79, 86, 92, 95, 400, 04—07, 09—11, 15, 17), Stănculeţ Ion (2392, 405—07, 09, 10, 38, 48, 52, 55, 62). Absolvenţii: Bărbulescu Marcel (2423, 35, 39, 47, 51, 55—58, 61, 62, P), Dorobanţu Valeriu (2418, 26, 38, 43—46, 48, 50, 52—54, 56—63, P)

SUCEAVA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 10. Ticu Constantin (2395, 404, 05, 07—0 12, 14, 17, 45, 48, 50, 52, 55, 56, 61—63), abs. Curcă I. Dumitru (2394, 95, 400, 05, 06, 09—11, 38, 45, 48, 52, 58, 62).

Şcoala de 7 ani Vădeni. Clasa 7. Grosu C. Virgil (E: 875—80, 83, 84, 86, 89).

TECUCI. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Costea Marin (2455, E: 871, 73, 75, 86—88, 90, 93, 94, 97, 99, 900, 02), Dorin Stela (E: 874, 76—81, 83, 84, 86, 87, 89, 91, 93, 94 97—99), Tămăşanu Maria (2392, 405, 08, 09, 55, 61, 62, E: 893, 94, 909). Clasa 9. Popa Maria (2357, 404 05, 08—10, 55, 56, 61, E: 886), Sulugiuc M. Silvia (2356, 85, 89, 92, 400, 04, 08, 10, 25, 35, 40, 47, 55, 56, 63, E: 876, 80, 93, 94, 909).

TIMIŞOARA. Stud. *Nerodea Tiberiu* (Fac. electrotehnică) (2354—60, 63, 72, 77—79 404, 05, 07—10, 15, 46, 48—50, 52—59, 61—63).

Şcoala medie nr. 1. Clasa 7. Marghiţiu Nicolae (E: 764, 67, 69, 70, 75, 76, 79, 80, 84, 89), Mîrzea Petru (E: 867, 69, 70, 74—76, 79, 80, 84, 89). Clasa 8. Bernath Walter (2392, 400, 02, 05), E: 886, 87, 89, 93, 94, 97, 98), Cioca Radu (2349, E: 863, 65, 69, 72, 75, 76, 79, 80, 83). Clasa 9. Ionescu Alexandru (2349, 53, 57, 60, 63, 80, 92, 94, 95, 405—07, 09—11), Marina Marius (2349, 56, 57, 80, 92, 95, 404—07, 09), Stoicoiu Dumitru (2349, 56, 57, 59, 63, 92, 95, 404—10), Toma Corneliu (2348, 49, 87, 92, 94, 95, 404—11), Triponescu Iuliu (2392, 95, 404—07, 09—11, 45, 46, 50, 55, 56, 61), Vlădea Radu (2357, 63, 64, 80, 95, 98, 404—16).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 10. Cojocaru Elma (2395, 97, 405, 07, 09, 10, 45, 46, 48, 49, 53, 55—58, 61), Muţaina Doina (2392, 95, 404, 05, 07—11, 17).

Şcoala medie nr. 5. Clasa 10. Suba Teofil (2357, 75, 77, 78, 404, 05, 08, 09, 50, 55, 56, 62, 63).

Centrul şcolar silvic anul II. Firescu Floare (2392, 94), Găluţ Elma (2392, 94), Ursuţ Dumitru (2392, 94).

TÎRGOVIŞTE. Clasa 9. Popescu Mircea (2305, 57, 59, 63, 64, 92, 404, 05, 07, 09—11, 27, 45, 46, 55, 56, 58, 62).

TÎRGU MUREŞ. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Boeru Adrian (2335, 44, 46, 47, 49, 52, 56, 59, 60, 61, 63, 72, 77, 80), Curtifan Petru (2346, 48, 49, 53, 56, 57, 59—64, 72, 74, 77—80), Fleşeriu Călin (2346—49, 53, 56, 57, 59, 61—64, 68, 72, 74, 77—80), Gher-

măuleţ Octavian (2346—49, 53, 56, 57, 61—64, 72, 74, 77, 78, 80), Motronea Valeriu (2346, 49, 53, 56, 57, 59, 63, 74, 78—80).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 9. *Matei Didina* (2356, 57, 59, 60, 63, 79, 91, 92, 95, 98, 403—11, 26, 27, 30, 45—48, 50, 52, 55—59, 61, 62), Nichescu Elena (2356, 57, 60 78, 79, 95, 404—10, 48, 52, 55, 56), *abs. Matei V. Aurel* (2356, 57, 59, 60, 62, 63, 70—75, 78—80, 84—87, 90—92, 94—410, 12—17).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa 10. Plăcintă Constantin (2432, 42, 45, 48—50, 52—57, 59, 61—63), Stîngu Nicolae (2356, 59, 64, 78, 92, 410, 48, 55, 57, 59, 62), *abs.* Răileanu Mihai (2357, 73, 95, 404—06, 08—10, 14, 17).

TÎRGU OCNA. *Abs.* Mironescu Dan (4357, 64, 70, 95, 405—07, 09, 10, 38, 45, 48, 50, 52—54, 56, 57, 61, 62).

TÎRNĂVENI. *Abs.* Neamţu Ioan (2381, 95, 402, 04—06, 07, 08—12, 14, 16).

TURNU SEVERIN. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Suici Gheorghe (2420, 37, 38, 44—48, 55, 56, 58, 61, 62, 64). Clasa 10. Caragioiu Mircea (2349, 56, 71, 72, 92, 97, 404, 06, 08, 14, 15, 17), Rusu Constantin (2362, 71, 72, 97, 408, 11, 17, 45, 55, 56, 61, 62), Taboi I. Dragoş (2444—59, 62), *abs.* Petre I. Titus (2356, 57, 59, 80, 95, 404—07, 10, 11, 14).

URECHEŞTI (Focşani). *Şcoala de 7 ani.* Marinoiu Adrian (E: 864, 67, 68, 71, 74, 76, 79, 80, 84, 98).

URLAŢI (Ploeşti). Clasa 10. Iancu V. Vasile (2316, 53, 56, 57, 59, 60, 78, 95, 405—07, 09—11, 15, 46, 49, 57, 62), Vasilescu Sorin (2405, 09, 10, 15, 48—50, 52, 55, 57, 61—63).

ZALĂU. Clasa 10. Andruşcenco Paul (2353, 57, 59, 64, 95, 405, 06, 09—11), Maroti Cornel (2353, 57, 59, 71, 72, 95, 402, 04—06, 08—11).

Mulţi elevi trimit probleme propuse cunoscute şi astfel riscă să nu li se mai ia în seamă problemele ce vor mai trimite.

Reamintim că problemele rezolvate identic, unele chiar cu greşeli comune, trimise de unii corespondenţi, nu vor fi luate în seamă, fiind un exemplu negativ.

— La problemele propuse (2633 — 2685) se primesc soluţii pînă la 15 septembrie 1957.

— La exerciţiile şi problemele E: 962 — E: 973 se primesc soluţii numai dela elevii claselor V—VIII inclusiv, dela şcolile pedagogice şi profesionale, pînă la 15 septembrie 1957.

Országos Műszaki Könyvtár

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a și a *X*-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună probleme numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au *dat generalizări* și observații interesante sub formă de *note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor *extrașcolare* la matematică și la fizică, asupra *cercurilor de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei *se vor face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. M. RCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROBIEV	**Numerele lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.**
22. NICOLAE STĂNESCU	**Electronul.**
23. V. SERGIESCU	**Introducere la fizica solidului.**
24. G. N. BERMAN	**Cicloida.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**
26. AL. SANIELEVICI	**Introducere în radioactivitate.**

ABONAMENTUL LA G.M.F.-B PE ANUL 1957, ESTE DE LEI 10
(12 NUMERE)

C. 415. — Întreprinderea Poligrafică nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E. 1426
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII — Iunie 1957

6

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, Nr. 6—Iunie 1957

SUMARUL

		Pag.
1.	*Pentru interzicerea experienţelor cu arma atomică şi cu hidrogen*	281
2.	*«Olimpiada de matematică şi fizică 1957»*	282
3.	*Asupra rezolvării ecuaţiilor algebrice iraţionale de* G. G. Constantinescu	289
4.	*Dispozitiv pentru termostatare la o temperatură superioară temperaturii mediului ambiant de* V. Pavlu	301
5.	*Caleidoscopul fizic de* I. Stănescu	304
6.	*Cîteva probleme distractive de* E. Kiss	307
7.	*Note matematice de* N. Teodorescu, *elev;* Fl. Constantinescu *şi* Gh. Bercea, *studenţi*	310
8.	*Noutăţi din ştiinţă şi tehnică*	313
9.	*Institutul pedagogic din Timişoara de* C. Popa	316
10.	*Profesorul Nicolae Ciorănescu de* M. Roşculeţ	319
11.	*Probleme rezolvate (1400; 1602; 1924; 1927)*	320
12.	*Probleme propuse (chestiuni de examen 2686—2704)*	323
13.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 947—E:983)*	327
14.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	329

Anul VI 6 Iunie

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; Boaiangiu A., asistentă univ.; Ionescu Bujor C., prof. univ.; Ionescu-Ţiu C., profesor, redactor pentru matematică; Muşat I., profesor; Negulescu A., profesoară; Petrovan A., profesor; Rădulescu N., profesor; Sacter O., conf. univ. redactor responsabil; Simionescu D, Gh. conf. univ.

REDACŢIA; Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenzii, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia G.M.F.-B se vor trimite pe adresa de mai sus

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VIII, Nr. 6 iunie 1957

Országos Mészáros Könyvtár TULAJDONA

PENTRU INTERZICEREA EXPERIENŢELOR CU ARMA ATOMICĂ ŞI CU HIDROGEN

PERICOLULUI declanşării unui nou război mondial i se adaugă în prezent, primejdia pe care o creează experienţele cu arma atomică şi cu hidrogen.

La 15 mai, în largul Oceanului Pacific, pe insula Christmas, s-a produs prima explozie dintr-o serie de explozii experimentale organizate de guvernul englez cu arma termonucleară. În acelaşi timp autorităţile americane au programat o nouă serie de experienţe cu arme nucleare în deşertul Nevada din Statele-Unite.

Popoarele lumii, tot mai conştiente de primejdia pe care o reprezintă de pe acum experienţele atomice, suportă cu cea mai vie indignare această situaţie. Trebuie determinată încetarea exploziilor atomice experimentale, deoarece ele nu vor putea fi repetate încă mult timp, fără a pune în primejdie întreaga omenire.

Profesorul Joliot-Curie arată în prefaţa lucrării « Riscuri necalculate » — editată de Federaţia Mondială a Oamenilor de Ştiinţă — că « dacă exploziile experimentale continuă, fie numai în ritmul actual este cert şi inevitabil ca unele efecte să se resimtă mai tîrziu. Acumularea radioactivităţii în praf şi în apa de ploaie expune pe oameni la grave efecte genetice, ca rezultat al acţiunii prelungite a dozelor de radiaţii care depăşesc nivelul obişnuit. În stadiul actual al cunoştinţelor noastre există încă multe întrebări fără răspuns: care este doza de radiaţii remanente în atmosferă şi pe pămînt după aceste explozii experimentale? care este relaţia cantitativă dintre doza de iradiere şi cuantumul « mutaţiilor »[1]) genetice? A continua exploziile nucleare experimentale atîta timp cît cunoştinţele noastre în legătură cu ele nu sînt încă suficient de precise şi cînd oamenii nu pot garanta că ele nu vor fi grave, înseamnă a-ţi asuma o răspundere deosebit de mare. Dimpotrivă, totul ne face să credem (în deosebi recentele publicaţii asupra « stronţiului 90 »), că sîntem mai apropiaţi decît credem de numărul limită al exploziilor experimentale dincolo de care primejdia ar fi vădită ».

Dacă în privinţa stabilirii exacte a dozei de radiaţii vătămătoare mai există unele divergenţe, în schimb toţi oamenii de ştiinţă sînt de acord cu faptul că radiaţiile sînt dăunătoare şi că fiecare nouă explozie a bombei atomice sau cu hidrogen sporeşte contaminarea atmosferei cu substanţe radioactive. Revista americană «The Reporter» dă cazuri concrete asupra unor prejudicii serioase aduse unei părţi din populaţia S.U.A., în urma experienţelor cu arma nucleară efectuate în pustiurile din Nevada. Se citează astfel cazuri de înbolnăvire de leucemie, cancer, căderea părului, moartea a mii de oi etc.

---

[1] **Transformări ale proprietăţilor ereditare ale cromozomilor.**

A trecut mai bine de un deceniu de la prima sesiune a O.N.U., la care Uniunea Sovietică a propus reducerea generală a înarmărilor, interzicerea fabricării și folosirii armei atomice și un program adecuat în această direcție. De atunci și pînă astăzi guvernul sovietic a luat de nenumărate ori inițiativa unei reglementări a acestei probleme. De fiecare dată însă propunerile guvernului sovietic s-au lovit de zidul neînțelegerii puterilor occidentale.

Apelurile Consiliului Mondial al Păcii și Federației Democrate Internaționale a femeilor, din luna aprilie a acestui an, au atras din nou atenția opiniei publice mondiale asupra pericolului pe care-l prezintă intensificarea cursei înarmărilor și a experiențelor cu arme atomice și cu hidrogen, asupra suferințelor îngrozitoare și a dezastrului pe care l-ar aduce omenirii dezlănțuirea unui război. Este cert că orice război atomic, oriunde ar izbucni, se va transforma în mod obligatoriu într-un război atomic general, cu consecințe grave pentru întreaga omenire.

În ultimul timp au protestat cu hotărîre împotriva pregătirii războiului atomic importante partide politice, organizații de masă, oameni politici de vază, savanți cunoscuți în lumea întreagă. Astfel, 25 savanți japonezi au declarat că nu vor participa la cercetările în domeniul producției și folosirii armei atomice. Concomitent cu această declarație savanții-fizicieni japonezi și-au exprimat hotărîrea de a lupta energic pentru încetarea experiențelor cu arma nucleară.

Un număr de 18 savanți-fizicieni din Republica Federală Germană printre care Otto Hahn, F. Strassmann, W. Heisenberg și alții, s-au pronunțat împotriva înarmării atomice a Bundeswehr-ului. Ei declară categoric: « În orice caz nimeni dintre cei care semnează mai jos nu intenționează să participe la fabricarea, experimentarea sau folosirea armei atomice ».

Popoarele lumii cer imperios suspendarea imediată a experiențelor atomice, interzicerea înarmării și stocării de armament nuclear pe teritorul R. F. G., interzicerea creerii de către S.U.A. a unor baze militare pentru proectilele atomice teleghidate în Coreea de sud, în Iordania, în insula japoneză Okinawa sau în alte părți ale lumii.

Poporul nostru în mitinguri de masă, a protestat cu energie împotriva experimentării armei atomice și cu hidrogen.

Integrîndu-ne cu toată convingerea în lupta pentru pace cerem și noi interzicerea experiențelor cu arme nucleare și folosirea energiei nucleare numai în scopuri pașnice. Totodată protestăm cu tărie împotriva înarmării de către S.U.A. a militariștilor vest-germani cu armament atomic.

«OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1957»

CEA de-a VIII-a olimpiadă organizată de Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. (al 45-lea concurs anual de specialitate, luînd în considerare şi cele organizate de vechea « Gazeta matematică ») s-a încheiat de curînd.

Aspecte organizatorice. În ultimii trei ani s-a păstrat o aceiaşi formă organizatorică; etapa pe şcoală (în răstimpul a trei săptămîni pînă la mijlocul lunei decembrie), etapa locală (în două duminici în a doua jumătate a lunii februarie), etapa regională (la începutul lunei aprilie), etapa finală (la începutul lunei mai).

Din experienţa anilor precedenţi şi a olimpiadei din acest an se desprinde însă că olimpiadei şcolii i se acordă o atenţie redusă, dacă nu chiar formală;

ea se desfăşoară sub forma unei lucrări scrise obişnuite, ceea ce nu poate avea un efect prea mobilizator.

Etapa locală (17.II. la matematică şi 24.II. la fizică) se bucură în fiecare an de o participare largă. Numărul elevilor ce iau parte, al localităţilor unde ea se desfăşoară este în continuă creştere (peste 13.300 elevi din 154 localităţi la matematică şi peste 8.500 elevi din 139 localităţi la fizică în 1957 faţă de 10.800 elevi din 140 localităţi, respectiv 5.800 elevi din 128 localităţi, în 1956).

Cuprinderea aceasta largă a elevilor la olimpiade (aproape 22.000 în acest an, cu o creştere de peste 31% faţă de anul precedent) se datoreşte mai multor cauze. În primul rînd este acţiunea de stimulare a studiului matematicii şi fizicii pe care Directivele Congresului al II-lea al PMR a dezvoltat-o, lărgirea reţelei de şcoli medii, antrenarea mai largă a elevilor şcolilor profesionale (de exemplu, din regiunea Ploeşti au participat 95 elevi din 14 şcoli, în oraşul Craiova 59 elevi) şi tehnice de maiştri (de exemplu, 35 din 4 şcoli ale regiunii Ploeşti şi 41 din oraşul Craiova.

Faptul că această etapă s-a desfăşurat în 14 localităţi ale regiunii Stalin, 13 localităţi ale regiunilor Bucureşti, Galaţi, Ploeşti, 12 localităţi ale regiunii Cluj, 11 localităţi ale regiunii Hunedoara şi 9 ale regiunii Autonome Maghiare, indică interesul manifestat de elevi şi profesori şi efortul organizatoric al filialelor SSMF. Conducerile şi profesorii multor şcoli profesionale şi-au manifestat un viu interes faţă de actuala ediţie a olimpiadelor. Acole unde filialele SSMF nu au reuşit să-şi asigure sprijinul profesorilor şi al organelor de învăţămînt au fost deficienţe în mobilizarea şcolilor noi de cultură generală (de exemplu, Moineşti şi Zeletin — regiunea Bacău; Truşeşti, Vatra Dornei — regiunea Suceava; Hîrlău — regiunea Iaşi; Feteşti — regiunea Constanţa; Breaza — regiunea Ploeşti; Inău, Salonta — regiunea Oradea; Negreşti, Vişău — reg. Baia Mare, etc.) sau al şcolilor profesionale (regiunile Timişoara, Iaşi, Autonomă Maghiară). Dar au fost şi şcoli vechi care au avut o participare slabă (de exemplu, s.m.1 sau 3 Brăila, faţă de s.m.2; s.m.2,3 şi 4 Ploeşti la un loc au avut mai puţini elevi decît s.m.1; şcolile din Arad au dat un număr mult mai mare de candidaţi decît cele din Timişoara — reşedinţa regiunii).

La etapa regională (30 martie — 1 aprilie) au participat 1703 elevi la matematică şi 1175 la fizică, din 143, respectiv 123 centre ale etapei locale. Aceasta reprezintă o reducere de circa 13% faţă de 1956, ceea ce se explică pe de-o parte prin nivelul relativ mai scăzut al rezultatelor la etapa locală cît şi prin aceea că 2/3 din participanţii la etapa regională se deplasează pe contul bugetului public, spre deosebire de anii 1955 şi anteriori, cînd o bună parte dintre aceştia o făceau pe baza mijloacelor locale.

La această etapă au participat în toate centrele, delegaţi ai Consiliului SSMF, asigurînd aplicarea aceloraşi instrucţiuni. Programul desfăşurîndu-se pe două zile, în afară de Deva şi Oraşul Stalin, în multe regiuni s-a putut desfăşura un program educativ cultural, tezele s-au putut corecta în mai bune condiţiuni, distribuirea premiilor s-a făcut într-un cadru festiv. Au fost evidenţiaţi cu această ocazie, 233 elevi din 62 localităţi la matematică şi 356 elevi din 75 localităţi la fizică şi li s-au distribuit premii în cărţi.

Secţiile de învăţămînt, conform sarcinilor ce le aveau, au asigurat fondurile necesare transportului, masei şi premiilor. Cazarea s-a făcut în general la internate. Filialele regionale ale SSMF şi Secţiile de învăţămînt ale regiunilor Ploeşti, Bucureşti, Autonomă Maghiară, Constanţa au purtat o grijă deosebită satisfacerii acestor nevoi şi în general, organizării olimpiadelor. Filialele SSMF

din Deva, Timişoara, Galaţi nu au reuşit să-şi asigure concursul necesar al Sfaturilor Populare respective, aşa că au existat defecţiuni la asigurarea mesei, a transportului sau a cazării. Sprijin au acordat şi Facultăţile de matematică şi fizică din Bucureşti, Iaşi, Cluj (sălile pentru concurs, cadre didactice, premii).

La etapa finală (3—5) mai au fost admişi 140 elevi la matematică şi 152 la fizică. Au absentat însă 12 elevi, aşa că totalul participanţilor a fost de 280 din 62 localităţi. În urma lucrărilor scrise eliminatorii, au fost admişi 63 elevi la examenul oral la matematică şi 61 la lucrările practice de fizică.

Comisiile de matematică au fost alcătuite astfel: pentru clasa VIII-a şi şcoli tehnice de maiştri: C. Ionescu-Ţiu, Marta Marini, Marieta Dinescu; pentru clasa IX-a şi şcoli pedagogice: N. Mihăileanu (Timişoara) Gh. Bazacov (Turnu Severin), Eugenia Badea, E. Mereuţă, Elena Nicolaescu; pentru clasa X-a: Gh. D. Simionescu, C. Georgescu (Craiova), Ion. Grigore (Ploeşti); pentru şcolile profesionale: Olimpia Gheorghiu, A. Buduroiu (Cluj).

Comisiile de fizică au lucrat: pentru clasa VIII-a la şcoala medie nr. 1 « Nicolae Bălcescu »; pentru clasa IX-a la şcoala medie nr. 17, iar pentru clasa X-a la şcoala medie nr. 15 şi au fost formate din: Georgeta Pop, Olimpia Bînă, Margareta Busnea, Margareta Ailincăi, Corneliu Rusescu (Focşani), Coriolan Rusu (Oradea), Nicolae Stănescu, Angela Negulescu, Carol Bucovski (Sighişoara), Dumitru Potoceanu (Vaslui), Pamfil Simion, Voichiţa Dragu (Constanţa) Tîrnăveanu, Romulus (Tîrgu Mureş), Constantin Nicolescu (Ploeşti), Constantin Popescu (Turnu Măgurele).

În sala festivă a şcolii medii nr. 22 « Gh. Lazăr » a avut loc adunarea festivă de încheere a olimpiadei şi sesiunii ştiinţifice.

Acad. Grigore C. Moisil a felicitat pe premiaţi şi profesorii lor şi a făcut un larg expozeu asupra importanţei matematicii şi a maşinilor electronice de calcul pentru dezvoltarea tehnicei moderne. Tovarăşa Nina Telescu a adus salutul CC al UTM şi a arătat importanţa muncii pe care o desfăşoară elevii pe băncile şcolii şi în activitatea extraşcolară pentru pregătirea lor ca viitori constructori ai socialismului. Elevul Panaitopol Laurenţiu (Giurgiu), în numele premianţilor şi participanţilor la olimpiade, mulţumeşte Partidului, SSMF şi profesorilor de specialitate pentru activitatea rodnică ce desfăşoară. După un program artistic dat de o brigadă a ansamblului UTM, s-au anunţat rezultatele olimpiadelor: 27 premii şi 12 menţiuni la matematică şi 20 premii şi 14 menţiuni la fizică — şi s-au distribuit diplomele şi premiile (2 aparate de fotografiat, 2 ceasornice de mînă, 3 truse stilou-creion, 2 serviete diplomat I, 10 serviete diplomat II, 20 serviete şcolare şi cărţi).

O masă comună a profesorilor participanţi la sesiunea ştiinţifică şi a elevilor participanţi la olimpiadă a încheiat, într-o atmosferă prietenească, lucrările acestor două acţiuni ale SSMF.

Aspecte din rezultatele de specialitate. La solicitarea comisiei centrale de concurs s-au primit un număr de probleme propuse de profesori din provincie pentru olimpiada de matematică şi au fost date probleme propuse de prof. *Gh. Bazacov* (Turnu Severin), *P. Boldescu* (Craiova), *C. Ivănescu* (Tîrgovişte), *C. Georgescu* (Craiova).

Autorii sau propunătorii celorlalte probleme de matematică sînt: *Lucia Chirculescu, Gh. Dumitru, Olimpia Gheorghiu, C. Ionescu-Ţiu, I. Marcu, St. Petrescu, Gh. D. Simionescu, A. Şaichin.*

Temele şi problemele la fizică au fost alese de *Angela Negulescu, Simion Pamfil, A. Petrovanu, N. Stănescu.*

În numerele 4—8 ale G.M.F.—B se publică toate subiectele date la olimpiadele acestui an.

Problemele şi temele date au urmărit verificarea însuşirii cunoştinţelor principale de specialitate din programa olimpiadei, a cunoaşterii unor chestiuni importante din clasa precedentă, a posibilităţii aplicării acestora în probleme, în cazuri particulare, în discuţii, în folosirea graficelor, a îndemînării în calcule, a vederii în spaţiu, a înţelegerii sensului fizic al unor noţiuni, legarea matematicii şi fizicii de practică.

Aceste scopuri, ca şi gradarea subiectelor, au fost în general realizate, astfel încît s-a putut face trierea candidaţilor de la o etapă la alta.

În confruntarea intenţiilor comisiilor de probleme cu realitatea s-au evidenţiat unele deficienţe. Astfel, la matematică, în general, subiectele au fost mult mai dificile decît la fizică, ceea ce a făcut ca, în unele regiuni, să fie cu greu selecţionaţi candidaţii la matematică şi în orice caz, cu un punctaj relativ inferior. Subiectele pentru şcolile profesionale şi tehnice de maiştri, la matematică (etapa locală şi regională) şi pentru clasa a X-a la fizică (la aceleaşi etape) au fost mai uşoare decît cele date altor clase la acelaşi obiect şi aceiaşi etapă.

Ca chestiuni mai de amănunt: s-au criticat problemele prea lungi cu multe puncte, date la clasa a VIII-a la matematică, la etapa locală şi regională, la clasa a IX-a algebră şi a X-a geometrie, etapa locală; problema de la clasa a VIII-a fizică, etapa locală, ca referindu-se la un capitol nou introdus în programă şi pentru care nu există probleme în manuale; tema de clasa a IX-a fizică, etapa locală, ca referindu-se şi la cunoştinţe predate în clasa a VII-a.

Astfel de deficienţe, care nu se datoresc decît dorinţei comisiilor de probleme pentru asigurarea unui nivel ridicat au avut, în unele locuri, ca consecinţe negative: demobilizarea unor elevi, greutăţi în selecţionarea celor mai bine pregătiţi elevi, o anumită discrepanţă între rezultatele la matematică şi cele de la fizică, ceea ce nu corespunde realităţii.

Elevii, îndrumaţi şi stimulaţi de profesorii de specialitate în tot timpul lucrărilor olimpiadelor, au dat dovadă, în general, de interes, de entuziasm, de preocupare pentru studiu, pentru cunoaştere. Intotdeauna pentru probleme oricît de dificile, s-au găsit în ţară candidaţi care să le rezolve perfect, să dea mai multe soluţii, uneori chiar mai ingenioase sau mai directe decît ale autorilor.

Sînt numeroase şcoli ai căror elevi obţin an de an rezultate îmbucurătoare sau care s-au evidenţiat în acest an. Astfel, la etapa finală au obţinut cel puţin 2 evidenţiaţi: şcoala medie din Giurgiu (4 premiaţi), şcolile medii nr. 1 şi 17 din Bucureşti (cîte 3 premiaţi şi 2 menţionaţi), şcoala medie nr. 15 Bucureşti (3 premiaţi), şcoala medie nr. 1 Ploeşti (2 premiaţi şi 2 menţionaţi), scolile medii nr. 13 şi tehnic de maiştri metalurgişti Bucureşti (cîte 2 premiaţi şi 1 menţionat), şcoala medie nr. 3 Iaşi (2 premiaţi şi 1 menţionat), şcoala pedagogică Timişoara (2 premiaţi), şcoala medie Oradea (1 premiat şi 1 menţionat) ca şi şcoala medie nr. 20 Bucureşti, — şcoala medie nr. 2 Tîrgu Jiu (2 menţionaţi).

La etapa locală şi regională s-au evidenţiat (în afara celor citate mai sus) şi alte şcoli ca nr. 1 Turnu Severin, nr. 1 Arad, nr. 4, 6, 7 Cluj, Cîmpia Turzii (Cluj), nr. 1 Bacău, nr. 1 Tg. Ocna şi nr. 1 Roman (reg. Bacău), nr. 1 Tg. Mureş, germană Sighişoara, Ianca (Galaţi), nr. 4 maghiară Oradea, « D. Cantemir » Breaza (Ploeşti), nr. 1 Buzău, profesională Colibaşi (Piteşti), profesională nr. 1 şi 2 Craiova, pedagogică Iaşi, etc.

Dintre elevii premiaţi în acest an la etapa finală, Ceapîru Mihai (premiul 1 fizică) a luat premii şi în 1955 şi 1956, iar Cantaragiu Gh. (menţionat la matematică), a fost de asemeni evidenţiat în cei doi ani precedenţi. Dintre evidenţiaţii acestui an, 14 s-au distins şi anul trecut iar 2, acum 2 ani.

Tot ca un fapt îmbucurător se semnalează reducerea la minimum a cazurilor de încercări de fraudă sau nesinceritate la lucrări.

Rezultate slabe, în general, la etapa regională şi niciun evidenţiat la etapa finală se semnalează din regiunile Baia Mare, Piteşti, Hunedoara iar la matematici, din regiunile Galaţi şi Constanţa.

Aspecte din acţiunea educativă generală. Această întrecere de masă a elevilor are, în general, aspect de întrecere tovărăşească din care lipseşte rivalitatea, vedetismul, tendinţa de concurenţă pentru evidenţieri şi premii.

Olimpiadele de matematică şi fizică se desfăşoară într-o atmosferă de seriozitate şi sobrietate necesare acestor discipline şi formării unui tineret serios şi sobru (dar în acelaş timp, plin de entuziasm şi de iniţiative).

Odată cu etapa regională şi cea finală a olimpiadelor, candidaţilor li se oferă un bogat şi variat program cultural-artistic.

La etapa regională elevii şi profesorii participanţi la olimpiade au vizionat spectacole de operă (Iaşi), de teatru (Bacău, Constanţa, Galaţi, Piteşti, Ploeşti, Tg. Mureş), o serată astrofizică (Constanţa), o manifestare artistică a ansamblului Facultăţii de matematică-fizică (Bucureşti), au vizitat o uzină electrică (Oradea), staţia seismografică (Bacău), muzee (Bacău, Ploeşti), au ascultat expuneri ştiinţifice (Baia Mare, Cluj, Craiova, Oradea).

La etapa finală s-au vizionat operetele « Casa cu trei fete » şi « Vînzătorul de păsări », muzeul de artă al R.P.R., Palatul pionierilor.

Odată cu aceasta, elevii şi profesorii însoţitori au posibilitatea de a vizita oraşele reşedinţă de regiune şi Capitala ţării, parcurile şi monumentele publice ale lor, de a cunoaşte pe elevii fruntaşi din diferitele centre ale regiunii şi apoi din toată ţara. În acelaşi timp cu cunoaşterea colegilor de preocupări şi de vîrstă din diferite locuri, participanţii la olimpiade pot face un larg schimb de păreri care contribuie la lărgirea orizontului cultural al fiecăruia, la consolidarea convingerii că tînăra generaţie luptă pentru un acelaşi ideal: construirea societăţii socialiste.

O contribuţie hotărîtoare pentru buna desfăşurare a olimpiadelor o dau în fiecare an, multe sute de profesori de matematică şi de fizică. Această participare şi munca asiduă legată de ea constituie de asemenea un imbold şi un exemplu pentru elevi şi exercită deci, o puternică influenţă educativă.

Cu ocazia etapelor regională şi finală a olimpiadelor, profesorilor participanţi li s-au oferit în afară de programul cultural la care participă şi elevii, şi conferinţe de informare ştiinţifică (Tg. Mureş, Galaţi), au participat la consfătuiri ale cititorilor periodicelor Societăţii (ca la Bacău, Baia Mare, Craiova, Constanţa, Galaţi, Oradea) contribuind la îmbunătăţirea activităţii acestora. În acest an — ca şi în 1955 — profesorii veniţi în Bucureşti în perioada etapie finale a olimpiadei au participat la lucrările Sesiunii Ştiinţifice a Societăţii.

Propuneri şi sarcini de viitor. Este indicat să se organizeze în cadrul fiecărei filiale regionale a S.S.M.F. (aşa cum filiala Ploeşti a făcut în bune condiţiuni în raportul ei final) o analiză amplă a rezultatelor şi lipsurilor olimpiadelor din acest an din toate punctele de vedere enumerate mai sus, mergînd atît pe linia aprecierii rezultatelor obţinute de diferite şcoli şi clase de

elevi, cît şi în direcţia sublinierii principalelor lipsuri în cunoştinţele candidaţilor. Astfel de concluzii pot servi filialelor Societăţii şi organelor locale de învăţămînt pentru a desfăşura în anul şcolar următor, o activitate corespunzătoare.

Considerăm necesar ca, şi pe această cale, să mulţumim profesorilor şi organelor de învăţămînt care au sprijinit prin munca lor dezinteresată şi entuziastă, olimpiadele de matematică şi fizică din acest an şi să-i rugăm să o continue în cît mai bune condiţiuni în viitor.

Rămîne o sarcină a Societăţii noastre şi a Comisiilor locale ale olimpiadelor, ca participarea elevilor la etapa locală să fie lărgită, ca să se evite coincidenţa mai multor acţiuni pe plan local şi ca rezultatele obţinute să fie îmbunătăţite.

Programul cultural ce se asigură la etapa regională şi la cea finală trebuie în permanenţă îmbunătăţit şi îmbogăţit, pregătit din vreme şi îndeplinit.

Comisiile centrale de probleme vor trebuie să-şi asigure sprijinul şi colaborarea unui colectiv cît mai larg de profesori de specialitate, să proporţioneze subiectele corespunzător cu programa claséi şi cu specificul vîrstei elevilor, să gradeze temele astfel încît de la etapă la etapă exigenţa să meargă crescînd fără să depăşească posibilităţile elevilor celor mai pregătiţi.

Încheerea lucrărilor olimpiadelor în luna mai 1957 trebuie să constituie nu numai un prilej de trecere în revistă a rezultatelor şi a lipsurilor ci şi un imbold pentru obţinerea unor mai bune rezultate şi a unor mai mici lipsuri, în viitor.

REZULTATUL « OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1957 »

La « OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 1957 » — etapa finală, pe ţară ţinută în Bucureşti la 3—5 mai a.c. s-au acordat următoarele premii şi menţiuni:

PREMIUL I

Gheorghe Cezar, clasa VIII s.m. 1 Buzău
Brişcă Virgil, clasa IX s.m.b. Giurgiu
Panlalopol Laurenţiu, clasa X s.m.b. Giurgiu
Ştefan Iosefa, anul III şcoala pedagogică nr. 1 Timişoara
Ionaşcu Stoian, anul II şcoala tehnică de maiştri metalurgişti Bucureşti

PREMIUL II

Gheorghiu Dan, clasa VIII s.m. 13 Bucureşti
Nicolescu Basarab, clasa VIII s.m. 1 Ploeşti
Dascălu C. Dan, clasa VIII s.m. 1 Bucureşti
Muşat Mihai, clasa VIII s.m. 4 Bucureşti
Nanu Octavian, clasa IX s.m. 3 Iaşi
Iftimie Viorel, clasa X s.m.b. Rădăuţi
Spinei Fănică, clasa X. s.m.b. Roman
Teodorescu Nicolae, clasa X. s.m. 2 Bucureşti
Cotoran Andronic, anul II sc. profesională c.f.r. Iaşi
Enache Marin, anul II şcoala pedagogică Timişoara
Crăcană Petru, anul IV şcoala pedagogică Iaşi
Indoleanu Ioan, anul IV şcoala pedagogică Cluj
Bătătică Teodor, anul II şcoala medie tehnică de maiştri metalurgişti Bucureşti

PREMIUL III

Ciorănescu Ioana, clasa VIII s.m. 22 Bucureşti
Poscovici Gh. clasa VIII s.m. 1 Oradea
Balbu Viorel, clasa X s.m. 3 Iaşi
Iordănescu Radu, clasa X. s.m. 20 Bucureşti
Lupu Alexandru, clasa X s.m. 1 Sibiu
Ballag Vasile, clasa X s.m. 1 Ploeşti
Păpuşoiu Gheorghe, clasa X s.m. 1 Lugoj
Ghiţă Ion, anul II şcoala profesională nr. 2 Craiova
Şerban Dumitru, anul II Şc. prof. metal. Nr. 1 Craiova

MENŢIUNI

Şerban Gheorghe, anul I şcoala medie tehnică de maiştri Bucureşti
Pop Doina, clasa VIII s.m. 2 Oradea.
Velicescu Mircea, clasa VIII s.m.b. Tîrgu Jiu
Anghelescu Mircea, clasa VIII s.m. 2 Craiova
Constantinopol Alexandru, clasa IX s.m. 1 Ploeşti
Dragomirescu Mihai, clasa IX s.m. 12 Bucureşti
Fleşeriu Călin, clasa IX s.m. 1 Tîrgu-Mureş
Panaitescu Gheorghe, clasa X s.m.1 Ploeşti
Cantaragiu Gheorghe, clasa X s.m. 17 Bucureşti
Lucan Mihai, clasa X s.m. 2 Iaşi
Doniga Nicolae, clasa X s.m. 1 Bucureşti
Cristea Paul, clasa X, s.m. 1 metalurgişti Bucureşti

La « OLIMPIADA DE FIZICĂ 1957 » — etapa finală, pe ţară, ţinută în Bucureşti la 3—5 mai a.c. s-au acordat următoarele premii şi menţiuni:

PREMIUL I

Ceaptru Mihai, cl. X. s.m. 17 Bucureşti
Pîriu Mariana, cl. IX s.m. 10 Bucureşti
Zamfirescu Dinu, cl. VIII s.m. b. Cîmpina
Negulescu Dan, cl. X s.m. 13 Bucureşti
Rizescu Anca, cl. VIII s.m. 15 Bucureşti

PREMIUL II

Bălăşescu Doina, cl. VIII s.m. 15 Bucureşti
Ghelmeziu Nicolae, cl VIII s.m. 1 Bucureşti
Kiss Ferencs, cl. IX s.m. 4 Oradea
Profirescu Marcel, cl. IX s.m. b. Giurgiu
Vişinescu Mihai, cl. IX s.m.b. Giurgiu
Rădescu Eugen, cl. IX s.m. 1 Focşani
Pop Andrei cl. X s.m. 17 Bucureşti
Lichiardopol Nicolae, cl. X s.m.b. Turnu Măgurele

PREMIUL III

Micu Radu, cl. VIII s.m. 4 Cluj
Vîlceanu Sabin, cl. VIII s.m. 3 Tîrgu Jiu
Manolescu Anton, cl. IX s.m. 11 Bucureşti
Isbăşescu Mihai, cl. IX s.m. 1 Bucureşti
Luchian Ion, cl. X s.m. 17 Bucureşti
Boieru Marina, cl. X s.m. 2 Constanţa
Berceanu Rodica, cl. X s.m. 15 Bucureşti

MENȚIUNI

Bădescu Ioana, cl. VIII s.m. 13 București
Grosescu Radu, cl. VIII școala militară Breaza
Mihail Dan, cl. VIII s.m. b. Sinaia
Mihăilescu Simona, cl. VIII s.m. 2 Iași
Soceanu Alexandru, cl. VIII s.m. 8 București
Demșioreanu Brutus, cl. IX s.m. 1 Arad
Pitea Teodor, cl. IX s.m. 2 Tîrgu Jiu
Vlad Constantin, cl. IX s.m. 17 București
Romașcanu Anișoara, cl. X s.m. 20 București
Litschel Dieter, clasa X școala medie germană Mediaș
Bunda Gheorghe, cl. X s.m. 1 Oradea

MENȚIUNI PENTRU LUCRĂRI DE LABORATOR

Goguță Octavian, cl. X s.m.1 Orașul Stalin
Simpăleanu Lucian, cl. X s.m. 2. Turda
Cruceanu Dan Nicolae, cl. IX s.m. 2 Focșani

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR ALGEBRICE IRAȚIONALE

G. G. CONSTANTINESCU
Profesor Institutul Politehnic București

1. METODA obișnuită de rezolvare a unei ecuații algebrice iraționale comportă în fapt trei etape care constau respectiv din raționalizarea ecuației, din rezolvarea ecuației raționalizate precum și din verificarea rădăcinilor obținute.

Prima etapă, aceea a raționalizării ecuației, adică a transformării ecuației date într-o ecuație algebrică rațională care se poate numi ecuație rezolvantă, se realizează obișnuit prin intermediul unor succesive ridicări la putere a ecuației iraționale, iar numărul acestor ridicări la putere depinde atît de numărul termenilor iraționali conținuți în ecuația dată cît și de structura iraționalității acestor termeni.

Dar la același rezultat se poate ajunge și prin intermediul multiplicării ecuației iraționale printr-un anume număr de factori algebrici de asemenea iraționali, astfel aleși încît produsul final să fie o ecuație algebrică rațională. Aceasta face ca atunci cînd $f(x) = 0$ este o ecuație algebrică irațională să putem spune în mod invers că expresia algebrică irațională $f(x)$ este un factor al unui anume produs de expresii algebrice iraționale în care se descompune un polinom $P(x)$ care egalat cu zero constituie ecuația algebrică rațională, adică ecuația rezolvantă a ecuației iraționale date. Cum egalarea cu zero a fiecărui factor algebric irațional din produsul menționat constituie o ecuație algebrică irațională, înseamnă că un anume număr de ecuații algebrice iraționale de o anume structură irațională au aceeași ecuație rezolvantă: $F(x) = 0$.

Prin urmare, nu toate rădăcinile ecuației rezolvante corespund ecuației iraționale date, căci acestea se repartizează într-un anume mod la toate sau

numai la unele din ecuaţiile algebrice iraţionale corespunzătoare ale aceleiaşi ecuaţii rezolvante.

A treia etapă din rezolvarea ecuaţiilor algebrice iraţionale are deci drept scop tocmai precizarea modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante la diversele ecuaţii algebrice iraţionale care îi corespund.

Astfel, spre exemplu, în cazul unei ecuaţii algebrice iraţionale de forma $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = 0$, în care $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt polinoame în x, raţionalizarea se realizează, fie prin ridicarea la puterea a doua a egalităţii $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)}$ fie prin multiplicarea părţii stîngi a ecuaţiei considerate, prin expresia ei conjugată $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}$. În ambele cazuri rezultatul este acelaşi, adică obţinerea ecuaţiei rezolvante $P(x) - Q(x) = 0$ care, prin urmare, poate fi privită ca fiind rezultatul unui produs de doi factori algebrici iraţionali egalat cu zero, anume:

$$\{\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}\}\{\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}\} = 0,$$

deci echivalentă cu două ecuaţii algebrice iraţionale, obţinute prin egalarea cu zero a acestor doi factori algebrici iraţionali.

S-ar părea la prima vedere, că în cazul ecuaţiei algebrice iraţionale de tipul considerat, nu este cazul să se mai vorbească de existenţa unei a treia etape în problema rezolvării ei. Aceasta pentru motivul că n-am putea avea o egalitate de forma $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = 0$ pentru valori reale sau complexe ale lui x, deoarece o sumă aritmetică nu poate fi nulă. În realitate, chestiunea nu stă aşa, deoarece pentru o anume valoare a lui x, care poate foarte bine să fie rădăcină a ecuaţiei rezolvante, unul din polinoamele $P(x)$ şi $Q(x)$ poate fi patratul unui număr negativ. Dacă admitem spre exemplu, că pentru $x = \alpha$ avem $P(\alpha) = A^2$ şi $Q(\alpha) = (-A)^2$, atunci egalitatea $\sqrt{A^2} + \sqrt{(-A)^2} = 0$ există în adevăr, căci $\sqrt{A^2} = A$, iar $\sqrt{(-A)^2} = -A$.

Pentru verificarea practică a celor afirmate este de ajuns să ne referim la ecuaţia

$$\sqrt{2 + x} - \sqrt{1 + x + x^2} = 0$$

căreia îi corespunde ecuaţia rezolvantă $x^2 = 1$ care este însă ecuaţie rezolvantă şi pentru ecuaţia algebrică iraţională

$$\sqrt{2 + x} + \sqrt{1 + x + x^2} = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei rezolvante sînt $x = 1$; $x = -1$ şi numai rădăcina pozitivă corespunde ecuaţiei algebrice iraţionale considerate, căci pentru $x = 1$ atît $\sqrt{2 + x}$ cît şi $\sqrt{1 + x + x^2}$ devin egali cu $\sqrt{3}$ în timp ce pentru $x = -1$, primul radical este egal cu unitatea, iar al doilea este egal cu -1, deoarece avem

$$\sqrt{1 - 1 + (-1)^2} = \sqrt{(-1)^2} = -1,$$

aşa încît această rădăcină corespunde celeilalte ecuaţii algebrice iraţionale referitoare la aceiaşi ecuaţie rezolvantă.

Un fapt cu totul asemănător are loc şi în cazul ecuaţiei

$$\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1} = 0$$

pentru care avem ecuaţia rezolvantă

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \equiv (x^2 + 1)\ (x^2 + 2x - 3) = 0$$

deci rădăcinile: $1, -3, \pm i$, cu $i = \sqrt{-1}$.

Cum pentru mărimile iraţionale $\sqrt{x^2 + 2}$ şi $\sqrt{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1}$ avem respectiv valorile

$$\sqrt{-1+2} = 1, \quad \sqrt{1 - 2i - i^2 + 2i - 1} = \sqrt{-i^2} =$$

$$= \sqrt{-1}\,\sqrt{i^2} = i \cdot i = -1 \quad \text{cînd } x = i,$$

$$\sqrt{-1+2} = 1, \quad \sqrt{1 + 2i - i^2 - 2i - 1} = \sqrt{-i^2} =$$

$$= \sqrt{-1}\,\sqrt{i^2} = i \cdot i = -1 \quad \text{cînd } x = -i,$$

$$\sqrt{1+2} = \sqrt{3}, \quad \sqrt{1 + 2 - 1 + 2 - 1} = \sqrt{3} \quad \text{cînd } x = 1,$$

$$\sqrt{9+2} = \sqrt{11}, \quad \sqrt{81 - 54 - 9 - 6 - 1} = \sqrt{11} \quad \text{cînd } x = -3,$$

înseamnă că rădăcinile reale ale ecuaţiei rezolvante corespund într-adevăr ecuaţiei algebrice iraţionale considerate, în timp ce rădăcinile complexe ale ecuaţiei rezolvante verifică cealaltă ecuaţie algebrică iraţională asociată

$$\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1} = 0$$

care are aceiaşi ecuaţie rezolvantă ca şi ecuaţia algebrică iraţională considerată.

Aceste exemple arată necesitatea existenţei celei de-a treia etape în rezolvarea ecuaţiilor algebrice iraţionale. Cum însă verificarea rădăcinilor ecuaţiei rezolvante nu este o chestiune atît de simplă ca în cazul exemplelor precedente, deoarece adeseori precizarea modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante la diversele ecuaţii algebrice iraţionale corespunzătoare comportă unele calcule care dacă nu sînt efectuate cu deosebită atenţie ne conduc la rezultate falşe, înseamnă că orice metodă care uşurează recunoaşterea acestui mod de repartizare este bine venită.

Scopul rîndurilor de faţă este tocmai să indice o asemenea metodă care, avînd la bază un principiu general, nu numai că ne va permite să obţinem un criteriu precis al modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante între ecuaţiile algebrice iraţionale corespunzătoare tipului ce vom considera, dar va putea fi aplicată cu succes şi pentru alte tipuri de ecuaţii algebrice iraţionale.

2. — Vom considera în acest scop, următoarele ecuaţii algebrice iraţionale

$$\begin{aligned} E_1(x) &\equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0, \\ E_2(x) &\equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} - \sqrt{R(x)} = 0, \\ E_3(x) &\equiv \sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0, \\ E_4(x) &\equiv -\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

în care $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sînt polinoame în x de diverse grade.

Aceste ecuaţii algebrice iraţionale au aceiaşi ecuaţie rezolvantă, anume:

$$F(x) \equiv P^2(x) + Q^2(x) + R^2(x) - 2P(x)Q(x) - \\ - 2Q(x)R(x) - 2R(x)P(x) = 0 \tag{2}$$

deoarece avem, după un calcul uşor,

$$F(x) \equiv -E_1(x)E_2(x)E_3(x)E_4(x), \tag{3}$$

iar problema ce voim a rezolva este aceea *a determinării unui criteriu prin care să se precizeze modul în care rădăcinile ecuaţiei rezolvante*

$$F(x) = 0$$

se repartizează între ecuaţiile algebrice iraţionale care îi corespund,

$$E_1(x) = 0, \quad E_2(x) = 0, \quad E_3(x) = 0, \quad E_4(x) = 0.$$

Vom trata în primul rînd cazul rădăcinilor reale ale ecuaţiei rezolvante şi numai după aceea vom trece la cazul rădăcinilor complexe.

3. — Teorema I. — *Dacă $x = \alpha$ este o rădăcină reală a ecuaţiei rezolvante, atunci polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ au acelaşi semn pentru $x = \alpha$.*

Pentru demonstrare să presupunem deocamdată, că rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante nu anulează nici unul din cele trei polinoame de sub radicali şi să admitem contrariul celor afirmate de teoremă, deci că unul din aceste trei polinoame este de semn contrar celorlalte două pentru $x = \alpha$.

Presupunînd deci, pentru precizare, că avem spre exemplu,

$$P(\alpha) = -A < 0, \quad Q(\alpha) = B > 0, \quad R(\alpha) = C > 0,$$

înseamnă că expresiile algebrice iraţionale $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, $E_3(\alpha)$, $E_4(\alpha)$ sînt mărimi complexe a căror parte imaginară este tocmai mărimea $\sqrt{-A}$, abstracţie făcînd de semnul $\pm$ din faţa radicalului. Prin urmare, nici una din aceste mărimi nu se poate anula fără ca mărimea A să fie identic nulă, deci fără ca polinomul $P(x)$ să se anuleze pentru $x = \alpha$. Ori aceasta este contrar ipotezei, şi cum pentru $x = \alpha$ cel puţin una din ecuaţiile algebrice iraţionale trebuie să fie verificată, deoarece $x = \alpha$ este o rădăcină a ecuaţiei rezolvante, înseamnă că dacă $x = \alpha$ nu anulează nici unul din cele trei polinoame $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, atunci ele au acelaşi semn pentru $x = \alpha$.

Să presupunem acum că pentru $x = \alpha$ unul din cele trei polinoame de sub radicali este nul. Fie pentru fixarea ideilor, $P(\alpha) = 0$. Atunci polinoamele $Q(x)$ şi $R(x)$ trebuie să aibă acelaşi semn pentru $x = \alpha$, deoarece în caz contrar, fiecare din expresiile algebrice iraţionale $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$, $E_4(x)$ este o mărime complexă ale cărei părţi reală şi imaginară sînt constituite respectiv din rădăcinile patrate ale valorilor polinoamelor $Q(x)$ şi $R(x)$ pentru $x = \alpha$. *Şi cum cel puţin una din aceste expresii algebrice iraţionale trebuie să se anuleze pentru $x = \alpha$*, deoarece aceasta este o rădăcină a ecuaţiei rezolvante, înseamnă că în acest caz, ambele polinoame $Q(x)$ şi $R(x)$ se anulează pentru $x = \alpha$. Există prin urmare, factorul comun $\sqrt{x - \alpha}$ după a cărui îndepărtare ne aflăm în cazul cînd nici unul din cele trei polinoame de sub radicali nu se anulează pentru $x = \alpha$, astfel încît teorema este demonstrată.

4. — Odată ce polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ trebuie să aibă acelaşi semn pentru o rădăcină reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante, putem presupune fără restrîngerea generalităţii, că semnul lor este pozitiv.

Aceasta pentru motivul că dacă pentru $x = \alpha$ am avea $P(\alpha) < 0$, $Q(\alpha) < 0$, $R(\alpha) < 0$, atunci multiplicarea ecuaţiilor (1) prin imaginarul $i = \sqrt{-1}$ ne conduce imediat la cazul în care cele trei polinoame de sub radicalii ecuaţiilor algebrice iraţionale (1) au semnul pozitiv pentru $x = \alpha$.

Situîndu-ne deci în cazul cînd cele trei polinoame $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ reprezintă mărimi pozitive, diferite de zero, pentru $x = \alpha$, rădăcina reală a ecuaţiei rezolvante, să formăm produsele două cîte două, în toate modurile distincte posibile, ale ecuaţiilor algebrice iraţionale (1).

Vom avea următoarele ecuaţii de asemenea algebrice iraţionale:

$$\begin{aligned}
E_1(x)\,E_2(x) &\equiv \{\ P(x) + Q(x) - R(x)\ \} + 2\sqrt{P(x)\ Q(x)} = 0,\\
E_1(x)\,E_3(x) &\equiv \{\ P(x) - Q(x) + R(x)\ \} + 2\sqrt{R(x)\ P(x)} = 0,\\
E_1(x)\,E_4(x) &\equiv \{-P(x) + Q(x) + R(x)\} + 2\sqrt{Q(x)\ R(x)} = 0,\\
E_2(x)\,E_3(x) &\equiv -\{-P(x) + Q(x) + R(x)\} + 2\sqrt{Q(x)\ R(x)} = 0,\\
E_2(x)\,E_4(x) &\equiv -\{\ P(x) - Q(x) + R(x)\ \} + 2\sqrt{R(x)\ P(x)} = 0,\\
E_3(x)\,E_4(x) &\equiv -\{\ P(x) + Q(x) - R(x)\ \} + 2\sqrt{P(x)\ Q(x)} = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

caracterizate, pe de o parte, prin faptul că cel puţin trei din aceste ecuaţii admit rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante, deoarece una oricare din ecuaţiile algebrice iraţionale (1) este conţinută ca factor multiplicativ în trei din ecuaţiile (4), iar, pe de altă parte, prin faptul că părţile raţionale ale ecuaţiilor (4) sînt două cîte două egale şi de semne contrarii, în timp ce părţile iraţionale sînt două cîte două identice.

Aceste proprietăţi *caracteristice* ale ecuaţiilor (4) sînt foarte importante, deoarece ele permit recunoaşterea modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante între ecuaţiile algebrice iraţionale care îi corespund.

În adevăr, dacă spre exemplu, presupunem că părţile iraţionale ale ecuaţiilor (4) reprezintă mărimi pozitive diferite de zero, pentru rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante, şi dacă admitem spre exemplu, că această rădăcină reală corespunde ecuaţiei algebrice iraţionale

$$E_2(x) = 0, \tag{5}$$

atunci este clar că vom avea în acelaşi timp

$$E_1(\alpha)\,E_2(\alpha) \equiv 0, \qquad E_2(\alpha)\,E_3(\alpha) \equiv 0, \qquad E_2(\alpha)\,E_4(\alpha) \equiv 0. \tag{6}$$

Ori, datorită faptului că părţile iraţionale sînt presupuse ca reprezentînd mărimi pozitive diferite de zero, identităţile (6) nu pot exista decît dacă vom avea cu necesitate

$$I_2(\alpha) \equiv P(\alpha) + Q(\alpha) - R(\alpha) < 0, \quad I_3(\alpha) \equiv P(\alpha) - Q(\alpha) + R(\alpha) > 0.$$

$$I_4(\alpha) \equiv -P(\alpha) + Q(\alpha) + R(\alpha) > 0.$$

care constituie, prin urmare, condiţia *necesară şi suficientă* pentru ca rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante să fie rădăcină pentru ecuaţia (5).

Reese de aci că în problema recunoaşterii modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante între ecuaţiile algebrice iraţionale care îi corespund s-ar putea obţine rezultatul prin simpla verificare a unor inegalităţi algebrice

raţionale şi aceasta ca urmare a considerării ecuaţiilor algebrice iraţionale intermediare (4).

Este ceea ce are loc în adevăr, în realitate, după cum vom vedea treptat, treptat.

5. — Situîndu-ne în cazul cînd polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sînt pozitive şi diferite de zero, pentru rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante, să presupunem deocamdată că nici unul din aceste polioame nu este patratul unei mărimi negative cînd x este egal cu α. Atunci suma

$$E_1(\alpha) \equiv \sqrt{P(\alpha)} + \sqrt{Q(\alpha)} + \sqrt{R(\alpha)}$$

nu poate fi nulă, deoarece este suma aritmetică a trei mărimi pozitive, diferite de zero.

Cum pe de altă parte, în condiţiile admise, mărimile iraţionale

$$\sqrt{P(\alpha)\,Q(\alpha)}, \quad \sqrt{Q(\alpha)\,R(\alpha)}, \quad \sqrt{R(\alpha)\,P(\alpha)}$$

sînt mărimi pozitive diferite de zero, înseamnă că una oricare din mărimile

$$E_1(\alpha)\,E_2(\alpha), \qquad E_1(\alpha)\,E_3(\alpha), \qquad E_1(\alpha)\,E_4(\alpha) \tag{7}$$

nu poate fi identic nulă fără ca partea lor raţională să fie o mărime negativă diferită de zero.

Rezultă deci că, în condiţiile admise, pentru ca rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante să fie o rădăcină a uneia din ecuaţiile algebrice iraţionale

$$E_2(x) = 0, \qquad E_3(x) = 0, \qquad E_4(x) = 0 \tag{8}$$

este *necesar* ca inegalitatea corespunzătoare:

$$\begin{aligned} I_2(x) \equiv P(x) + Q(x) - R(x) < 0;\ I_3(x) = P(x) - Q(x) + \\ + R(x) < 0;\ I_4(x) = -P(x) + Q(x) + R(x) < 0, \end{aligned} \tag{9}$$

obţinută prin desconsiderarea radicalilor dar păstrarea semnelor ecuaţiei respective, să fie verificată pentru $x = \alpha$.

Cum însă una din mărimile (7) nu poate fi nulă fără ca două din mărimile $E_3(\alpha)\,E_4(\alpha)$, $E_2(\alpha)\,E_4(\alpha)$, $E_2(\alpha)\,E_3(\alpha)$ să fie de asemenea nule, iar părţile raţionale ale acestor mărimi sînt respectiv egale şi de semne contrarii părţilor raţionale conţinute în mărimile (7), înseamnă că dacă rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante este o rădăcină pentru una singură din ecuaţiile (8), atunci numai acea inegalitate (9) corespunzătoare acestei ecuaţii este verificată pentru $x = \alpha$, în timp ce celelalte două inegalităţi nu sînt verificate. Verificarea simultană pentru $x = \alpha$ a celor trei inegalităţi (9) atrage cu necesitate faptul că $x = \alpha$ este rădăcina comună pentru toate cele trei ecuaţii (8), iar dacă numai una din inegalităţile (9) nu este verificată pentru $x = \alpha$, atunci această valoare a lui x nu este rădăcină pentru ecuaţia algebrică iraţională corespunzătoare, fiind rădăcină comună pentru celelalte două ecuaţii (8).

De aci se degajează uşor criteriul de recunoaştere a modului în care se repartizează rădăcinile ecuaţiei rezolvante între ecuaţiile algebrice iraţionale care îi corespund, în cazul cînd rădăcina reală a ecuaţiei rezolvante nu anulează nici unul din polinoamele de sub radicali şi le transformă în mărimi pozitive, diferite însă de patratul unui număr negativ.

Pentru enunțarea completă a criteriului însă, să vedem cum se transformă el atunci cînd polinoamele de sub radicali sînt mărimi negative diferite de zero pentru $x = \alpha$.

În acest scop, așa după cum am spus, să multiplicăm ecuațiile (1) prin imaginarul $i = \sqrt{-1}$. Polinoamele de sub radicali devin: $-P(x)$, $-Q(x)$, $-R(x)$ și prin urmare, inegalitățile (9) își schimbă sensul. Putem deci spune în concluzie:

Teorema II. — *Dacă rădăcina reală a ecuației rezolvante corespunzătoare ecuațiilor algebrice iraționale*

$$E_2(x) = 0, \qquad E_3(x) = 0, \qquad E_4(x) = 0,$$

este astfel încît nu anulează nici unul din polinoamele de sub radicali și nici nu le transformă în pătratul unui număr negativ, atunci ea este rădăcină pentru acele ecuații algebrice iraționale pentru care expresia algebrică rațională obținută din ecuațiile înseși, prin desconsiderarea radicalilor, dar cu păstrarea semnelor,

$$I_2(x) \equiv P(x) + Q(x) - R(x); \qquad I_3(x) \equiv P(x) - Q(x) + R(x);$$

$$I_4(x) \equiv -P(x) + Q(x) + R(x),$$

este de semn contrar semnului unic pe care îl au polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ pentru rădăcina reală considerată a ecuației rezolvante.

6. — Să verificăm acum rezultatul parțial precedent pe un exemplu, considerînd în acest scop ecuația

$$2\sqrt{3x+1} + 3\sqrt{5x-4} - 4\sqrt{6x+1} = 0. \tag{10}$$

Ecuația rezolvantă este după efectuarea calculelor

$$-9\{71x^2 - 528x - 320\} = 0.$$

rezultînd rădăcinile 8 și $-\frac{40}{71}$.

Pentru rădăcina $x = 8$, polinoamele de sub radicali sînt pozitive și avem: $P(8) = 100$, $Q(8) = 324$, $R(8) = 784$, fiind ușor de constatat că $I_2(8) < 0$, $I_3(8) > 0$, $I_4(8) > 0$, așa încît $x = 8$ este rădăcină a ecuației considerate și numai a acesteia.

Pentru rădăcina $x = -\frac{40}{71}$, polinoamele de sub radicali sînt negative și egale respectiv cu $-\frac{196}{71}$; $-\frac{4356}{71}$; $-\frac{2704}{71}$, fiind ușor de verificat că: $I_2\left(-\frac{40}{71}\right) < 0$, $I_3\left(-\frac{40}{71}\right) > 0$, $I_4\left(-\frac{40}{71}\right) < 0$, așa încît rădăcina $x = -\frac{40}{71}$ a ecuației rezolvante este rădăcină numai pentru ecuația

$$2\sqrt{3x+1} - 3\sqrt{5x-4} + 4\sqrt{6x+1} = 0 \tag{11}$$

și numai pentru aceasta.

În concluzie deci, totul este conform teoremei enunțate precedent.

Este însă de observat că în practică nu se recomandă a se proceda în modul de mai sus, deoarece numărul înmulțirilor efectuate precedent poate fi redus.

În adevăr, odată ce am observat că rădăcina ecuației rezolvante, a cărei repartizare vrem să precizăm, nu anulează polinoamele de sub radicali, calculăm expresiile corespunzătoare inegalităților care precizează repartizarea rădăcinii, adică în cazul nostru, expresiile

$$I_2(x) = -39x - 48; \qquad I_3(x) = 63x + 56; \qquad I_4(x) = 129x - 24,$$

și cum pentru $x = 8$ prima este negativă în timp ce celelalte două sînt pozitive, înseamnă că $x = 8$ este rădăcină numai pentru ecuația considerată și numai pentru aceasta, deoarece polinoamele de sub radicali sînt pozitive.

În ce privește rădăcina $x = -\frac{40}{71}$ ea face pozitivă a doua din expresiile de mai sus, adică pe $I_3(x)$, și negative celelalte două. Deci ea este o rădăcină a ecuației (11) și numai a acesteia, căci pentru această valoare a lui x polinoamele de sub radicali sînt negative.

Acestea fiind, pentru o și mai concludentă verificare practică a teoremei, să precizăm repartizarea rădăcinilor ecuației rezolvante pe calea obișnuită și aceasta cu atît mai mult cu cît datorită exemplului ales, nu întîmpinăm nici o dificultate. Avem efectiv pentru $x = 8$:

$$\sqrt{3x+1} = 5 \quad , \quad \sqrt{5x-4} = 6 \quad , \quad \sqrt{6x+1} = 7,$$

așa încît, cum

$$2.5 + 3.6 - 4.7 \equiv 0,$$

primul rezultat se confirmă.

Pe de altă parte, pentru $x = -\frac{40}{71}$ avem

$$\sqrt{3x+1} = \frac{7i}{\sqrt{71}} \quad , \quad \sqrt{5x-4} = \frac{22i}{\sqrt{71}} \quad , \quad \sqrt{6x+1} = \frac{13i}{\sqrt{71}},$$

și cum

$$\frac{i}{\sqrt{71}}\{2.7 - 3.22 + 4.13\} \equiv 0,$$

avem confirmarea și a celui de-al doilea rezultat.

7. — Să considerăm acum cazul particular cînd rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuației rezolvante anulează unul din cele trei polinoame de sub radicalii ecuațiilor iraționale corespunzătoare și pentru precizarea ideilor să presupunem că $P(\alpha)$ este identic nul. Vom avea atunci

$$E_1(\alpha)\,E_2(\alpha) \equiv -E_1(\alpha)\,E_3(\alpha) \equiv E_2(\alpha)\,E_4(\alpha) \equiv -E_3(\alpha)\,E_4(\alpha) \equiv$$
$$\equiv Q(\alpha) - R(\alpha) \quad ; \quad E_2(\alpha)\,E_3(\alpha) \equiv -\{\sqrt{Q(\alpha)} - \sqrt{R(\alpha)}\}^2 ;$$
$$E_1(\alpha)\,E_4(\alpha) \equiv \{\sqrt{Q(\alpha)} + \sqrt{R(\alpha)}\}^2,$$

ceea ce arată că $x = \alpha$ va fi rădăcină comună pentru ecuațiile

$$E_2(x) = 0 \quad , \quad E_3(x) = 0, \tag{12}$$

dacă vom avea

$$Q(\alpha) - R(\alpha) = 0, \tag{13}$$

precum şi că $E_1(\alpha)$ şi $E_2(\alpha)$ sînt mărimi diferite de zero atît timp cît nici unul din polinoamele $Q(x)$ şi $R(x)$ nu devine patratul unui număr negativ, cînd x este egal cu α, pentru motivul că suma $\sqrt{Q(\alpha)} + \sqrt{R(\alpha)}$ este constituită din doi termeni pozitivi cînd polinoamele de sub radicali sînt pozitive sau din mărimi de forma ib, cu b pozitiv, în cazul contrar.

Cum egalitatea (12) poate fi privită ca rezultată din egalitatea

$$P(\alpha) \pm Q(\alpha) \mp R(\alpha) = 0$$

în care semnele se corespund, deci din egalarea cu zero a părţilor raţionale conţinute în acele din ecuaţiile (4) în care intervin ecuaţiile (12), înseamnă că putem completa criteriul modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante prin:

Teorema III. — *Dacă rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante corespunzătoare ecuaţiilor algebrice iraţionale*

$$E_2(x) = 0 \qquad E_3(x) = 0 \qquad E_4(x) = 0$$

este astfel încît anulează unul din polinoamele de sub radicali şi nu transformă pe nici unul din celelalte două în patratul unui număr negativ, atunci ea este rădăcină comună pentru acele ecuaţii algebrice iraţionale pentru care expresia algebrică raţională obţinută din ecuaţiile înseşi prin, desconsiderarea radicalilor, dar păstrarea semnelor

$$I_2(x) \quad , \quad I_3(x) \quad , \quad I_4(x),$$

se anulează pentru această valoare a lui x.

8. — Verificarea rezultatului precedent este imediată dacă ne referim spre exemplu la ecuaţia

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{3x-4} = 0$$

căreia îi corespunde ecuaţia rezolvantă

$$-\{3x^2 - 10x + 7\} = 0,$$

aşa încît rădăcinile sale sînt 1 şi $\frac{7}{3}$.

Considerînd acum expresiile care permit recunoaşterea modului de repartizare a rădăcinilor ecuaţiei rezolvante între ecuaţiile algebrice iraţionale care îi corespund, anume

$$I_2(x) \equiv -x + 1 \quad , \quad I_3(x) \equiv 3x - 3 \quad , \quad I_4(x) \equiv 3x - 5,$$

rezultă că pentru $x = 1$ primele două sînt nule, aşa încît această valoare a lui x este o rădăcină comună ecuaţiei considerate şi ecuaţiei:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} + \sqrt{3x-4} = 0.$$

Acest rezultat se confirmă imediat, căci pentru $x = 1$, cei trei radicali devin respectiv egali cu 0, i, i.

În ceea ce priveşte a doua rădăcină $x = \frac{7}{3}$ a ecuaţiei rezolvante, avem

$I_2\left(\frac{7}{3}\right) < 0$, $I_3\left(\frac{7}{3}\right) > 0$, $I_4\left(\frac{7}{3}\right) > 0$ şi cum pentru această valoare a lui x

polinoamele de sub radicali sînt pozitive, înseamnă că $x = \frac{7}{3}$ este de asemenea o rădăcină a ecuației considerate.

Verificarea directă este și aci ușor de făcut, căci pentru $x = \frac{7}{3}$ cei trei radicali devin respectiv egali cu $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, așa încît $\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} \equiv 0$.

9. — Să considerăm acum și cazul extrem de particular cînd rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuației rezolvante anulează două din cele trei polinoame de sub radicalii ecuațiilor algebrice iraționale corespunzătoare. Este clar că în acest caz ea trebuie să anuleze și pe cel de-al treilea polinom de sub radical, deoarece altfel nu ar putea fi rădăcină pentru nici una din ecuațiile algebrice iraționale care corespund aceleiași ecuații rezolvante. Aceasta înseamnă că termenii ecuațiilor (1) admit factorul comun $\sqrt{x - \alpha}$, deci că $x = \alpha$ este rădăcină pentru toate ecuațiile algebrice iraționale avînd aceiași ecuație rezolvantă.

10. — Pînă acum am lăsat deoparte cazul cînd rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuației rezolvante transformă unul sau mai multe din polinoamele de sub radicalii ecuațiilor algebrice iraționale corespunzătoare în patratul unui număr negativ. Datorită acestui fapt $x = \alpha$ nu putea fi rădăcină în nici un caz pentru ecuația

$$E_1(x) \equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0 .$$

Să presupunem atunci în primul rînd că pentru $x = \alpha$ toate cele trei polinoame de sub radicalii ecuațiilor algebrice iraționale devin patratele unor numere negative. Cu alte cuvinte, să admitem că avem

$$P(\alpha) = (-A)^2 \quad , \quad Q(\alpha) = (-B)^2 \quad , \quad R(\alpha) = (-C)^2,$$

A, B, C fiind numere pozitive.

Este clar că nici de data aceasta $E_1(\alpha)$ nu poate fi nulă, deoarece toți termenii săi sînt negativi.

Cum pe de altă parte mărimile iraționale $\sqrt{P(\alpha)\,Q(\alpha)}$, $\sqrt{Q(\alpha)\,R(\alpha)}$, $\sqrt{R(\alpha)\,P(\alpha)}$ reprezintă respectiv, în acest caz, numerele pozitive AB, BC, CA, înseamnă că sîntem în condițiile de aplicabilitate ale teoremei II, și prin urmare,

Dacă toate cele trei polinoame $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ reprezintă patratul unor numere negative cînd x devine egal cu o rădăcină reală a ecuației rezolvante, atunci teorema II se aplică întocmai.

Să presupunem acum, în al doilea rînd, că rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuației rezolvante transformă în patratul unui număr negativ numai două din cele trei polinoame de sub radicalii ecuațiilor algebrice iraționale corespunzătoare ecuației rezolvante. Și pentru precizarea ideilor să admitem că avem

$$P(\alpha) = (-A)^2, \qquad Q(\alpha) = (-B)^2 \qquad R(\alpha) = C,$$

unde A și B sînt numere pozitive precum și numărul C, deoarece în conformitate cu teorema *I* cele trei polinoame trebuie să aibă același semn pentru rădăcina reală a ecuației rezolvante.

În aceste condiţii, ecuaţiile (4) ne dau

$$E_1(\alpha)\,E_2(\alpha) = \{A + B - C\} + 2AB,$$
$$E_1(\alpha)\,E_3(\alpha) = \{A - B + C\} - 2A\sqrt{C},$$
$$E_1(\alpha)\,E_4(\alpha) = \{-A + B + C\} - 2B\sqrt{C},$$
$$E_2(\alpha)\,E_3(\alpha) = -\{-A + B + C\} - 2B\sqrt{C},$$
$$E_2(\alpha)\,E_4(\alpha) = -\{A - B + C\} - 2A\sqrt{C},$$
$$E_3(\alpha)\,E_4(\alpha) = -\{A + B - C\} + 2A\sqrt{B},$$

reeşind imediat că $x = \alpha$ este o rădăcină a ecuaţiei

$$E_1(\alpha) \equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0$$

şi numai a acestei ecuaţii, dacă avem simultan

$$A + B - C < 0, \quad , \quad A - B + C > 0 \quad , \quad -A + B + C > 0$$

pentru motivul că numai expresiile $E_1(\alpha)\,E_2(\alpha)$; $E_1(\alpha)\,E_3(\alpha)$; $E_1(\alpha)\,E_4(\alpha)$ devin o diferenţă aritmetică, în timp ce expresiile $E_2(\alpha)\,E_3(\alpha)$; $E_2(\alpha)\,E_4(\alpha)$ sînt o sumă aritmetică de două numere negative, iar expresia $E_3(\alpha)\,E_4(\alpha)$ este o sumă aritmetică de două numere pozitive, aşa încît, ele neputîndu-se anula, înseamnă că $x = \alpha$ nu poate fi rădăcină a nici uneia din ecuaţiile $E_2(\alpha) = 0$, $E_3(x) = 0$, $E_4(x) = 0$.

Prin urmare, *dacă rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante transformă două din polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ în patratele unor numere negative, atunci ea este rădăcină a ecuaţiei algebrice iraţionale*

$$E_1(x) \equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0$$

şi numai a acesteia, dacă numai una din expresiile $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$ este negativă pentru $x = \alpha$, iar celelalte două pozitive.

Se observă că *aceea din expresiile $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$, trebuie să devină negativă pentru care există semnul minus în faţa polinomului care nu devine patratul unui număr negativ, atunci cînd x devine egal cu α.*

În fine, să considerăm cazul care a mai rămas, anume acela în care rădăcina reală $x = \alpha$ a ecuaţiei rezolvante transformă în patratul unui număr negativ unul singur din cele trei polinoame de sub radicalii ecuaţiilor algebrice iraţionale corespunzătoare ecuaţiei rezolvante. Şi tot pentru fixarea ideilor să admitem

$$P(\alpha) = (-A)^2 \quad , \quad Q(\alpha) = B \quad , \quad R(\alpha) = C,$$

unde A este un număr pozitiv, ca şi numerele B şi C, în baza teoremei I. Avem de astă dată:

$$E_1(\alpha)\,E_2(\alpha) = \{A + B - C\} - 2A\sqrt{B},$$
$$E_1(\alpha)\,E_3(\alpha) = \{A - B + C\} - 2A\sqrt{C},$$
$$E_1(\alpha)\,E_4(\alpha) = \{-A + B + C\} + 2\sqrt{BC},$$
$$E_2(\alpha)\,E_3(\alpha) = -\{-A + B + C\} + 2\sqrt{BC},$$
$$E_2(\alpha)\,E_4(\alpha) = -\{A - B + C\} - 2A\sqrt{C},$$
$$E_3(\alpha)\,E_4(\alpha) = -\{A + B - C\} - 2A\sqrt{B},$$

fapt care arată că şi de astă dată numai expresia $E_1(\alpha)$ poate fi nulă şi aceasta numai dacă avem simultan

$$A + B - C > 0 \ , \ A - B + C > 0 \ , \ -A + B + C < 0,$$

pentru motivul că în acest caz numai expresiile $E_1(\alpha)\,E_2(\alpha)$; $E_1(\alpha)\,E_3(\alpha)$; $E_1(\alpha)\,E_4(\alpha)$ sînt o diferenţă aritmetică de două numere pozitive, în timp ce expresiile $E_2(\alpha)\,E_4(\alpha)$; $E_3(\alpha)\,E_4(\alpha)$ sînt o sumă aritmetică de două numere negative, iar expresia $E_2(\alpha)\,E_3(\alpha)$ este o sumă aritmetică de două numere pozitive.

În concluzie, *dacă rădăcina reală* $x = \alpha$ *a ecuaţiei rezolvante transformă în patratul unui număr negativ numai unul din cele trei polinoame de sub radicalii ecuaţiilor algebrice iraţionale corespunzătoare, atunci ea este rădăcină pentru ecuaţia*

$$E_1(x) \equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0$$

şi numai pentru aceasta, dacă una din expresiile $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$, *este negativă pentru* $x = \alpha$, *iar celelalte două pozitive.*

Rezultatul este deci asemănător celui din cazul cînd rădăcina reală $x = \alpha$ transformă în patratele unor numere negative, două din polinoamele de subradicalii ecuaţiilor algebrice iraţionale corespunzătoare. Deosebirea constă numai în faptul că de astă dată *devine negativă acea din expresiile* $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$, *în care polinomul ce devine patratul unui număr negativ are semnul minus.*

Rezumînd acum rezultatele privind ultimele două cazuri, deoarece primul caz este inclus în aplicabilitatea teoremei II, avem

Teorema IV. — *Dacă rădăcina reală* $x = \alpha$ *a ecuaţiei rezolvante transformă în patratul unui număr negativ două sau unul din cele trei polinoame de sub radicalii ecuaţiilor algebrice iraţionale corespunzătoare, atunci ea este rădăcină a ecuaţiei algebrice iraţionale:*

$$E_1(x) \equiv \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{R(x)} = 0$$

şi numai a acesteia, dacă una din expresiile $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$ *este negativă, iar celelalte două pozitive pentru această valoare a lui* x, *şi anume aceea expresie trebuie să devină negativă care conţine semnul minus în faţa polinomului care devine sau nu patratul unui număr negativ, după cum unul sau două din polinoame devin patratele unui număr negativ.*

11. — Să exemplificăm şi rezultatul precedent considerînd în acest scop ecuaţia

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{13+11x} + 2\sqrt{2(1+x+x^2)} = 0 \tag{14}$$

căreia îi corespunde ecuaţia rezolvantă

$$16\{4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1\} \equiv 16(x^2 - 1)(4x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Rădăcinile sale sînt ± 1 şi $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$ aşa încît să vedem cum se repartizează rădăcinile reale, lăsînd discutarea repartizării rădăcinilor imaginare după ce vom face şi studiul acestora.

Avem în cazul acesta,

$$I_2(x) \equiv 6 + 2x - 8x^2; \quad I_3(x) \equiv -4 - 4x + 8x^2; \quad I_4(x) \equiv 20 + 20x + 8x^2,$$

rezultînd că $I_2(-1) < 0$, $I_3(-1) > 0$, $I_4(-1) > 0$,

Cum pentru $x = -1$ polinomul $1 + x + x^2$ este patratul unui număr negativ, după cum am mai văzut, înseamnă că $x = -1$ nu este o rădăcină a ecuaţiei considerate, ci a ecuaţiei

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{13+11x} + 2\sqrt{2(1+x+x^2)} = 0,$$

Conform teoriei, se constată că tocmai expresia $I_2(-1)$ este negativă, ea conţinînd cu semnul minus polinomul care devine patratul unui număr negativ. Acest rezultat se verifică imediat, deoarece pentru $x = -1$ cei trei radicali devin respectiv egali cu $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, iar

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \equiv 0.$$

În ceea ce priveşte rădăcina $x = 1$, avem $I_2(1) = I_3(1) = 0$, $I_4(1) = 48$, rezultînd conform teoriei că $x = 1$ este rădăcină comună ecuaţiei considerate şi ecuaţiei

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{13+11x} + 2\sqrt{2(1+x+x^2)} = 0.$$

Aceasta are loc fiindcă $x = 1$ anulează unul din polinoamele de sub radicali. Verificarea directă nu întîmpină nici o dificultate, căci cei trei radicali devin respectiv egali cu $0, 2\sqrt{6}, \sqrt{6}$, aşa încît cele două ecuaţii menţionate sînt verificate.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

DISPOZITIV DE TERMOSTATARE LA O TEMPERATURĂ SUPERIOARĂ TEMPERATURII MEDIULUI AMBIANT

Conf. univ. **VIRGIL PAVLU**

În lucrările de laborator şi în tehnică sînt numeroase cazurile în care temperatura trebuie menţinută constantă. În acest scop s-au construit numeroase modele de termostate, dintre care unele cu funcţiune automată şi de mare precizie.

Dispozitivul descris mai jos permite să se realizeze în mod comod o temperatură superioară mediului ambiant, menţinînd constant excesul de temperatură sau variindu-l după dorinţă. Dacă temperatura mediului ambiant este constantă, se menţine în mod automat temperatura constantă dorită; în cazul contrar excesul de temperatură se potriveşte astfel, încît temperatura să se menţină constantă.

Se ştie că echilibrul temperaturii unui corp se realizează atunci, cînd cantitatea de căldură primită de el prin radiere şi conductibilitate în unitate de timp este egală cu cantitatea cedată mediului ambiant în acelaşi interval de timp. Cantitatea de căldură cedată mediului ambiant este cu atît mai mare, cu cît temperatura lui este mai mare decît a mediului ambiant. Pentru a realiza echilibrul temperaturii, cînd aceasta este superioară mediului ambiant, este deci necesar să mărim cantitatea de căldură pe care o primeşte corpul şi anume

aşa încît aceasta să fie egală cu aceea pe care o pierde corpul pentru excesul de temperatură pe care vrem să-l realizăm. Aceasta se poate realiza cu ajutorul dispozitivului descris mai jos: asupra corpului, a cărui temperatură dorim să o menţinem constantă, lăsăm să cadă energie radiantă, din care el absoarbe cantitatea de energie corespunzătoare.

Energia radiantă absorbită, dozată în mod precis, este furnizată fie de un radiator electric, fie de o lampă electrică de putere adecvată, alimentată sub tensiune constantă, care se aşază în faţa mediului a cărui termostatare se urmăreşte, mereu în aceiaşi poziţie şi la aceiaşi distanţă, folosind mereu aceiaşi oglindă sau paravan, pentru ca aportul de energie radiantă să depindă numai de tensiunea de alimentare.

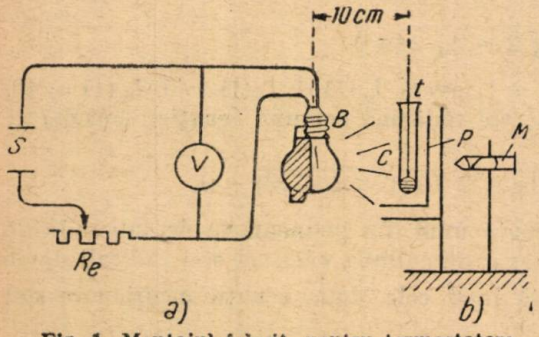


Fig. 1. Montajul folosit pentru termostatare.

Dacă mediul de termostatare este de dimensiune redusă se foloseşte drept sursă de energie radiantă un bec (B) de 120 V/60 W (fig. 1 a), alimentat de la o reţea cu tensiunea maximă de 120 V (S), putînd varia această tensiune cu un reostat avînd un cursor cu reglaj fin (Re). Tensiunea este indicată de un voltmetru (V) cu sensibilitate variabilă. Pentru orientarea energiei radiante spre mediul de termostatare (fig. 1b) s-a montat la bec, pe jumătate de circumferinţă, un paravan, care permite în acelaşi timp o vizibilitate foarte bună. Nu este indicată o oglindă sferică, deoarece ea ar concentra energia radiantă numai asupra mediului de termostatare, contribuind la producerea de curenţi de convecţie, ceea ce ar tulbura echilibrul termic ce urmează să se realizeze.

Drept mediu de termostatare se foloseşte spre exemplu o eprubetă (C) conţinînd 1/2 cm^3Hg şi 5 cm^3 apă, în care se introduce un termometru Celsius (t). Paravanul (*P*) este constituit dintr-un carton negru mat, îndoit şi aşezat sub eprubetă, în partea opusă becului; el asigură o încălzire mai omogenă şi reducerea la minim a curenţilor în mediul lichid. Cu ajutorul unui microscop (*M*) de putere măritoare foarte mică se urmăreşte nivelul mercurului pe scara termometrului şi o eventuală producere a curenţilor de convecţie în mediul lichid folosit (în acest scop se pune într-însul praf de cretă). Ne situăm deci în condiţia de lucru din polarografie, unde celula electrolitică este ceva asemănător şi unde este necesară o temperatură constantă şi o încălzire omogenă.

Se ştie că în polarografie se folosesc curbele etalon şi rezultatele obţinute au valoare comparativă, numai dacă înregistrările corespunzătoare determinărilor cantitative au fost făcute la aceiaşi temperatură; altfel, trebuie să facem corecţia de temperatură, adică avem o complicaţie în plus. În polarografie nu se pot satisface întotdeauna condiţiile de lucru în ce priveşte spaţiul; chiar prin aerisire, atunci cînd reacţiile chimice şi depozitarea reactivilor se face în camera în care se află polarograful temperatura variază mereu. Este deci mai simplu să realizăm în celula electrolitică temperatura constantă, egală cu aceea a curbelor etalon, care în acest scop se trasează la temperatura maximă a mediului ambiant, de exemplu 25 °C. Termostatele folosite în acest scop sînt precise, însă costisitoare, incomode şi voluminoase, împiedicînd de cele

mai multe ori vizibilitatea necesară pentru controlul temperaturii, vitezei de picurare a mercurului şi al poziţiei juste a capilarului. Toate aceste inconveniente pot fi înlăturate prin procedeul de termostatare descris.

Ora	Volţi	T.cel.	T.med.a.	Ora	Volţi	T.cel.	T. med. a.
0^h 0′	25	19,2 °C	19,2 °C	1^h 50′	65	24,1 °C	19 °C
» 5	»	19,6	»	» 55	»	24,5	»
» 10	»	19,8	»	» 60	»	24,8	»
» 15	30	19,8	»	2^h 5	80	24,8	»
» 20	»	20,0	»	» 10	»	25,5	»
» 25	»	20,1	»	» 15	»	25,9	»
» 30	»	20,2	»	» 20	»	26,3	»
» 35	»	20,3	»	» 25	»	26,5	»
» 40	»	20,4	»	» 30	»	26,7	»
» 45	35	20,4	»	» 35	95	26,7	»
» 50	»	20,6	»	» 40	»	27,1	»
» 55	»	20,8	»	» 45	»	27,7	»
» 60	40	20,8	19 °C	» 50	»	28,1	»
1^h 05′	»	21,0	»	» 55	»	28,7	»
» 10	»	21,2	»	» 60	110	28,7	»
» 15	»	21,4	»	3^h 05	»	29,5	»
» 20	50	21,4	»	» 10	»	30,1	»
» 25	»	21,6	»	» 15	»	30,7	»
» 30	»	21,8	»	» 20	»	30,9	»
» 35	»	21,8	»	» 25	»	31,1	»
» 40	»	22,8	»	» 30	»	31,2	»
» 45	»	23,5	»	» 35	»	31,2	»

Fig. 2. Temperaturile obţinute în mediul de termostatare în funcţie de tensiunea de alimentare a unui bec bispiralat de 120 V/60 W, aşezat la 10 cm depărtare.

Se lucrează în felul următor. Se măsoară distanţa dintre sursa radiantă şi obiectul de termostatat, evitîndu-se pe cît posibil curenţii de aer şi alte surse termice apropiate, de exemplu o lampă sau un bec cu gaz. Nu trebuie uitat faptul că însuşi reostatul constituie o sursă termică, deci trebuie aşezat mai departe de mediul de termostatare şi de termometrul care indică temperatura mediului ambiant. Cu ajutorul reostatului se aplică tensiuni din ce în ce mai mari becului şi pentru fiecare tensiune se urmăreşte temperatura în creştere a mediului de termostatat la intervale egale de timp, de exemplu din cinci în cinci minute, şi în momentul, cînd temperatura devine staţionară, se aplică tensiunea imediat crescătoare. Cu rezultatele obţinute se întocmeşte un tabel de valori (fig. 2).

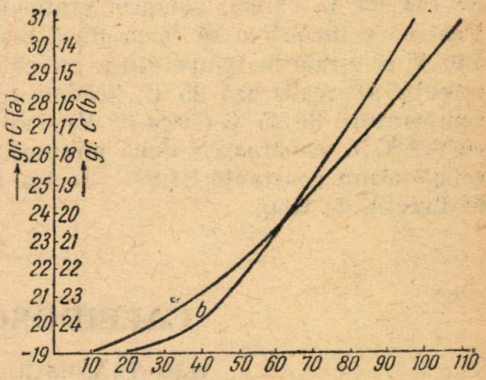


Fig. 3. Graficul creşterii de temperatură în funcţie de tensiunea de alimentare a becului: *a)* cînd temperatura mediului ambiant este constantă şi *b)* cînd temperatura finală este constantă.

Se întocmeşte graficul temperaturilor de echilibru în funcţie de tensiunea de alimentare a becului (fig. 3 a), temperatura mediului ambiant fiind constantă. Graficul acesta reprezintă curba de etalonare a dispozitivului pentru aceleaşi condiţii de lucru.

În mod asemănător se poate întocmi un grafic al excesului de temperatură în funcţie de tensiunea de alimentare a becului, pentru cazul cînd vrem să încălzim obiectul la aceiaşi temperatură (în cazul dat la 25 °C) temperatura mediului ambiant avînd valori crescătoare inferioare (fig. 3 b).

Din examinarea celor două curbe constatăm că ele se intersectează la 25 °C şi că acelaşi exces se realizează mai uşor (adică folosind o tensiune de alimentare a becului mai mică) la temperaturi mai mici, şi mai greu la temperaturi mai mari ale mediului ambiant.

Ora	Volţi	T. cel.	T. med. amb.
0′	110	19 °C	19°C
7′	65	25 °C	»
9′	»	25,2 °C	»
15′	»	25 °C	»
20′	»	24 9 °C	»
25	»	»	»

Fig. 4. Realizarea unei anumite temperaturi constante pornindu-se de la temperatura constantă 19 °C a mediului ambiant.

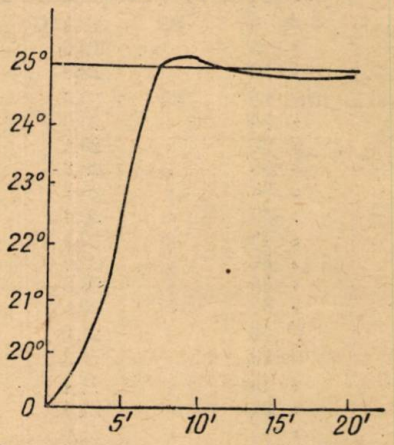


Fig.5. Graficul temperaturii în funcţie de timp la termostatare.

Dacă dorim să realizăm o anumită temperatură a mediului de termostatare, scădem din temperatura aceasta temperatura mediului ambiant şi obţinem excesul, iar cu ajutorul curbei de etalonare vedem care este tensiunea de alimentare a becului, care ne dă acest exces. De exemplu, pentru a obţine pentru mediul propus temperatura constantă 25 °C, temperatura mediului ambiant fiind 19 °C, urmează, în condiţiile de lucru date, să aplicăm becului o tensiune de cca 65 V, căreia, conform graficului, îi corespunde temperatura 24,8 °C. Pentru ca încălzirea să se producă mai repede, aplicăm mai întîiu tensiunea 110 V şi urmărim temperatura crescătoare a mediului (fig. 4). După circa 7 minute se realizează 25 °C. Scădem apoi tensiunea la aceea corespunzătoare temperaturii de 25 °C (circa 65 V) şi constatăm că temperatura a mai crescut cu 0,2 °C în următoarele două minute, pentru ca în minutul 15 să se realizeze temperatura constantă 24,9 °C. În fig. 5 este reprezentat graficul temperaturii în funcţie de timp.

CALEIDOSCOP FIZIC

ILIE STĂNESCU, profesor, Pucioasa

1. **Cum aprindem sau cum stingem un bec fără a folosi întrerupătorul?** Folosim transformatorul din laboratorul şcolii, de la care demontăm secundarul. Primarul se leagă în serie cu un bec şi montajul astfel realizat se introduce în priză (fig. 1 a). Becul nu se aprinde. Dacă îndepărtăm bucata de fier *AB*, becul se aprinde (fig. 1 b).Experienţa poate fi repetată.

Explicaţia. — Legea lui Lenz cu privire la sensul f.e.m. de inducţie. La schimbarea sensului unui curent electric sau la dispariţia lui, cîmpul

magnetic, prin inerţia lui, creează o f.e.m. de inducţie, care caută să menţină f.e.m. iniţială.

Curentul alternativ este întreţinut de o f.e.m. variabilă. Cînd f.e.m. a curentului alternativ îşi schimbă sensul, inerţia cîmpului magnetic creează o f.e.m. de inducţie, care se opune f.e.m. iniţiale. Astfel f.e.m. a curentului alternativ este în permanentă opoziţie cu f.e.m. de inducţie.

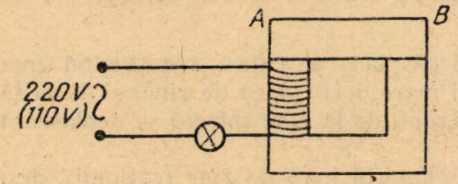


Fig. 1 *a*

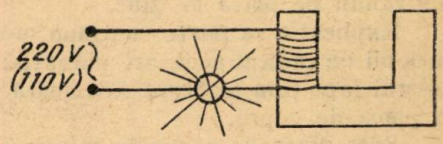


Fig. 1 *b*

Cînd bucata de fier moale *AB* închide circuitul fierului, liniile de forţă ale cîmpului magnetic nu ies în afară, fiind colectate toate de fierul moale. Inerţia magnetică fiind mare, f.e.m. este de asemenea mare şi anulează sau minimalizează pe cea iniţială.

Cînd bucata *AB* este îndepărtată, circuitul de fier este întrerupt. Liniile de forţă ale cîmpului magnetic nu mai sînt grupate toate prin bucata de fier, adică o parte se răspîndesc în spaţiu. Inerţia magnetică este mică, deci f.e.m. de inducţie este de asemenea mică şi nu poate anula (minimaliza) pe cea iniţială, de aceea becul se aprinde.

2. **Anionii circulă spre catod şi cationii spre anod.** — Folosim pentru demonstrare un voltametru (fig. 2 a), alcătuit dintr-o baie de $ZnSO_4$ şi electrozi de zinc (anodul) şi cupru (catodul). Se ştie că $ZnSO_4$ se disociază în Zn^{++} şi SO_4^{--}.

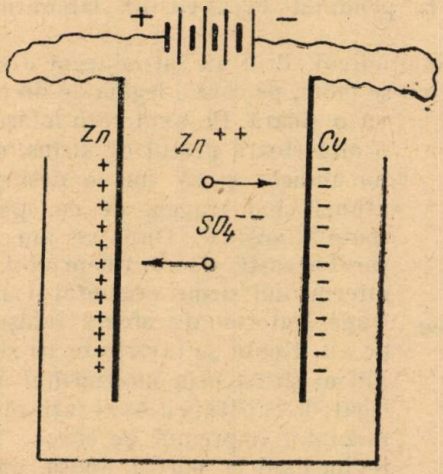


Fig. 2 *a*

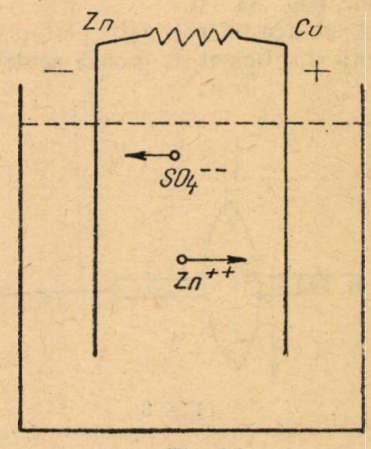


Fig. 2 *b*

Ionii de zinc, fiind pozitivi, se deplasează la catod şi se numesc cationi, iar ionii de radical acid, fiind negativi, se deplasează la anod şi se numesc anioni.

În elementul Volta (fig. 2 b) electrozii sînt de zinc şi cupru, iar baia electrolitică se poate lua de $ZnSO_4$. Sulfatul de zinc se disociază în ioni de zinc

pozitivi şi radicali acizi negativi. Radicalul acid în stare ionică atacă mai puternic zincul, formînd $ZnSO_4$ şi lăsînd pe placă electronii care-i dădeau sarcina.

Zincul, electrizîndu-se negativ, constituie polul negativ — catodul. De ce ionii radicalului acid, care sînt anioni, vin la placa de zinc, adică la catod?

$$ZnSO_4 \rightleftarrows Zn^{++} + SO_4^{--},$$

$$SO_4^{--} + Zn = ZnSO_4 + 2e \quad ; \ (e = \text{electron})$$

2 *e* rămîn pe placa de zinc.

Explicaţia se poate continua arătînd că placa de cupru, reacţionînd greu cu ionii de radical acid, are potenţial mai mare decît placa de zinc, şi datorită acestui fapt prin legătura exterioară electronii de la zinc (placă) se deplasează la placa de cupru.

Spre placa de cupru în soluţie se deplasează ionii de zinc (cationii), deşi placa de cupru constituie anodul. De ce în elementul Volta se produce această schimbare? Numai în elementul Volta se produce acest fenomen?

Explicaţie. — În voltametru ionii se deplasează sub influenţa cîmpului electric creat de sarcinile existente pe electrozi, provenind de la sursă. Deplasarea ionilor producîndu-se într-un cîmp electric, forţele care o determină se datoresc interacţiunii sarcinilor electrice (deci sînt coulombiene).

În elementele galvanice, deci şi în elementul Volta, deplasarea ionilor nu se face sub influenţa cîmpului electric, deoarece iniţial acesta nu există. Ionii se deplasează în elementele galvanice datorită forţelor de reacţie chimice. În elementul Volta ionii radicalului acid se deplasează spre placa de zinc, întrucît forţa de reacţie a zincului cu radicalul acid este mai puternică decît forţa de reacţie dintre cupru şi radicalul acid. Energia chimică se transformă astfel în energie electrică.

3. **De ce o roată stă cu axul orizontal, deşi este suspendată numai de un capăt al axului?** Folosim roata de la pendulul Maxwell din laboratoarele şcolilor. (fig. 3)

Axul acestei roţi este perforat longitudinal. Prin ax introducem o sîrmă dreaptă şi suficient de groasă pentru a nu se îndoi, pe care o legăm de un capăt cu o sfoară. Pe axul roţii înfăşurăm o altă sfoară destul de strîns, ca să nu alunece şi să nu se desfăşoare atunci cînd tragem de ea, punînd roata în mişcare. După ce am înfăşurat această sfoară, ţinem axul prin intermediul sîrmei orizontal şi cineva trage puternic de sfoara înfăşurată pe ax. Roata se învîrteşte pe sîrmă. Ţinem sîrma prin intermediul sforii legate la capătul ei. Axul roţii rămîne orizontal împreună cu sîrma. Dacă lovim axul la partea opusă, în loc să devină vertical el se deplasează tot în planul orizontal. Dece?

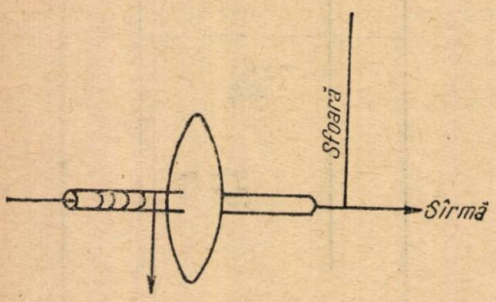


Fig. 3

Explicaţie. — Conform legii I-a a mecanicii, orice corp tinde să-şi păstreze starea de repaus sau mişcare rectilinie uniformă. În mişcarea ei de rotaţie roata tinde să-şi menţină planul de rotaţie. Intervine aici inerţia axului de rotaţie al unui rigid. Orice rigid în rotaţie tinde să-şi menţină axul de rotaţie. În cazul descris roata, adică rigidul, îşi menţine axul de rotaţie orizontal.

CÎTEVA PROBLEME DISTRACTIVE TRATATE LA ŞEDINŢELE CERCULUI DE MATEMATICĂ A ŞCOLII NOASTRE

ELEMER KISS

profesor şcoala medie nr. 2 „F. Bolyai" Tg. Mureş

1. **In fiecare şedinţă a cercului de matematică** al claselor IX şi X din şcoala noastră se propune şi se rezolvă pe lîngă alte probleme, şi cîte o problemă distractivă. Printre astfel de probleme sînt dintre acelea care nu se pot rezolva cu metodele obişnuite, învăţate în şcoală, sînt « demonstraţii » greşite, aşa numitele « probleme logice » etc. Aceste probleme trezesc interesul elevilor faţă de matematică, sînt foarte atrăgătoare şi distractive şi se pot trage concluzii preţioase la discutarea lor. Desigur că ele constituiesc numai partea mică a muncii în cadrul cercului, însă introducerea problemelor de acest gen îmbogăţeşte şi dă un colorit variat şedinţelor noastre. Scopul acestui articol este de a arăta cîteva din problemele discutate.

2. **Istoria matematicii cunoaşte multe probleme** a căror rezolvare a preocupat pe mulţi dintre matematicieni, cîteodată şi pe alţii. În trecut, veacuri de-a rîndul oamenii se chinuiau cu căutarea soluţiilor acestor probleme. Să ne gîndim numai la problema paralelelor, la teoremele lui *Fermat*, *Goldbach* sau la cele trei probleme clasice ale antichităţii: trisecţiunea unghiului, dublarea cubului şi cuadratura cercului. Unele dintre ele nu au fost rezolvate mult timp, altele nu sînt rezolvate nici azi. Unele sînt chiar nerezolvabile, şi în acest caz trebuie arătat tocmai acest fapt. Să urmărim de exemplu, o problemă elementară care este nerezolvabilă.

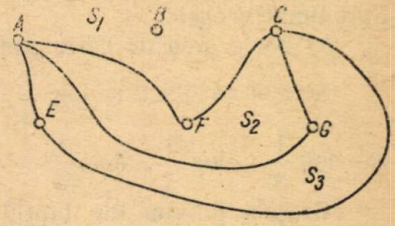


Fig. 1

Poate că mulţi cititori s-au întîlnit cu următoarea problemă: Din trei locuinţe A, B, C trebuie duse cîte trei cărări la o fîntînă E, la un grajd F şi la un pom G, în aşa fel ca ele să nu se intersecteze.

Încercările nu ne conduc la aflarea soluţiei. Vom arăta că nu se poate rezolva această problemă. Unim A şi C cu E şi F şi cu G (fig. 1). Putem constata că liniile au împărţit planul în trei părţi (S_1, S_2, S_3). A treia locuinţă B, se găseşte într-una din aceste părţi. Dacă se găseşte în S_1 atunci este în afara liniei care închide pe G: dacă este în S_2 atunci este în aceiaşi parte a planului care nu conţine pe E, iar dacă este în S_3 nu putem ajunge la grajdul F fără a intersecta una din cărări.

3. **Se poate învăţa mult şi din studierea « demonstraţiilor » greşite.**

Iată cîteva exemple: Să se « demonstreze » că 1 000 000 este aproximativ egal cu $\approx$ 2 000 000.

Ştim că dacă N este un număr mare, atunci

$$N \approx N + 1.$$

Punem în locul lui N, 1 000 000, 1 000 001, 1 000 002,···, 1 999 999 şi avem:

$$1\,000\,000 \approx 1\,000\,001$$

$$1\,000\,001 \approx 1\,000\,002$$

$$1\,000\,002 \approx 1\,000\,003$$

.....

.....

$$1\,999\,999 \approx 2\,000\,000$$

Înmulţim membrii din partea stîngă şi din partea dreaptă şi găsim:

$$1\,000\,000 \cdot 1\,000\,001 \cdot 1\,000\,002 \cdot \cdots \cdot 1\,999\,999 \approx$$

$$\approx 1\,000\,0001 \cdot 1\,000\,002 \cdot 1\,000\,003 \cdot \cdots \cdot 2\,000\,000$$

După simplificare rămîne $1\,000\,000 \approx 2\,000\,000$.

Greşala provine din acumularea erorilor celor 1 000 000 de inegalităţi. Generalizînd rezultatul găsit, putem spune că toate numerele mari sînt aproximativ egale.

b) Nu e greu de găsit greşala în « demonstraţia » următoare:

Scriem că $3 > 2$ şi $\log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2}$; după înmulţire, $3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}$ sau $\log \frac{1}{8} > \log \frac{1}{4}$, deci $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$.

Greşala provine din faptul că am înmulţit ambii termeni ai inegalităţii $3 > 2$ cu numărul negativ $\log \frac{1}{2}$.

c) Este interesantă şi următoarea problemă:

Pornim de la identitatea trigonometrică $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Ridicăm ambii membri la puterea $\frac{3}{2}$ şi avem: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$. Adunăm numărul 3 la fiecare membru al identităţii şi înmulţim suma găsită cu numărul 2:

$$2(\cos^3 x + 3) = 2\left[(1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3\right].$$

Să punem acum în locul lui x numărul π. Deoarece $\cos \pi = -1$, $\cos^3 \pi = -1$ şi $\sin \pi = 0$, găsim $2(-1 + 3) = 2\,(1 + 3)$, adică

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 4.$$

Observare. Punînd în locul lui x, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{\pi}{4}$ găsim identităţi. Unde sînt greşelile? Propunem cititorului să le găsească.

4. **La învățarea sistemelor de numerație putem introduce un joc interesant.** Propunem cititorilor să țină minte figura alăturată și să o deseneze fără a se mai uita la ea. Nu vom reuși cu ușurință. Să ne gîndim la sistemul de numerație cu baza 2 și să ne închipuim că în locul steluțelor este situată cîte o cifră 1, iar unde nu sînt steluțe este cifra 0. În acest fel putem spune că fiecare rînd este un număr scris în sistemul de numerație cu baza 2. Transformăm aceste numere în sistemul de numerație cu baza 10 și le memorizăm. La alcătuirea figurii nu ne rămîne decît să procedăm invers. În cazul nostru

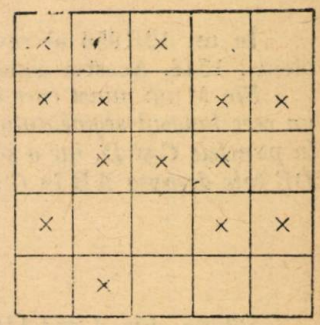


Fig. 2

10100	transcriind în sistemul 20
11011	de numerație cu baza 10, 27
01110	găsim: 16
10011	19
01000	8

Deci, prin cunoașterea sistemului de numerație cu baza 2 putem reconstitui cu ușurință figura 2.

5. **Putem alege multe probleme și din geometrie.** Ne ocupăm numai de una din ele.

Se știe că la construcții grafice se folosesc două instrumente: rigla și compasul. Oare nu s-ar putea construi figurile geometrice numai cu rigla sau numai cu compasul? Astfel de probleme a propus Napoleon matematicienilor francezi, după ce s-a întors din Italia Acolo citise cartea matematicianului italian *Mascheroni* « La geometria del compaso » în care se arată cum se construiesc figurile geometrice numai cu compasul. Problema propusă de el era următoarea:

Să se împartă numai cu ajutorul compasului, o circonferință cu un centru dat, în patru părți egale.

Soluția problemei se găsește în cartea profesorului sovietic *Perelman* « Geometria distractivă ».

Problema noastră: să se împartă diagonala unui paralelogram în trei părți egale, folosind numai compasul!

Se cunoaște următoarea teoremă: dacă $\overline{AE} = \overline{ED}$ și $\overline{BF} = \overline{FC}$ în paralelogramul $ABCD$, atunci unind B cu E și D cu F aceste drepte împart diagonala $\overline{AC}$ în trei părți egale, adică $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NC}$. Deci, trebuie căutat mijlocul laturii $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ numai cu compasul.

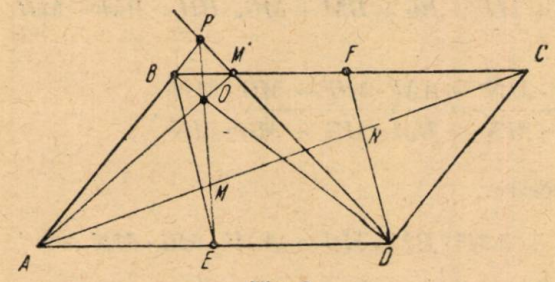


Fig. 3

Fie M' un punct oarecare pe latura BC. Diagonalele trapezului $ABM'D$ se întîlnesc în punctul O, iar laturile neparalele în punctul P. Unind P cu O și prelungind găsim punctul E căutat (demonstrația nu este grea). La fel se găsește și punctul F.

Vedeți că la această construcție nu s-a folosit de loc rigla, toate operațiile s-au putut realiza numai cu compasul. Problema se poate rezolva și altfel.

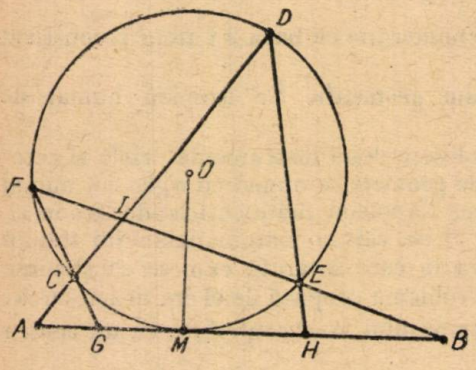
Asupra problemei 1548

În nr. 12/1956 al revistei « G.M.F.» seria B, a apărut generalizarea problemei 1548. Acestei generalizări i se mai poate da şi o altă formă:

Fie M un punct care împarte segmentul AB într-un raport oarecare. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C şi D, iar o secantă dusă din B taie cercul în E şi F. Dreptele CF şi DE taie dreapta AB în G şi H. Există relaţia

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{MH}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{MG}.$$

Soluţie. Fie $I \equiv (AD, BF)$. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AIB tăiat de transversalele FCG şi DEH obţinem:



$$\frac{CA}{CI}\cdot\frac{FI}{FB}\cdot\frac{GB}{GA}=1 \quad , \tag{1}$$

$$\frac{HB}{HA}\cdot\frac{DA}{DI}\cdot\frac{EI}{EB}=1. \tag{2}$$

Dar:

$$AC\cdot AD = AM^2, \tag{3}$$

$$BE\cdot BF = BM^2, \tag{4}$$

$$IC\cdot ID = FI\cdot EI. \tag{5}$$

Înmulţind relaţiile (1), (2), (3), (4) şi (5) avem:

$$\frac{AM^2}{BM^2}=\frac{AG\cdot AN}{BG\cdot BH} \tag{6}$$

Dar $AG = AM - MG$, $AH = AM + MH$; $BG = BM + MG$, $BH = BM - MH$. Relaţia (6) devine:

$$\frac{AM^2}{BM^2}=\frac{AM^2+AM\cdot MN-AM\cdot MG-MG\cdot MN}{BM^2-BM\cdot MN+BM\cdot MG-MG\cdot MN},$$

Desfiinţînd numitorii obţinem succesiv:

$$AM^2\cdot BM^2-AM^2\cdot BM\cdot MH+AM^2\cdot BM\cdot MG-AM^2\cdot MG\cdot MN=$$

$$=AM^2\cdot BM^2+BM^2\cdot AM\cdot MH-BM^2\cdot AM\cdot MG-BM^2\cdot MG\cdot MH$$

sau

$$-AM^2\cdot BM\,(MH-MG)-AM^2\cdot MG\cdot MN=AM\cdot BM^2\,(MN-MG)-$$

$$-BM^2\cdot MG\cdot MH$$

sau

$$BM^2 \cdot MG \cdot MN - AM^2 \cdot MG \cdot MH = AM^2 \cdot BM \cdot (MN - MG) + \\ + AM \cdot BM^2 (MN - MG)$$

sau

$$MG \cdot MH\,(BM - AM)\;(AM + BM) = AM \cdot BM\,(MH - MG)\;(AM + BM)$$

sau

$$\frac{BM - AM}{AM \cdot BM} = \frac{MH - MG}{MN - MG}$$

sau

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \frac{1}{MG} - \frac{1}{MN}$$

adică:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{MN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{MG}.$$

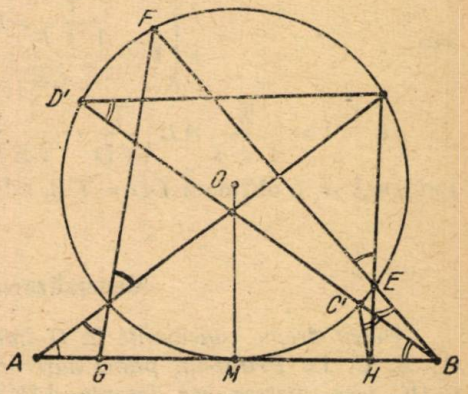
Cînd $AM = BM$, $MH = MG$, deci $AG = BH$ şi în acest caz avem problema 1548.

Observare. Problema 1548 poate fi rezolvată şi geoemtric. Astfel, considerăm $AM = BM$.

Soluţie. Fie $D'C'B$ simetria lui DCA faţă de diametrul ce trece prin M. Avem evident:

$$AC = BC' \;;$$

$$\sphericalangle\, D'BA = \sphericalangle\, BD'D = \sphericalangle\, DAB.$$



Deoarece patrulaterul $D'DEC$ este inscriptibil, se observă că: $\sphericalangle\, BD'D = \sphericalangle\, C'EH$ dar cum $\sphericalangle\, BD'D = \sphericalangle\, D'BA$, rezultă că patrulaterul $BEC'H$ este inscriptibil, deci:

$$\sphericalangle\, HC'B = \sphericalangle\, HEB = \sphericalangle\, FED = \sphericalangle\, FCD = \sphericalangle\, ACG,$$

adică,

$$\sphericalangle\, ACG = \sphericalangle\, H'CB$$

şi cum $AC = BC'$ şi $\sphericalangle\, CAG = \sphericalangle\, C'BH$, rezultă că triunghiurile ACG şi $BC'H$ sînt egale, adică $AG = HB$.

Teodorescu Nicolae, clasa X s.m.b. nr. 2 Bucureşti

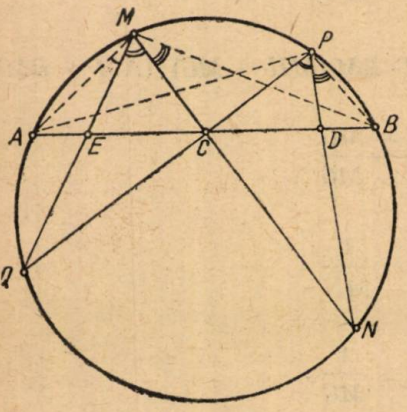
Generalizarea problemei 2221

Într-un cerc, prin punctul C al unei coarde AB, astfel ca $AC = k.CB$, se duc coardele MN şi PQ. Fie D şi E intersecţiile dreptei AB cu dreptele PN şi MQ respectiv. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{k^2 - 1}{k} \cdot \frac{1}{AB} = \frac{1}{CD} - \frac{1}{CE}.$$

Soluție. Raportul anarmonic al unui fascicol depinde numai de unghiurile dintre razele fascicolului, adică

$$M(AQNB) = P(AQNB) \quad \text{sau} \quad (AECB) = (ACDB).$$



Mai putem scrie

$$\frac{CA}{CE} : \frac{BA}{BE} = \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}.$$

Cum $AC = k.\ CB$ rezultă $k\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{DA}{DC}$ sau:

$$(1) \qquad k\left(1 + \frac{BC}{CE}\right) = 1 + \frac{AC}{DC}.$$

Dar $AC = k\text{-}CB = k\,(AB - AC)$, de unde $AC = \dfrac{k}{1+k}\,AB$ și $CB = \dfrac{1}{1+k}\,AB$, deci (1) devine

$$\text{sau} \qquad k\left(1 + \frac{\frac{1}{1+k}AB}{CE}\right) = 1 + \frac{\frac{k}{1+k}AB}{CD}$$

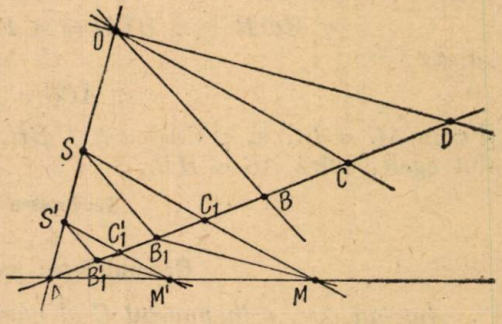
$$k - 1 = \frac{k}{1+k}\,AB\left(\frac{1}{CD} - \frac{1}{CE}\right) \quad \text{sau} \quad \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{1}{AB} = \frac{1}{CD} - \frac{1}{CE}.$$

Pentru $k = 1$ obținem $CD = CE$, adică problema 2221.

Gh. I. Bercea, student Timișoara

Generalizarea problemei 2267

Patru drepte concurente în O interesectează o a cincea dreaptă în punctele A, B, C, D. Printr-un punct oarecare S al dreptei OA ducem paralele la OB și OC care intersectează dreapta ABCD în B_1 și C_1. Prin B_1 ducem o dreaptă paralelă la OD care intersectează pe SC_1 în M. Să se afle locul geometric al punctului M.



Soluție. Considerăm două puncte S și S' pe OA și construim triunghiurile SB_1C_1, $S'B_1'C_1'$ precum și punctele M și M'. Observăm că triunghiurile SB_1C_1, $S'B_1'C_1'$ și B_1C_1M, $B_1'C_1'M'$ sînt asemenea. Prin urmare:

$$\frac{SC_1}{S'C_1'} = \frac{B_1C_1}{B_1'C_1'} \quad \text{și} \quad \frac{C_1M}{C_1'M'} = \frac{B_1C_1}{B_1'C_1'}.$$

Comparînd cele două proprietăți deducem că:

$$\frac{SC_1}{S'C_1'} = \frac{C_1M}{C_1'M'} \quad \text{sau} \quad \frac{SC_1}{C_1M} = \frac{S'C_1'}{C_1'M'},$$

de unde rezultă că punctele A, M, M' sînt colineare, deci locul geometric căutat este o dreaptă ce trece prin A.

Cazuri particulare. 1° Dreapta OD este paralelă cu bisectoarea unghiului OBC şi de asemenea, paralelă cu bisectoarea unghiului OCB. Rezultă că picioarele bisectoarelor din B_1 şi C_1 ale triunghiului SB_1C_1 descriu drepte ce trec prin A şi aceasta constituie soluţia problemei nr. 2267 (G.M.F. seria B, nr. 7/1956).

2° Dreapta OD este paralelă cu o direcţie perpendiculară pe OC şi de asemenea cu o direcţie perpendiculară pe OB. Rezultă că:

Picioarele înălţimilor din B_1 şi C_1 ale triunghiului S_1B_1C descriu drepte ce trec prin A.

3° Dreapta OD este paralelă cu mediana din B şi apoi cu mediana din C în triunghiul OBC. Deoarece medianele din B_1 şi C_1 în triunghiul SB_1C_1 păstrează direcţiile medianelor din B şi C din triunghiul OBC, rezultă că mijloacele laturilor SB_1 şi SC_1 este evident că descriu drepte ce trec prin A.

4° Simediana e simetrică medianei faţă de bisectoarea aceluiaşi vîrf. Medianele şi bisectoarele din B_1 şi C_1 în triunghiul SB_1C_1 păstrează direcţiile medianelor şi bisectoarelor din B şi C din triunghiul OBC. Prin urmare, şi simedianele din B_1 şi C_1 păstrează direcţiile simedianelor din B şi C. Picioarele simedianelor din B_1 şi C_1 ale triunghiului SB_1C_1 descriu drepte ce trec prin A.

Florin Constantinescu, student Cluj

NOUTĂŢI DIN ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ

1. Sincrofazotronul de la Institutul unificat de cercetări nucleare. Recent a fost anunţată punerea în funcţiune la Institutul unificat de cercetări nucleare, al cărui membru este şi ţara noastră, a celui mai mare accelerator de particule elementare — sincrofazotronul de 8,3 miliarde electron-volţi, cu mult înainte de termenul prevăzut (1960). Acest accelerator este proiectat să imprime particulelor energii pînă la 10 BeV. [1])

Gigantica instalaţie de la Dubna — sediul Institutului unificat — este opera comună a unei serii de mari savanţi şi ingineri sovietici şi constituie un instrument foarte puternic pentru cercetarea problemelor încă nerezolvate ale fizicii nucleare: forţele nucleare, legile de interacţie ale nucleonilor, studiul mezonilor, hiperonilor etc. Aceste probleme fac de altfel, obiectul de studii al Laboratorului de fizică a energiilor înalte din cadrul institutului condus de prof. V. Vexler, membru corespondent al Academiei de ştiinţe a URSS.

Sincrofazotronul funcţionează pe aşa numitul principiu al autofazării descoperit de prof. V. Vexler (1944) şi independent de fizicianul american Mac Millan (1945).

Acest principiu constă în creşterea frecvenţei cîmpului electric accelerator pe măsura reducerii perioadei de rotaţie a particulei în tubul de accelerare, datorită creşterii intensităţii cîmpului magnetic. Proiectarea şi construcţia acestor acceleratori moderni comportă o serie de probleme extrem de dificile ca: stabilitatea traiectoriei, realizarea unui vid înaintat, injectarea particulelor,

[1]) 1 BeV = 1 miliard electron-volţi.

măsurarea exactă a cîmpurilor electromagnetice etc, probleme care au fost rezolvate cu succes la noul sincrofazotron.

Iată acum şi cîteva date tehnice: electromagnetul cîntăreşte 36 mii tone, diametrul mediu al inelului de oţel care formează tubul de accelerare este de 60 m, iar presiunea realizată în tub este de 10^{-9}atm. O particulă accelerată face peste 1 300 000 rotaţii pe secundă şi ajunge la o viteză de 210 000 km/s, adică aproape de viteza luminii. Sincrofazotronul este echipat cu cele mai perfecţionate aparate de măsură şi telecomandă electronice, ceea ce asigură o exploatare judicioasă şi lipsită de pericole.

Strălucita realizare a ştiinţei şi tehnicii sovietice constituie un aport preţios la cauza progresului mondial.

2. Semiconductori. An de an importanţa semiconductorilor în ştiinţă şi tehnică devine tot mai mare. Astăzi nu există nici un domeniu din tehnică unde să nu se utilizeze semiconductori într-o măsură sau alta. Probleme care nu puteau fi rezolvate în principiu, cu ajutorul vechilor mijloace tehnice, sînt astăzi rezolvate cu ajutorul semiconductorilor.

Cu ajutorul dispozitivelor bazate pe semiconductori se realizează transformarea curentului alternativ în curent continuu, se asigură protecţia liniilor electrice la supratensiuni, se transformă direct energia termică şi luminoasă în energie electrică, se amplifică oscilaţiile electromagnetice, se produce frig în frigidere speciale, se pot determina temperaturi etc. Iată cîteva din aparatele care funcţionează pe bază de semiconductori.

a) Detectori cu cristal. Detectorul cu cristal de germaniu sau de siliciu cu dimensiuni de circa $1{,}5 \times 1.5 \times 0{,}5$ mm, a căpătat o largă răspîndire în tehnica undelor ultrascurte, fiind practic, de neînlocuit. Ei au stabilitatea mecanică înaltă şi o mare durată de funcţionare (cel puţin 10 000 de ore de funcţionare continuă). În ultimii ani cercetările au condus la elaborarea unei diode cu germaniu «dioda p-n» care funcţionează ca redresor atingînd un randament de 98 %. Ea poate suporta fără să se deterioreze, tensiuni inverse pînă la 600 volţi şi poate lăsa să treacă în sens direct un curent a cărui densitate atinge 10A/cm^2 la o tensiune de numai 1 volt.

b). Amplifcatori cu cristal (tranzistorii) înlocuiesc tuburile electronice cu trei electrozi în toate funcţiunile lor. Ei se construiesc fie cu cristal de germaniu, fie cu cristal de siliciu. Apariţia diodelor şi triodelor cu germaniu deschid noi perspective în radiotehnică. Astăzi se fabrică receptoare şi emiţătoare de radio care ocupă un volum cu puţin mai mare decît cel ocupat de o cutie de chibrituri.

Amplificarea în tensiune a tranzistorului poate fi de cîteva sute de ori.

c) Bateria solară. Bateria solară nu este altceva decît un mozaic de celule fotoelectrice de un anumit tip, grupate în serie şi în paralel. Celulele fotoelectrice sînt de tipul fotovoltaic. Sub acţiunea unui fascicul de radiaţii se produce între cei doi electrozi un curent electric. Transformarea energiei radiante în energie electrică are loc cu un randament foarte mare. Cu o asemenea baterie se poate culege într-o zi cu soare o putere de 50 waţi pe metru pătrat, ceea ce înseamnă că nevoile curente menajere ale unei familii ar putea fi satisfăcute cu o baterie solară de 10 m^2 aşezată pe acoperişul casei. În prezent bateriile solare sînt folosite la alimentarea staţiilor de amplificare telefonice, a aparatelor de radiorecepţie, la încărcarea bateriilor de acumulatori şi în alte cazuri asemănătoare.

d) Bateria atomică. — Este un mic aparat care constituie una din ultimele invenţii în domeniul electronicii semiconductorilor. Construcţia nu diferă în

principiu de aceea a bateriei solare. În bateria atomică se folosesc proprietăţile ionizante ale radiaţiilor radioactive (alfa, beta, gama) produse de un preparat radioactiv. În scopul indicat sînt folosite radiaţiile beta emise de stronţiu 90 avînd o activitate de 50 milicurie (o cantitate de 0,005 g din acest material produce o activitate de un curie). Calculele arată că dacă s-ar folosi 7,5 curie Sr 90, puterea bateriei ar ajunge la 0,1 waţi/cm^2, deci comparabilă cu aceea a bateriei solare. O astfel de baterie este valoroasă nu pentru a constitui o sursă de energie, ci pentru că tensiunea şi curentul sînt constante, au o viaţă lungă (20 de ani în cazul stronţiului 90) şi nu este influenţată de variaţiile de temperatură, presiune sau cîmpuri electrice şi magnetice exterioare.

e) Frigiderul termoelectric. Este un aparat de mare simplicitate şi robusteţe destinat să înlocuiască actualele frigidere de uz casnic. Frigiderele termoelectrice au multe avantaje; nu au nici un fel de părţi mobile, au durată de funcţionare de mai mulţi ani şi un randamnt destul de mare.

f) Microrezistenţa termică. Acest aparat de dimensiuni mici şi inerţie termică mică a condiţionat larga lui utilizare în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii. Conectat la unul din braţele punţii lui Wheatstone aparatul permite măsurarea temperaturii cu o mare precizie şi foarte repede. Cu ajutorul unui astfel de aparat au fost determinate temperaturile frunzelor multor plante aflate în condiţii diferite de existenţă, au fost studiate procesele schimburilor de căldură cu mediul exterior, poate fi introdus în vasele sanguine sau într-un organ bolnav al omului, pentru stabilirea unui diagnostic, se pot măsura vitezele de mişcare ale mediilor lichide şi gazoase, se poate regla temperatura, se poate stabiliza o tensiune electrică etc.

Deoarece este imposibil să epuizăm complet expunerea ultimelor aplicaţii ale semiconductorilor, ne-am mulţumit să prezentăm doar descrierile sumare a cîtorva aparate mai importante bazate pe semiconductori, apărute în ultimii ani.

Ritmul de dezvoltare se accelerează tot mai mult, fiecare zi aducînd ceva nou în acest domeniu al fizicii şi tehnicii actuale.

3. Helicopterele. După cel de-al doilea război mondial construcţia helicopterelor este în continuă creştere. Ca şi la avioane, motoarele helicopterelor sînt cu sau fără reacţie.

La helicopterul cu reacţie motorul nu serveşte decît să producă aer comprimat, care este astfel dirijat, încît să iasă pe la capetele paletelor aşezate în cruce; acestea se mişcă în sens opus ieşirii aerului prin reacţie.

Helicoperele actuale sînt maşini sigure şi foarte utile. Ele pot ridica o greutate mai mare decît greutatea lor (un helicopter care cîntăreşte 300 kg, poate să ridice o greutate de 400 kg), pot ateriza pe acoperişul unei case sau în curtea unei locuinţe şi pot de asemenea să decoleze în aceleaşi condiţii. Viteza lor este de 170—180 km/h, pot să se ridice la înălţimi de peste 8000 metri şi să stea în aer 10—12 ore (recordul mondial de durată este de 14 ore).

Întreţinerea lor este însă pretenţioasă. Astfel, pentru o oră de zbor trebuie să se socotească de la 4 la 20 de ore pentru revizuire şi înlocuire de piese, iar piesele sînt foarte scumpe.

Aceste inconveniente sînt însă răsplătite prin serviciile pe care le aduc. Iată cîteva:

— pot să transporte materiale şi personal pe şantierele situate la mari înălţimi, de exemplu pe munţi;

— servesc pentru inspectarea liniilor de înaltă tensiune;

— transportă medici şi răniţi în cazuri de naufragii, inundaţii, accidente de alpinism;

— pot servi pentru detectarea incendiilor în păduri şi pentru împrăştierea insecticidelor deasupra culturilor;

— pot să decoleze şi să aterizeze în plin centrul unui oraş;

— sînt foarte sigure, astfel, chiar dacă s-ar rupe o paletă — ceea ce este exclus — şi s-ar strica motorul, helicopterul poate ateriza în bune condiţii de la mii de metri înălţime, deoarece în cădere paletele se învîrtesc datorită curentului care se formează şi în felul acesta se frînează căderea.

Se construiesc astăzi helicoptere de transport de mare capacitate. Cel mai puternic existent astăzi este helicopterul « Hugues — 17 », care are un rotor cu un diametru de 40 metri. Această « moară » zburătoare poate să ridice deodată, 25 maşini (de un tip mic) şi să le transporte la o distanţă de peste 100 km depărtare.

V.A.

IN AJUTORUL TINERILOR CARE SE ÎNDREAPTĂ CĂTRE INSTITUTELE DE ÎNVĂŢĂMÎNT SUPERIOR

INSTITUTUL PEDAGOGIC—TIMIŞOARA

CONSTANTIN POPA

Director adjunct la Inst. Pedagogic—Timişoara

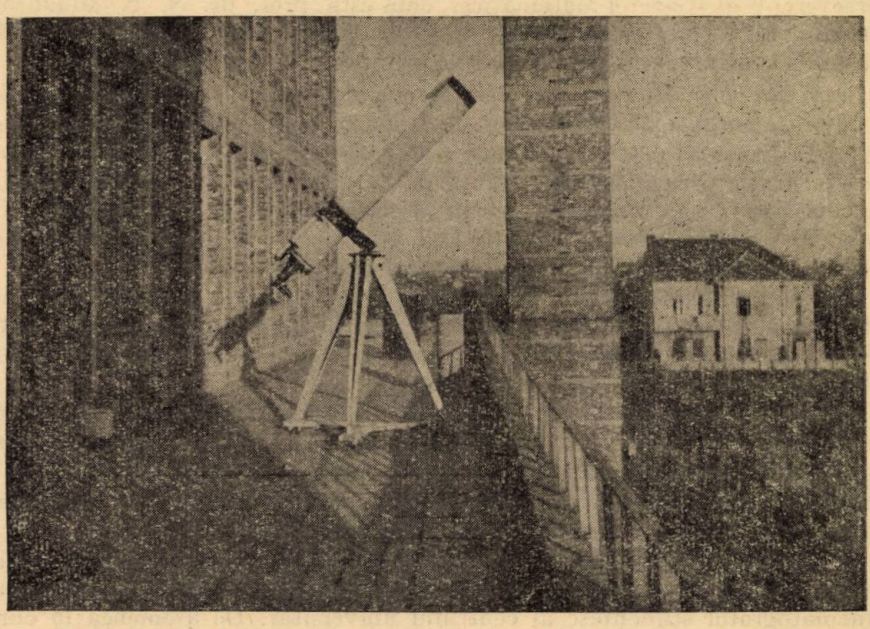
INSTITUTUL pedagogic din Timişoara a luat fiinţă în anul 1948, anul marii reforme a învăţămîntului din ţara noastră care a deschis porţile şcolilor pentru fiii muncitorilor şi ţăranilor care pînă atunci nu avuseseră posibilităţi efective de a studia. Lărgirea considerabilă a reţelei şcolare a pus acut problema cadrelor de specialitate care să predea în aceste şcoli, să instruiască şi să educe în spirit nou, socialist, tineretul nostru, în faţa căruia stă misiunea grea şi plină de răspunderi a construirii socialismului în ţara noastră.

Vechile universităţi din ţara noastră s-au dovedit insuficiente pentru pregătirea cadrelor de profesori şi de aceea s-a luat hotărîrea de a crea şi alte institute superioare care să pregătească profesori pentru ciclul II şi mediu. Astfel a fost creat la Timişoara Institutul pedagogic, cu o singură facultate şi anume, Facultatea de matematică-fizică.

La început condiţiile de muncă erau grele. Institutul nu avea cadre şi materiale didactice, nu dispunea de un local corespunzător şi nici măcar de mobilier. În primul an şcolar cursurile au început abia în luna ianuarie, într-un local care aparţinea Institutului politehnic şi cu mobilier împrumutat de la Sfatul popular orăşenesc. Neavînd aparate pentru experienţe, studenţii institutului efectuau experienţele şi lucrările practice în laboratoarele Institutului politehnic.

Dar în anii următori situaţia s-a îmbunătăţit mult. Ministerul a alocat însemnate sume pentru crearea condiţiilor materiale de învăţămînt. Astfel s-a început construirea unui local modern, cu săli spaţioase pentru cursuri, seminarii şi laboratoare.

În prezent, după numai nouă ani de la înființare, Institutul își desfășoară activitatea în cele mai bune condiții într-un local modern, cu două amfiteatre și multe săli de seminarii; catedrele de fizică dispun de șapte laboratoare (mecanica fizică, căldură și termodinamică, electricitate, optică, structura materiei și radiotehnică, precum și un laborator didactic), înzestrate toate, cu o bogată aparatură modernă. Studenții au posibilitatea de a efectua lucrările practice de



Telescopul catedrei de astronomie.

fizică, necesare pentru buna lor pregătire ca profesori de fizică, fiind puși la curent cu toate cuceririle și aplicațiile fizicii moderne.

În afară de aceste laboratoare, catedra de Fizică teoretică dispune de un frumos parc de aparate astronomice disponibile atît pentru uz didactic, cît și pentru cercetările științifice ale catedrei de astronomie.

În primii ani de funcționare ai Institutului, biblioteca dispunea numai de cîteva sute de volume. Actualmente biblioteca Institutului pune la dispoziția cadrelor didactice și studenților, peste 20.000 de volume și publicații.

Pentru primele serii de absolvenți ai Institutului, durata studiilor era de trei ani. Începînd din anul 1953, durata de școlaritate s-a mărit la patru ani.

Astfel, organizarea Institutului asigură pe toate planurile, pregătirea studenților în condiții din ce în ce mai bune. Planul de învățămînt prevede discipline noi: geometrie diferențială, bazele geometriei, aritmeticii și algebrei, teoria funcțiilor de variabilă complexă, teoria funcțiilor de variabilă reală, fizică teoretică și altele, care la început nu erau predate în Institut sau se reduceau la capitole înglobate în aceiași disciplină.

Începînd cu anul școlar 1957—1958, durata de școlaritate se va mări la cinci ani. Specialitatea principală va fi matematica, iar cea secundară — fizica; deci pregătirea studenților Institutului nostru va fi aceiași ca în Universități.

În primul an de funcţionare, Institutul nostru avea în total, şase cadre didactice, la toate catedrele. În prezent Institutul numără 43 cadre didactice numai la Facultatea de matematică-fizică. Printre acestea se află cadre didactice cunoscute prin lucrările lor şi în afara graniţelor ţării, cum sînt: prof. dr. Gheorghe Th. Gheorghiu, prof. dr. Emanoil Arghiriade, prof. dr. Ioan Curea, profesor Constantin Sălceanu. Unii dintre profesorii Institutului sînt colaboratori vechi şi perseverenţi al «Gazetei Matematice», cum este prof. dr. N. N. Mihăileanu. În Institut au fost reţinuţi şi mulţi absolvenţi de frunte ai Institutului, care funcţionează ca asistenţi sau lectori la catedrele de specialitate.

Dezvoltarea multilaterală a Institutului în puţinii ani ai existenţei sale este impresionantă mai ales pentru cei care i-au cunoscut începuturile. Absolvenţi ai Institutului nostru predau la şcolile din multe localităţi mari din sud-vestul ţării. În perioada 1951—56 Institutul nostru a dat 300 profesori de matematică şi fizică. Unii dintre ei au ajuns profesori cu mult prestigiu şi de valoare, ai liceelor în care îşi desfăşoară activitatea. Alţii au primit chiar şi funcţii de răspundere, fiind numiţi directori sau inspectori şcolari.

Începînd din anul şcolar 1956—57 în cadrul Institutului nostru a luat fiinţă o nouă facultate şi anume, facultatea de filologie, cu patru secţii. Astfel, Institutul s-a lărgit cu o facultate, avînd un specific nou, care constituie un pas pe drumul către o instituţie universitară.

Paralel cu posibilităţile de studii s-au îmbunătăţit considerabil şi condiţiile de viaţă ale studenţilor Institutului nostru. Hrana şi cazarea lor sînt asigurate în căminul Institutului, unde studenţii bursieri locuiesc gratuit. Majoritatea studenţilor noştri primesc bursă, iar acei care se evidenţiază în studii primesc burse de merit şi chiar burse republicane.

În prezent, la dispoziţia studenţilor se pun bilete cu reducere la spectacole de teatru, operă şi cinematograf, în afară de spectacolele cinematografice gratuite la cinematograful studenţesc al centrului universitar. De asemenea în curînd se va inaugura «Casa studenţească» unde studenţii se vor putea recrea în timpul liber, Activitatea cultural-educativă se va desfăşura sub auspiciile «Asociaţiei studenţeşti». Acestea au largi posibilităţi de a organiza activitatea culturală a studenţilor dispunînd de fonduri însemnate, alocate special de Minister în acest scop.

Studenţii buni care prin muncă perseverentă au obţinut rezultate deosebite la examene, sînt antrenaţi în afara obligaţiilor de studii, la munca de cercetare ştiinţifică, prin cercurile studenţeşti care sînt conduse de cadre didactice şi îşi desfăşoară activitatea pe lîngă catedrele Institutului. Începînd din toamna anului şcolar 1956—57 numai la facultatea de matematică-fizică îşi desfăşoară activitatea patru cercuri ştiinţifice studenţeşti. Acestea au menirea de a da posibilitate celor mai buni şi mai talentaţi studenţi de a-şi dezvolta aptitudinile în diferite domenii ale ştiinţelor matematice şi fizice şi de a se pregăti pentru munca de cercetare ştiinţifică individuală. Studenţii care s-au evidenţiat prin activitatea lor în aceste cercuri sînt reţinuţi în institut ca preparatori şi asistenţi.

Se ştie că matematica şi fizica nu sînt discipline uşoare. Înţelegerea şi asimilarea lor implică o muncă conştientă şi perseverentă. Nu este însă mai puţin adevărat că tinerii care-şi fac datoria de studenţi aşa cum trebuie, găsesc şi satisfacţia corespunzătoare muncii lor. Pentru a fi un bun profesor de matematică şi fizică nu este suficient numai să cunoşti bine aceste materii: mai trebuie să le şi îndrăgeşti, după cum trebuie, să iubeşti şi munca de profesor. Matematica şi fizica sînt discipline importante nu numai prin multiplele lor aplicaţii în toate

domeniile tehnicii şi ştiinţei, fără de care de altfel, nu poţi pătrunde legile care guvernează lumea. Marea însemnătate a acestor discipline constă şi în rolul lor educativ. Marele nostru matematician Gheorghe Ţiţeica spunea următoarele despre un bun profesor de matematici:

«Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie el însuşi un aport al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi ţine lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca şi cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos să fie îndreptarul vieţii noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea poporului muncitor pe calea care-i stă deschisă».

Profesorul NICOLAE CIORĂNESCU

M. N. ROŞCULEŢ, Institutul Politehnic Bucureşti

La 2 aprilie s-a stins din viaţă Nicolae Ciorănescu, profesor de Algebră şi Analiză Matematică, şeful catedrei de Matematici III a Institutului Politehnic din Bucureşti, membru al societăţii de Ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

Profesorul N. Ciorănescu s-a născut la 10 aprilie 1903 în Bucureşti. Aici a urmat atît cursurile elementare şi medii, cît şi pe cele universitare. În anul 1925 obţine diploma de licenţă în Matematici şi diploma de licenţă în ştiinţele Fizico-chimice. În acelaşi an pleacă pentru continuarea studiilor la Paris, iar în 1927 obţine la Sorbona, diploma de licenţă în Ştiinţe. În 1929 obţine titlul de Doctor în Matematici cu teza: Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'èquations aux dèrivèes partielles du second ordre».

Renîtors în ţară este numit conferenţiar (1929) la Şcoala Politehnică din Bucureşti, astăzi Institutul Politehnic. În anul 1941 este numit profesor titular, iar din 1953, şeful catedrei de Matematici III de la acelaşi Institut.

Începînd din anul 1929 pînă în prezent, Nicolae Ciorănescu, spirit creator prin excelenţă, a publicat peste 100 de lucrări (două sînt în curs de publicare) în revistele din ţară şi de peste hotare.

Problemele abordate în lucrările sale se împart în cinci mari clase şi anume:

a). Ecuaţii diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale,

b) Ecuaţii integrale şi funcţionale,

c) Lucrări în legătură cu noţiunile de derivată şi integrală. Formule de medie.

d) Teoria funcţiilor analitice,

e) Probleme de mecanică teoretică.

Lucrările sale, deosebit de valoroase, sînt citate de o seamă de matematicieni străini.

Deşi preocupat de aceste lucrări de înalt nivel ştiinţific, Nicolae Ciorănescu nu a părăsit domeniul elementar, fapt care se oglindeşte în notele publicate în «Gazeta matematică şi fizică». Observaţiile interesante şi subtile pe care le face asupra unor chestiuni clasice dovedesc inteligenţa pătrunzătoare cu care era înzestrat.

Paralel cu această activitate ştiinţifică, Nicolae Ciorănescu a dus şi o activitate didactică neîntreruptă, începînd din anul 1929. Numai în Institutul Politehnic 28 de promoţii şi-au trecut examenele de matematici la profesorul N. Ciorănescu.

Cursul de Algebră şi Analiză Matematică al prof. N. Ciorănescu este un model ae asemenea lucrare, fiind scris la un înalt nivel ştiinţific şi totodată legat de problemele practice prin numărul însemnat de aplicaţii.

Prelegerile sale reflectau o cultură multilaterală, inteligenţă sclipitoare şi un umor optimist. De aceea, deşi prin specificul său Cursul ar fi trebuit să fie arid, prezentarea lui de către profesorul Nicolae Ciorănescu constituia o adevărată desfătare.

Cei care au audiat prelegerile sale nu le vor uita niciodată.

La personalitatea lui Nicolae Ciorănescu ca profesor trebuie adăugată şi deplina sa integritate morală. Examenele sale erau grele dar juste. Ele nu puteau fi promovate decît de acela care a învăţat temeinic materia respectivă şi de aceea numele profesorului Nicolae Ciorănescu a fost întotdeauna, şi va fi şi în viitor amintit cu respect şi admiraţie de foştii săi colegi şi studenţi.

Mergînd pe linia marilor săi înaintaşi D. Emanuel, Tr. Lalescu, Gh. Ţiţeica, D. Pompeiu, profesorul Nicolae Ciorănescu poate fi considerat un demn discipol al lor.

Exemplul său să ne fie călăuză, iar continuarea operei sale — o datorie neclintită pentru noi.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1400

Să se arate că $N = 550^n - 75^n - 418^n$ *este divizibil prin 57, unde n este un număr întreg şi pozitiv.*

Vasile Baltag

Soluţie. — Avem: $550 = 183.3+1 = 29.19-1; 75 = 25.3 = 4.19-1; 418 = 139.3+1 = 22.19$; $57 = 3.19$. Deci:

$N=(183.3+1)^n-(25.3)^n-(139.3+1)^n = M.3 + 1 - M.3 - M.3 - 1 = M.3$ pentru orice n pozitiv. De asemenea, dacă $n = 2p + 1$, avem:

$$N = (21.19-1)^n-(4.19-1)^n-(22.19)^n = M.19-1-M.19+1-M.19 = M.19.$$

Dacă $n = 2p$ avem:

$$N = (29.19-1)^n-(4.19-1)^n-(22.19)^n = M.19 + 1 - M.19 - 1 - M.19 = M.19.$$

Numărul N fiind divizibil cu 3 și cu 19, va fi divizibil și cu $3.19 = 57$.

Soluții bune au dat: **Bătineţu D.** (Giurgiu), **Theodor Schain** (Bucureşti), **Paul Popescu** (Bucureşti).

Problema 1602

Să se verifice egalitatea

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\sqrt{\frac{(a+1)^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\sqrt{\frac{(a+1)^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}=1,$$

dacă $a > 0$.

Soluţie dată de **Şerb G. Adrian,** Piteşti. — Egalitatea propusă a fost cazul particular $a = 3$. Observăm că ecuaţia

$$y^3 + ay - a - 1 = 0$$

admite ca rădăcină pe $y_1 = 1$ întrucît $P(1) = 0$.

Aplicînd formula lui Cardan obţinem:

$$y_1' = \sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\sqrt{\frac{(a+1)^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\sqrt{\frac{(a+1)^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

Cum discriminantul $\frac{(a+1)^2}{4}+\frac{a^3}{27} > 0$ pentru $a > 0$, ecuaţia are o singură rădăcină reală, deci,

$$y_1' \equiv y,$$

ceea ce ce trebuia verificat.

Observare. — Pentru $a = 3$ obţinem problema 1602.

Problema 1924

Fie un cerc O şi pe el un punct fix A. Să se găsească pe cercul O punctul M, astfel ca N fiind proiecţia lui A pe tangenta în M la cercul O să avem produsul $AN.NM$ maxim, apoi ca suma $AN+NM$ să fie maximă.
(Se poate consulta: *Maxime şi minime geometric* de Ion Ionescu).

Gh. I. Bercea

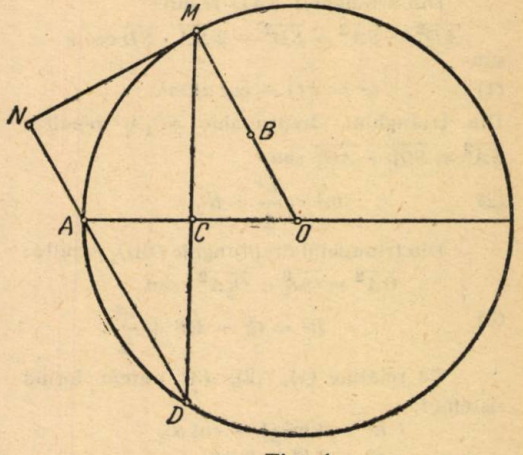


Fig. 1

Soluţie. — 1) Fie B proiecţia lui A pe OM şi C a lui M pe OA; MC taie a doua oară cercul O în D. A afla maximul produsului $AN.NM$ înseamnă a afla maximul ariei dreptunghiului $ANMB$. Dar triunghiul AMC şi triunghiul AMB sînt egale (triunghiu AOM este isoscel) şi triunghiurile AMC şi ACD sînt egale; deci dreptunghiul $ANMB$ este echivalent cu triunghiul isoscel AMD. Rezultă că trebuie să găsim maximul ariei triunghiului AMD înscris în cercul O.

Maximul are loc atunci cînd triunghiul AMD este echilateral (a se vedea: Ion Ionescu, Maxime şi minime geometrice, ed. II, p. 81, probl. 55).

Deci, în acest caz M se determină uşor, fiindcă unghiul MAO este de 30°.

2) Să găsim acum pe M astfel ca suma $AN + NM$ să fie maximă.

Din egalitatea triunghiurilor ANM şi AMC rezultă că (fig. 1):

$$AN + NM = AC + CM.$$

Trebuie deci să găsim maximul sumei $AC + MC$.

Fie F intersecția lui AO cu cercul O. Se vede că din cauza simetriei este deajuns să considerăm numai semicercul AMF.

Fie E mijlocul acestui semicerc (fig. 2). Cînd M descrie sfertul de cerc AE, suma $AC + MC$ crește de la O la $2R$ (R, raza cercului O).

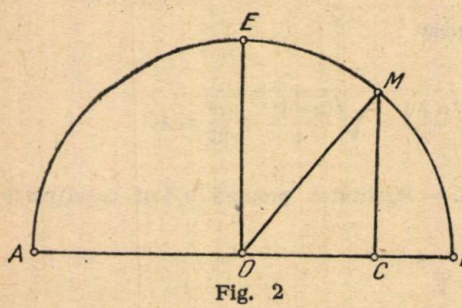


Fig. 2

Se vede că maximul are loc cînd M se află pe sfertul de cerc EF, căci atunci $AC + MC = R + OC + CM > 2R$. Din $AC + CM = R + OC + CM$ rezultă că trebuie să găsim pe M cînd suma $OC + CM$ este maximă sau cînd patratul acesteia:

$$(OC + CM)^2 = OC^2 + CM^2 + 2\,OC \cdot CM = R^2 + 2\,OC \cdot OM$$

este maxim, cînd $OC \cdot OM$ este maxim. Sau cu alte cuvinte: cînd aria triunghiului dreptunghic OMC cu ipotenuza dată, este maximă; aceasta are loc cînd triunghiul OCM este isoscel, adică, atunci cînd $OC = CM$. Şi în acest caz, M se determină uşor căci unghiul $MOC = 45°$.

Observare. — Din cauza simetriei rezultă că simetricul lui M faţă de AO ne dă încă o soluţie.

Problema 1927

Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat şi cu unghiul de la vîrful unei feţe laterale α. Să se afle: a) *volumul piramidei înscrise*; b) *aria laterală şi totală a piramidei*; c) *unghiul α, cînd înălţimea piramidei este egală cu raza sferei.*

(Examenul de maturitate 1955)

Soluţie. — Fie: $SA = SB = SC = SD = m$; $AB = BC = CD = DA = a$; $SO_1 = h$.

Din triunghiul SAD rezultă:

$$\overline{AD}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SD}^2 - 2\,\overline{SA} \cdot \overline{SD} \cos\alpha$$

sau

$$a^2 = 2\,(1 - \cos\alpha)\,m^2. \tag{1}$$

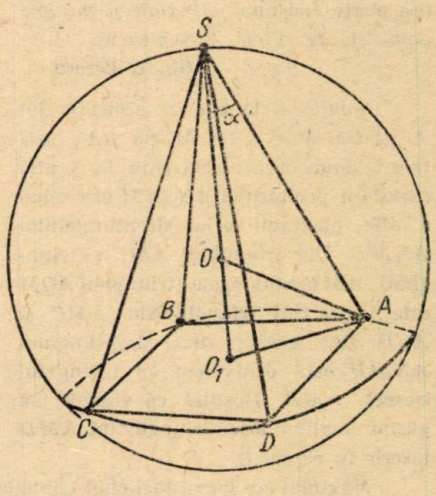
Din triunghiul dreptunghic SO_1A rezultă: $\overline{SA}^2 = \overline{SO_1}^2 + \overline{AO_1}^2$ sau

$$m^2 = \frac{a^2}{2} + h^2. \tag{2}$$

Din triunghiul dreptunghic OAO_1 rezultă:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO_1}^2 + \overline{O_1A}^2 \quad \text{sau}$$

$$R^2 = (h - R)^2 + \frac{a^2}{2}. \tag{3}$$



Cu relaţiile (1), (2), (3) putem forma sistemul:

$$a^2 = 2\,m^2\,(1 - \cos\alpha),$$
$$a^2 + 2\,h^2 = 2\,m^2,$$
$$a^2 + 2\,h^2 = 4\,h\,R.$$

Rezolvînd acest sistem, găsim $h = 2\,R\cos\alpha$; $a = 4\,R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

a) Volumul piramidei este:

$$V = \frac{a^2\,h}{3} = \frac{16\,R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos\alpha\, 2R\cos\alpha}{3} = \frac{32}{3} R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\alpha.$$

b) Aria laterală a piramidei este:

$$A_l = 2\,m^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin\alpha}{1-\cos\alpha} = 16\,R^2\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

sau $A_l = 4\,R^2 \sin 2\alpha$.

Aria totală a piramidei este:

$$A_t = A_l + a^2 = 4\,R^2 \sin 2\alpha + 16\,R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha,$$

$$A_t = 16\,R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

c) $R = 2\,R\cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60°$.

PROBLEME PROPUSE

CHESTIUNI DE EXAMEN[1])

„OLIMPIADA DE MATEMATICĂ" ETAPA FINALĂ (PE ȚARĂ) 3 MAI 1957

(Lucrare scrisă, timp de lucru 3 ore, toate chestiunile obligatorii)

Clasa VIII-a școli medii

2686. — Se consideră triunghiul isoscel ABC cu laturile AB și AC egale. Perpendiculara dusă din B pe AB și perpendiculara dusă din C pe AC se întîlnesc în punctul D.

a) Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil unui cerc și circumscriptibil altui cerc.

b) Să se arate că perpendiculara dusă prin intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$ pe AB trece prin mijlocul laturii CD, iar perpendiculara dusă din același punct pe CD trece prin mijlocul laturii AB.

c) Să se arate că bisectoarea unghiului format de cele două perpendiculare duse prin intersecția diagonalelor respectiv pe AB și CD este perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de dreptele AB și CD.

d) Dacă vîrfurile A și B rămîn fixe, iar punctul C mobil descrie un cerc cu centrul în A, lungimea AC rămînînd constantă, să se afle locul geometric descris de mijlocul diagonalei BC, de asemenea,

e) locul geometric descris de centrul cercului înscris în patrulaterul $ABDC$.

(C. Ionescu-Țiu)

2687. — Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$.

a) Să se arate că nu pot exista valori pentru a și b astfel ca ecuația $P(x) = 0$ să admită simultan ca rădăcini pe $x = 3$ și $x = -3$.

b) Dacă $P(x)$ se divide exact prin $x + 2$, să se arate că ecuația

$$\frac{P(x)}{x+2} = 0$$

---

[1]) **La problemele propuse (2686—2704) se primesc soluții pînă la 15 noiembrie 1957.**

se poate pune sub forma

$$x^2 + (a - 2)\, x + 2\,(3 - a) = 0$$

şi să se rezolve în caz că rădăcinile sînt egale.

c) Pentru ce valori ale lui a rădăcinile acestei ecuaţii sînt reale şi de semne contrarii.

d) Pentru ce valori ale lui a avem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

(C. Ionescu-Ţiu)

Clasa IX şcoli medii

2688. — *a)* Se dau două progresii geometrice:

— prima începînd cu 1 şi avînd raţia 3: ÷ 1, 3, 9, 27,...

— a doua începînd cu 1 şi avînd raţia — 2: ÷ 1, — 2, — 4, — 8,...

se formează şirul în care un termen este egal cu suma termenilor de acelaşi rang ai celor două progresii date: 2, 1, 13, 19,...

Să se arate că în acest şir un termen este egal cu suma dintre termenul precedent şi de şase ori termenul anteprecendent: de exemplu, $13 = 1 + 6 \cdot 2$; $19 = 13 + 6 \cdot 1$;...)

b) Să se determine două progresii geometrice astfel ca prin adunarea termenilor de acelaşi rang să obţinem şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8,... în care fiecare termen este egal cu suma a doi termeni care îl preced.

c) Să se găsească raţiile a două progresii geometrice astfel încît în şirul format prin adunarea termenilor de acelaşi rang ai celor două progresii un termen să fie egal cu suma celor doi termeni care îl preced.

(A. Şaichin şi O. Sacter)

2689. — Dintr-un punct M exterior unui plan P, ducem pe acest plan perpendiculara MO şi o oblică $MA = a$. Fie N un punct situat pe segmentul MO. Se cere:

a) Să se arate că din punctul N se pot duce la planul P două oblice NB şi NC egale cu oblica MA şi totodată perpendiculare pe ea.

b) Notînd cu x şi y unghiurile pe care le fac oblicele MA şi NB pe planul P, să se arate că:

$$AB^2 = a^2 (\cos^2 x + \cos^2 y + 2 \sin x \sin y),$$

unde A şi B sînt picioarele acestor oblice.

c) Dacă punctul N variază pe segmentul MO, să se demonstreze că distanţa AB nu poate depăşi valoarea a $\sqrt{2}$, adică

$$AB \leqslant a\sqrt{2}.$$

(Gh. Bazacov, Turnu Severin)

Clasa X-a, şcoli medii

2690. — Să se determine polinomul $P(x)$ de gradul al 5-lea care împărţit cu $x^2 + x + 5$ dă restul $3x + 2$, împărţit cu $x - 1$ dă restul 5, împărţit cu $x + 2$ dă restul (-4) şi împărţit cu $x + 3$ dă restul $(+4)$, ştiind că x^5 are coeficientul 1.

Să se deducă descompunerea în factori a polinomului $P(x) - 3x - 2$.

(Gh. D. Simionescu)

2691. — *a)* Să se rezolve triunghiul oarecare ABC în care se dau: latura a, unghiul opus A și suma $b + c = l$ a celorlalte două laturi. Să se exprime în funcție de elementele date, aria S a triunghiului și raza r a cercului înscris. Discuție.

b) Să se construiască grafic triunghiul cu datele de mai sus și să se regăsească condițiile de posibilitate ale problemei.

c) Să se rezolve complet triunghiul în cazul $A = 60°$ și $l = a\sqrt{2}$ (elementele lineare se vor da în funcție de a).

* * *

2692. — *a)* Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$ bisectoarele unghiurilor BAC, BDC întîlnesc muchia BC în același punct M, atunci și bisectoarele unghiurilor ABD, ACD întîlnesc muchia AD într-un același punct N.

b) Dacă și bisectoarele unghiurilor CAD, CBD se întîlnesc pe muchia CD, atunci proprietatea este generală pentru orice pereche de fețe în raport cu muchia lor comună.

c) Care sînt relațiile între muchiile care caracterizează astfel de tetraedre? Reciproca este adevărată? (adică, dacă relațiile sînt îndeplinite, bisectoarele unghiurilor opuse muchiei comune a două fețe sînt concurente?)

d) Să se demonstreze că dacă $AC = BD$, atunci planul dus prin M paralel cu dreptele AN și CD conține dreapta MN.

(Gh. D. Simionescu)

Anul I, școli de maiștri

2693. — Se consideră un trunchi de con avînd raza mare de 7 dm, înălțimea de 8 dm, aria totală de 130 π dm^2.

a) Să se calculeze volumul său.

b) Să se spună cum trebuie dus un plan de secțiune paralel cu baza care să împartă aria laterală a trunchiului de con în două părți egale.

* * *

2694. — Să dau funcțiile: $y = \dfrac{5x - 6}{(2x - 3)^2}$ și $z = \dfrac{4x^2 - 7x + 3}{(2x - 3)^2}$.

a) Să se calculeze derivatele y' și z' punînd rezultatele sub cea mai simplă formă

b) Ce se observă dacă se compară y' cu z'? Care este explicația celor observate?.

(A. Șaichin)

Anul II al școlilor de maiștri

2695. — Se consideră un cerc cu centrul în origină și de rază 1, și punctele A (0,1), B (0, —1) situate pe același cerc. Se duce prin B o paralelă la axa Ox, se ia pe această paralelă punctul M și se notează cu m abscisa acestui punct. Proiecția punctului M pe axa Ox se notează P, iar intersecția dreptei AP cu cercul se notează I.

a) Să se calculeze coordonatele lui I în funcție de m.

b) Să se verifice rezultatele obținute pentru aceste coordonate dacă m are valorile particulare: $m = 0$, $m = 1$, $m = \infty$. Se va confrunta rezultatul calculelor cu figura.

c) Să se demonstreze prin calcul că dreapta IM este tangentă la cerc.

d) Să se demonstreze pe cale geometrică proprietatea de la punctul *c)*.

(A. Șaichin)

2696. — Trebuie construit un rezervor avînd forma unui cilindru terminat cu două emisfere. Volumul său trebuie să fie 113,04 m^3 ($113{,}04 = 36 \cdot 3{,}14 = 36\pi$).

a) Care trebuie să fie dimensiunile sale pentru ca prețul său să fie minim, știind că 1 m^2 din învelișul cilindric revine la 24 lei (material + manoperă + regie), iar 1 m^2 din fundurile emisferice revine la 43 lei (idem).

* * *

Anul I, școli profesionale

2697. — Două brigăzi trebuie să execute o lucrare. La început prima brigadă a întrebuințat pentru lucru o treime din timpul pe care l-ar fi întrebuințat cealaltă brigadă pentru executarea întregii lucrări; după aceia, a doua brigadă a lucrat o treime din timpul pe care prima brigadă l-ar fi întrebuințat pentru executarea întregii lucrări. După aceasta s-a constatat că s-a executat $\frac{13}{18}$ din întreaga lucrare. Să se afle în cît timp ar fi terminat lucrul fiecare brigadă în parte, dacă împreună aceste brigăzi pot să-l execute în 3 și $\frac{3}{5}$ ore.

* * *

2698. — Două roți de mărime diferită sînt cuplate (legate) prin curele de transmisiune. Cureaua care cuprinde în interiorul ei ambele roți are porțiunea de curea dintre roți între punctele de tangență, de 315 cm; iar cureaua care este trecută încrucișat peste roți are porțiunea de curea dintre roți între punctele de tangență de 125 cm. Distanța dintre centrele roților este de 325 cm.

a) Să se afle raza fiecărei roți.

b) Să se determine mărimea razelor prin construcție grafică.

(Olimpia Gheorghiu)

Anul II al școlilor profesionale

2699. — Două corpuri se mișcă uniform pe laturile unui unghi drept spre vîrful unghiului; după ce trec prin vîrful unghiului își continuă mișcarea. La un moment dat corpul A se află la 8 m de vîrful unghiului, iar corpul B la 10 m de acest vîrf. După 2 secunde distanța dintre corpuri este de 10 m, iar după următoarele 6 secunde distanța a devenit 2 m.

a) Să se afle viteza fiecărui corp.

b) Cînd este a doua oară distanța între cele două corpuri de 10 m?

c) Cînd este această distanță de 1 m?

d) Cînd se află cele două corpuri la cea mai mică distanță și care este valoarea acestei distanțe minime?

* * *

2700. — Se trasează pe tablă un exagon regulat $ABCDEF$ cu latura de 10 cm. Se unesc mijloacele L, M, N, ale laturilor din două în două.

a) Să se afle suprafața triunghiului LMN.

b) Se îndoaie tabla după laturile triunghiului LMN obținîndu-se o cutie în formă de trunchi de piramidă. Să se calculeze volumul acestei cutii.

* * *

Anul II şcoli pedagogice

2701. — Prin latura bazei unei piramide triunghiulare regulate se duce un plan perpendicular pe muchia laterală opusă.

Să se determine aria secţiunii obţinute dacă latura triunghiului echilateral de bază este a, iar înălţimea piramidei este h.

* * *

2702. — Un tren care a plecat din gara A la ora 3^h30^m soseşte în gara B la ora 10^h10^m. Un alt tren pornind din B la ora 1^h10^m soseşte în A la ora 6^h30^m.

La ce oră şi unde s-au întîlnit trenurile pe parcursul AB.

* * *

Anii III—IV şcoli pedagogice

2703. — La o cantină, în decurs de 1,91 (6) ani au lucrat trei bucătari unul după altul. Primul bucătar era plătit lunar cu 450 lei, al doilea cu 6, (6) % mai mult decît primul, iar al treilea cu $18\frac{3}{4}$ % mai mult decît al doilea.

Cel de-al treilea bucătar a primit pentru tot timpul cît a lucrat 2775 lei mai mult decît al doilea, iar al doilea cu 960 lei mai puţin decît primul.

Cît timp a lucrat fiecare bucătar?

* * *

2704. — Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $AB = c$, $AC = b$. Prin vîrful B se duce o axă care taie pe AC în D. Se notează $AD = x$.

a) Să se exprime în funcţie de b, c, x volumul V_1 născut prin rotirea triunghiului ABD în jurul lui BD.

b) Să se exprime volumul V_2 născut prin rotirea triunghiului BCD în jurul lui BD.

c) Să se arate că dacă punctul D se află la mijlocul catetei AC, $V_1 = V_2$.

d) Să se arate că dacă

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}, \text{ atunci } \frac{V_1}{V_2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

(C. Ionescu-Ţiu)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI[1])

E: 974. — Grija pentru învăţămîntul de cultură generală în patria noastră se oglindeşte şi prin funcţionarea celor 20 927 şcoli pentru clasele I—IV, V—VII şi VIII—X. Ştiind că numărul şcolilor cu clase I—IV întrec pe cel al şcolilor cu clase V—VII cu 11 106, iar acestea pe acel al şcolilor cu clasele VIII—X cu 4447, să se calculeze:

1) numărul şcolilor de fiecare fel,

2) cîte şcoli din acestea au fost în anul şcolar 1938—1939, dacă numărul lor a crescut respectiv, cu 23,1 %; 517,7 %; 46,5 %?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 975. — În triunghiul isoscel MON ($MO = NO$) se ia un punct P pe baza MN. Să se demonstreze că diferenţa unghiurilor formate de OP cu baza este egală cu diferenţa unghiurilor formate de OP cu laturile egale.

Dorin Tomoiagă, elev Sighet

---

[1]) Clasa V-a (E: 976, 978, 980); VI-a (E: 974, 977, 983); VII-a (E: 975, 977, 979, 981, 982)

E: 976. — Sectorul socialist de stat al agriculturii, sectorul socialist cooperatist din Iaşi şi asociaţiile simple ocupă în această regiune, 298 840 ha; ştiind că sectorul socialist cooperatist întrece cu 1261 ha treimea sectorului socialist de stat, iar sectorul socialist cooperatist este cu 63432 ha mai mare ca suprafaţa asociaţiilor simple, să se calculeze cîte hectare sînt în fiecare din cele trei sectoare.

I. Munteanu, Zăpodeni

E: 977. — Să se arate că dacă:

$$(4ax + b)^3 + 8a^2(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) - 4a(4ax + b)(6ax^2 + 3bx + c) = 0,$$

atunci

$$b(4ac - b^2) - 8a^2d = 0.$$

Gh. I. Stoian, student Bucureşti

E: 978. — Cineva cheltuieşte pentru un elev $\frac{4}{5}$ din sumă minus 60 lei, procurîndu-i haine; apoi $\frac{1}{3}$ din rest plus 30 lei pentru încălţăminte; în sfîrşit mai cheltuieşte $\frac{1}{4}$ din noul rest plus 15 lei pentru manuale şi diferite rechizite şcolare. După aceste cumpărături i se mai dă elevului 60 lei. Să se afle ce sumă a fost la început.

B. I. Baieră, profesor Păunesti

E: 979. — Să se găsească patru numere neegale, pozitive, întregi, ştiind că suma lor este egală cu produsul celui mai mare cu cel mai mic plus produsul celorlale două.

(Olimpiada matematică, cl. 7, 1955 Kiew)

E: 980. — Un tren care transportă petrol este format din 60 cisterne de cîte 15, 20 şi 30 tone. Ştiind că numărul cisternelor de 20 tone este triplul celui al cisternelor de 30 tone, ar cel al cisternelor de 15 tone este cu 5 mai mare ca cel al cisternelor de 30 tone, să se calculeze:

1) cîte cisterne sînt din fiecare fel?
2) care este tonajul de petrol transportat?

I. N. Munteanu, profesor Zăpodeni

E: 981. — Să se arate că:

$$a^7 - b^7 - ab(a^5 - b^5) + a^2b^2(a^3 - b^3) - ab(a - b) = (a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

I. A. Rus, student Cluj

E: 982. — Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura BC distanţa HA_2 şi unghiul A_2HA_1 unde H, A_1, A_2 sînt respectiv: ortocentrul, piciorul înălţimii din A şi mijlocul laturii BC.

Ion Mateescu, profesor Giurgiu

E: 983. — O pompă de 2 cai putere ridică apă la încălţimea de 9 m pentru a umple un rezervor paralelipipedic cu diamensiunile de 3 m, 4 m şi 2 m. În cît timp se umple acest rezervor şi care este viteza apei în ţeava cu secţiunea de 0,5 dm^2.

C. I. Ţ.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidențiați

Pînă la 1 Martie 1957 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Iftimie Viorel (cl. 10 Rădăuți), *Rotaru Constantin* (student Inst. Polit. Iași), *Mihai M. Gheorghe* (absolvent Craiova), *Panțuru T. Dumitru* (școala de aviație Mediaș), *Enescu Cornelia* (cl. 10 ș. m. 15 București), *Rusu Mihai* (cl. 10 Ocna Mureșului, Aiud), *Mihăilescu I. Viorel* (cl. 9 ș. m. 1 Caracal), *Ioan T. Nicolaie* (cl. 10 ș. m. 1 Cîmpina), *Vasiliev Lucia* (cl. 10 ș. m. 2 Constanța), *Tudor M. Gheorghe* (cl. 10 ș. m. 13 București), *Vișinescu N. Mihai* (cl. 9 ș. m. 1 Giurgiu), *Jilăveanu S. Gheorghe* (absolvent Mediaș), *Păunescu Radu Sorin* (student Facult. Electronică, București), *Popescu S. Dan* (cl. 9 Tîrgoviște), *Bunea Teodor* (cl. 7 R. Sărat), *Sorescu D. Gheorghe* (cl. 10 ș. m. 13 București), *Draica Constantin* (cl. 10 ș. m. 4 «Aurel Vlaicu» București), *Peterfi Attila* (cl. 10 Tg. Mureș), *Păncescu Florin* (cl. 10 ș. m. Ploiești), *Ionescu V. Marian* (cl. 7 Gălățeni — București), *Schain Theodor* (clasa 10. ș. m. 1 Nicolae Bălcescu, București), *Popescu Eugen* (cl. 10 Ploiești), *Bulucea D. Constantin* (cl. 10 R. Vîlcea), *Pupăzan V. Nicolae* (Școala de artilerie Sibiu), *Grecu Anton* (cl. 10 Roșiorii de Vede), *Niculescu Stelian* (cl. 10 Caracal), *Tudose Traian* (cl. 10 Tecuci), *Calu Radu* (cl. 10 ș. m. 2 Brăila), *Georgescu P. Adrian* (cl. 10 ș. m. 1 Ploiești). *Iordănescu Radu Sorin* (clasa 10. ș. m. 20 București). *Ionescu Mircea* (cl. 10 ș. m. 1 Aurel Vlaicu București).

* * *

Pînă la 1 martie 1957 s-au primit soluții bune la cel puțin 10 probleme propuse în GMF(B) nr. 10—12 din 1956 și nr. 1 din 1957, după cum urmează:

ALBA IULIA. *Școala medie nr. 2.* Clasa 9. Manițiu Cornel (2404, 06, 07, 10, 11, 44—46, 48, 52, 55, 56, 62), Trifu Mircea (2392, 94, 98, 408, 38, 48, 52, 55, 57, 58, 61—63, 82, 91). Clasa 10. Goia Cornel (2395, 446, 48, 49, 52—55, 57, 61—63).

ALEXANDRIA Clasa 8. Ștefan Cornel (2407, 45, 55, 56, 62, E: 886, 90, 93, 94, 97, 98, 903). Clasa 10. Ionescu Gelu (2445, 46, 48—50, 53—56, 61—63), Nicolae M. Ioan (2395, 404, 05, 10, 11, 18, 19, 32, 33, 38, 42, 45, 46, 48—50, 52, 53, 55, 56, 61—63, 90).

ARAD. *Școlile medii 1 și 2.* Clasa 6. Ciurea Sorin (E: 874, 76, 77, 79—81, 84, 93, 94, 96). Clasa 9. Balint Ioan (2392, 95, 404—10, 45, 46, 55), Beștea Cătălin (2386, 87, 94—96, 405, 08—11, 13, 16), Boar Teodor (2395, 404—10, 55, 56, 61, 62), Danciu Zamfir (2395, 410, 32, 45, 48, 51, 55—57, 61, 62), Feier Virgil (2392, 95, 400, 05—08. 10, 11, 45, 55, 56, 61, 63), Lupaș Alexandru (2357, 59, 80, 95, 404—10), Sîrb Alexandru (2357, 59, 64, 80, 95, 404—10). Clasa 10. Sipoș Maria (2407, 17, 31, 32, 34, 38, 42, 43, 45, 46, 48, 50, 52—57, 61—64).

BACĂU. *Școala de 7 ani Păunești-Adjud.* Clasa 7. Novac Gh. Gheorghe (2455, E: 864, 86, 900—04, 06, 07, 09,) Panaite Adrian (2406, 55, E: 864, 86, 98, 901, 02, 06, 07, 09, 11), Pintilie Florica (2406, E: 864, 80, 83, 86, 88—90, 902, 09), Vasilache Zarafina (2456, E: 864, 86, 900—02, 04—07, 09). Clasa 8. Vigder Armand (2392, 412, 15, 48, 50, 72, 89, 97, E: 903, 12).

BAIA MARE. *Școala medie nr. 1.* clasa 8. Atanasiu Moisă (2438, 55, E: 888, 98, 99, 901—04 08, 09).

BAIA SPRIE. Clasa 7. Totolici Gabriel (2436, E: 889, 97—99, 902, 03, 07,11, 14, 15, 17). Clasa 10. Bobiciu Valeriu (2406, 14, 44, 45, 48, 51—53, 55, 57, 58, 61, 63 72, 98).

BEIUȘ. Clasa 8. Bodeanu Corneliu (2309, E: 874, 75, 78, 81, 88, 91, 93, 98, 901—03). Clasa 10. Bodeanu Valeriu (2384, 86, 87, 95, 400, 04—11, 13), Partenie Valeriu (2395 404—11, 13, 17).

BÎRLAD. Clasa 7. Craus Mihail (E: 885, 86, 88—90, 93, 94, 97, 98, 900, 06, 08, 09). Clasa 8. Velisar Elena (2462, E: 886, 90, 91, 93, 94, 97, 98, 909, 11, 17). Clasa 10. Spulber Virgil (2392, 95, 404—10, 14, 16, 17).

BOTOȘANI. *Școala medie nr. 2.* Clasa 10. Aelenei Georgeta (2404—07, 09—11, 48 55, 57, 62), Apostol M. Cristina (2404—11, 16), Popovici Laura (2392, 405, 06, 09—11, 45, 48, 56, 61, 62, 53,)

BRĂILA. *Școala de 7 ani, nr. 10.* Clasa 7. Andraș Traian (E: 874, 76, 78—80, 83 84, 88, 93, 94, 98, 901, 03).

Școala medie nr. 1. «N. Bălcescu» Clasa 8. Ștefănescu T. Vasile (2405, 09, 38, 55, 56, 62, E: 886, 90, 900, 01—03, 09, 11, 14). Clasa 9. Danciu P. Viorel (2377, 438, 44—46, 50—51, 53, 55, 56, 58, 61—63), Dumitru P. Ion (2392, 95, 405, 07, 09, 10, 45, 46, 50,

55, 56, 61, 62), Gogu R. Victor (2357, 61—63, 438, 45, 46, 50—57), Gheorghiu C. Dan (2363, 95, 438, 45, 46, 50, 55—58, 61, 62), Stroe Valentin (2363, 438, 45, 46, 50, 55—58, 61—62). Clasa 10. Burtea V. Petre (2353, 57, 59, 63, 78, 92, 95, 97, 404—07, 09—11, 17), *Calu Radu* (2353, 57, 63, 78, 92, 97, 404—07, 09, 10 24, 27, 34, 38, 42, 45, 46, 48—50, 52—59, 61—63, P), Chiţoiu Gh. Lovinov (2385, 92, 94, 404—10), Coman I. Ion (2357, 59, 405, 07, 09, 10, 42, 45, 49, 53, 55, 56, 62), Comănici P. Petru (2349, 54, 77, 79, 407, 45, 46, 48, 50, 55, 62, 63), Delighioz Chiril (2352—54, 57, 64, 78, 92, 95, 408 11, 17, 27, 31, 38, 45, 46, 48—50, 52—59, 61—63, P.), Mihalcea C. Lucian (2405, 09, 10, 42, 46, 49, 55, 56. 61—63), Toma Ion (2405, 07, 09, 10, 45, 53—56, 61, 62,) Tomescu Octavian (2438, 45, 46, 49, 54, 56, 61—63), Velicu Cezar (2404, 05, 07, 09, 10, 45, 49 54—56, 62, 63), Zafirudis Iorgos (2375, 404, 05, 09, 10, 38, 41, 54, 62, 63,)

BREAZA (Ploeşti). *Şcoala medie mixtă.* Clasa 9. Răducu Anca (2424, 34, 38, 45, 46, 48, 50, 52, 55, 62).

Liceul «Dimitrie Cantemir». Clasa 9. Cloteanu Marin (2404—07, 09, 10, 45—48, 50, 56, 58, 61, 62), Luca Ioan (2404, 05, 07—10, 46, 48, 50, 55, 56, 61, 62), Miclea Gheorghe (2409, 10, 46, 47, 50, 55—57, 61, 62), Munteanu D. Ioan (2404, 08—10, 46, 48, 50, 55 56, 58, 61, 62), Petraru Adrian (2404, 05, 07, 09, 10, 45, 46, 48, 50, 55—57, 61, 62), Popescu Constantin (2404—07, 09—11, 45—48, 50, 55—58, 61, 62), Puţaru Constantin (2405, 07, 09, 10, 45—48, 50, 55—58, 61), Sandu Paul (2405, 07, 09, 10, 45—47, 50, 55, 56, 61, 62), Clasa 10. Văcaru Gheorghe (2424, 30, 35, 39, 44—50, 52—59, 61—63, P).

BUCUREŞTI. *Student* Cîmpu Demetra (Fac. Electronică) (2438, 45, 46, 48, 49, 51 53, 55—57, 61, 62, 72, 47, 515, 18, 19, 23, 30). Ghiţulescu Virgil (Inst. c.f.r.) (2383, 85, 86, 92, 95, 404—19, 4, 45, 48, 55). *Păunescu Lucian* (Fac. Electronică) (2356, 57, 59, 60, 64, 72, 77—79, 92, 95, 405, 07, 09, 11, 15, 17, 44—46, 48, 49, 51—59, 62—64, P).

Şcoala medie nr. 1. «N. Bălcescu». Clasa 7. Necşoiu Dan Alexandru (E: 885, 89, 90, 94, 98, 902, 03, 08, 10, 14, 17, 18), Clasa 8. Andrei Mariana (2438, 56, 62, E: 857, 64 83, 89, 99, 900, 15). Ciocîrn Paul (2438, 45la, 55, 56, 58, 61, 68, 80, 82, E: 403, 14) Ioachim Alex. (2420, 24, 34, 38, 39, 45, 46, 55—57, 62, 63, 88, 89, 91), Clasa 9. Dumitriu Dan (2420, 24, 26, 27, 38, 44—48, 51—53, 55—58, 62, 63), Moisă Ion (2349, 406, 45, 48, 50, 52, 56, 61, 62, 99), Clasa 10. *Schain Theodor* (2424—27, 29—32, 35, 36, 38, 39, 42—45, 47, 60, 62, P), Schatz Werner (2415, 24, 38, 47, 49, 51, 53, 58, 72, 77, 82, 90, 97), Voiculescu Mihai (2384, 87, 92, 94, 95,. 400, 05, 06, 07, 09—15, 15), Popa Mircea (2398, 438, 45, 46, 48, 52, 55—57, 61—63). Bancu Mircea (2386, 92, 95, 404, 06—08, 10 11, 14, 16, 20, 38, 48, 50, 52, 55—57, 61, 63, 72, 83, 87, 95, 99), Bogheanu Ştefan (2395 97, 405, 07, 09, 10, 14, 17, 38, 46, 48, 52), Melega Eugen (2430, 45, 46, 48, 50, 52—5, 61—63), Radu Vimer (2407, 25, 35, 44, 47, 72, 87, 96, 97, 99), Ştefănescu Maria (2438, 45, 48, 63, 84, 87, 502, 07, 18, 21, 23, 28, 30), Catrina Dumitru (2445—48, 51, 52, 55, 56, 58, 61, 62), Ionescu Dan (2357, 59, 92, 95, 99, 405, 06, 07, 09, 10, 44—48, 51, 52, 55—57). Isbăşescu Mihai (2390, 91, 94, 98, 404, 08, 09, 13, 15, 16, 31-34, 38), Tigoianu Radu (2392, 405, 06, 48, 52, 55, 62, 63, 90, 97, 515). Ionescu C. Traian (2405—07, 10, 11, 44, 45, 47—53, 55—59, 61, 62), Absolvent Coliren Ignatz (2467, 72—78, 80—84, 87—97, 89, 99).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. Tureanu Aurel (2384, 97, 99, 405, 07, 09—11, 18, 26, 34, 38, 44—49, 52, 55-57, 59, 62, 63, 72, 87, 97).

Şcoala medie nr. 4. «Aurel Vlaicu». Clasa 8. Budescu Natalia (2455, 56, 61, E: 886, 99, 900, 02, 09, 11, 14), Marinescu Al. Viorel (2392, 405, 55, E: 876, 79, 80, 86, 88, 91 93, 901, 07, 08), Mihăescu Florentin (2404, 05, 07, 09, 38, 44, 45, 53, 61—63, E: 889 902, 03, 05, 09), Muşat I. Mihai (2406, 38, 45, 46, 55—57, 61, E: 886, 94, 98, 905, 08, 09), Olteanu Corneliu (2438, 55, E: 886, 89, 90, 97, 98, 900, 02, 18, 19). Clasa 9. Catriş Eugen (2445, 48, 52, 53, 55—58, 63, 97), Cîmpu Gabriel (2392, 95, 404, 07, 08, 10, 44—46, 48, 51, 55—57, 61, 62), Coe Dan (2395, 404, 05, 07, 09—11, 15, 45—47, 52—57, 61—63), Constantinescu M. Remus (2395, 404—06, 09, 55, 56, 61—63), Mincu Horst (2395 404—05, 08—10, 38, 55, 62, 63), Săcăliş Mircea (2404—11, 44, 48, 55, 61, 62), Toader M. Gheorghe (2452—57, 61—63), Udrea Dumitru (2395, 404, 05, 07, 08, 15, 45—48, 50, 54, 57, 61—62). Clasa 10. Diculescu Lucian (2395, 405, 09, 45, 46, 48—50, 52, 57), *Draica Constantin* (2383, 92, 95, 96, 404—11, 13—17, 44—64, P), *Ionescu Mircea* (2347, 49, 54 56, 57, 59, 60, 62, 64, 70, 72, 74, 78—80, 92, 97, 404—14, P).

Şcoala medie nr. 10. Clasa 8. Predoiescu Marieta (2434, 38, 55, 56, 61, 62, E: 885, 89, 90, 93, 97, 98, 99, 900, 02, 03, 09), Clasa 9. Brînzaru Elena (2378, 91, 95, 404, 06, 10, 44, 46, 48, 55, 56, 57, 59, 61), Marica Mariana (2444, 47, 48, 50, 51, 55 57, 58, 61, 74), Nicolau Smaranda (2427, 44—47, 49, 52, 55, 56, 62, 99). Clasa 10. Georgescu Gorjan Ruxandra (2444—46, 49—53, 55—58, 61—63).

Şcoala medie nr. 11. Clasa 9B. Antoniu I. Sorin (2438, 44—47, 55—58, 61, 621.

Şcoala medie nr. 12. Clasa 8. Dobrescu N. Dan (2405, 06, 09, 55, 56, 62, E: 886, 89, 98), Schileru Cristian (2455, 56, E: 86, 89—91, 93, 94, 98, 900, 01), Vasilescu Florin (2405, 09, 55, 56, 63, E: 866, 74—76, 78—80, 83, 84, 88—90, 93, 94, 900—05, 09).

Şcoala medie nr. 13. Clasa 8. Dinu Ştefan (2438, 55, 56, E: 899—901, 03, 05, 09). Clasa 10. Cucu M. Dumitru (2441, 46—49, 52—58, 61—63), Grigore C. Costică (2349, 56, 60, 72, 73, 444—49), Lerner Emil (2346, 57, 59, 62, 78—80, 84, 91, 92, 411, 13—16, 23, 26, 35, 37, 39), Sorescu D. Gheorghe (2349, 54, 56, 57, 59, 90, 72, 78, 79, 92, 95, 97, 404—07, 09, 10, 15, 32, 38, 44—48, 50, 52—58, 60—62), *Tudor M. Gheorghe* (2392, 400, 04—09, 14, 15, 17, 26, 30, 38, 44—62, 72, 80, 82, 83, 87, 90, 97, 99, P).

Şcoala medie nr. 15. Clasa 10. *Enescu Cornelia* (2392, 95, 404—11, 13—17, 24, 44—57, 59—63, 70, 72, 84, 87, 97—99).

Şcoala medie nr. 17. Clasa 9. Georgescu Vladimir (2349, 80, 92, 405—07, 10, 35, 55, 56,)

Şcoala medie nr. 20. Clasa 9. Marcu I. Mihai (2349, 56, 57, 78, 92, 405, 09, 10, 55, 57, 62), Clasa 10. Demayo Adriana (2359, 70, 72, 74, 92, 94, 405, 07—09, 11, 46—48, 52—58, 61—63,), Alexe Dan (2418, 31, 33, 34, 48—50, 52, 63, 70, 72, 77, 84, 90, 91, 93, 97). Iordănescu Radu (2392, 94, 405, 09, 15, 23, 24, 26, 30, 35, 38, 45—49, 53—56, 58, 61—63, 65, 66, 72, 83, 89, 95, 99)

Şcoala medie nr. 22. Clasa 10. Budescu Maria (2392, 94, 407, 10, 46, 53, 55—57, 61—63).

Şcoala medie nr. 23. Clasa 9. Voinescu Alexandru (2392, 95, 404, 05, 09, 10, 47, 48, 52, 55—58, 61, 62).

Şcoala medie nr. 26. Clasa 10. Ticu D. Ion (2392, 95, 97, 404, 05, 09, 10, 14, 48, 53, 55, 56, 61—63).,

Şcoala de 7 ani nr. 128. Clasa 7. Dogaru Petre (E: 874—81, 83—86, 88—90, 93).

BUZĂU. Vasiliu C. Marilena (2392, 405, 07, 09, 45—47, 50, 52, 53, 55—57, 61, 73, 97).

CALAFAT. Clasa 9. Meleca Eugenia (2392, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 45, 61, 62), Şerban Adrian (P). Clasa 10. Urziceanu Const. (2392, 94, 95, 404—10), Vişinică Maria (2384, 93, 94, 95, 402, 04—11, 13—17), Radu M. Elena (2394, 95, 05, 07, 09, 12, 45, 65, 62,

CĂLĂRAŞI. Clasa 10. Geacă Despina (2404, 06, 09, 10, 14, 17, 48, 49, 53, 54, 56, 61—63), Strătescu Ion (2417, P).

CARACAL. Clasa 9. Blebea Şerban (2395, 404—10, 46, 48, 55, 57, 61, 62), Dincă Gheorghe (2398, 400, 38, 39, 45, 46, 50, 55—57, 61, 62, 64), *Mihăilescu I. Viorel* (2349, 57, 59, 61, 63, 64, 74, 80, 92, 94—96, 404—10, 16, 38, 44—48, 51, 55—59, 61—62, P) Popa Gh. Stanca (2356, 74, 78, 80, 405—07, 09, 55, 57, 63). Clasa 10. *Niculescu D. Stelian* (2360, 64, 70, 74, 78, 79, 92, 94, 96, 404, 06—08, 11, 16, 36, 44—48, 50, 52, 53, 55—59, 61—63, P), Tita A. Constantin (2445, 46, 48, 50, 52, 53, 55, 57, 61—63).

CÎMPINA (Ploeşti). *Şcoala de 7 ani Ghirdoveni.* Clasa 7. Dinu M. Ion (E: 876, 77, 79, 81, 88, 89, 93, 900, 05, 09), Păunescu Ilarion (E: 876, 77, 79, 81, 83, 84, 88, 89, 93, 96, 905, 09), Saghet Iridenta (E: 874, 76, 77, 79, 80, 81, 83, 84, 89, 90).

Şcoala medie nr. 1. Clasa 9. Drăgănescu Cornel (2385, 92, 96, 99, 406, 07, 09—11, 45, 46, 52, 55), Clasa 10, Barbu Horia (2444, 46—50, 55—57, 61—63), *Ioan T. Nicolae* (2357, 59, 60, 78, 79, 83, 92, 95, 404—11, 14, 15, 24, 31, 32, 44—58, 61—63).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Liceul «Ştefan cel Mare».* Clasa 9. Merchez Const. (2424, 25, 38, 40, 45, 48, 50, 51, 55—58, 62, 63), Vaida Carol (2425, 38, 44, 45, 47, 50‘ 51, 55—58, 61—63).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa 6. Savin Alexandru (E: 867, 68, 902, 03, 05, 06, 08, 09, 12, 15, 17, 18).

CLUJ. *Şcoala medie nr. 4.* Clasa 9. Babeş Victor (2392, 95, 404—07, 09, 10, 45, 47, 48,). Clasa 10. Bîrzan Romanel (2424, 25, 49—54, 57, 59—63, 80, 82, 87).

Şcoala medie nr. 6. Clasa 9. Dragoş Eugen (2424, 38, 45, 46, 48, 52, 55, 58, 61, 62), Pamula Adrian (2395, 445—48, 50, 54—56, 62, 70), Rădulescu Niţă (2404, 05, 09, 44—46, 48, 52, 55, 58, 61, 62).

Şcoala pedagogică nr. 2. Anul II. Neagoş Stela (2457, 62, E: 886, 99, 900, 02, 03, 06, 08, 09), studentă Paşca Magdalena (Fac. mat—fiz) (2315, 400, 08, 10, 47, 52, 55, 56, 61).

CONSTANŢA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 9. Ciochină Cornel (2384, 92, 94, 95, 404—11, 14—16, 44).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 10. Cărnănescu Anca (2405, 06, 08—10, 45, 46, 48—50, 52, 53, 55—57, 62, 63), Crăiţă Mîndra (2356, 57, 77, 95, 402,08, 12, 15, 16, 45, 46, 48, 50, 62), Găzdoiu Valeria (2351, 52, 54, 56, 57, 63, 66, 72, 73, 77, 78, 92, 402, 04—07), Iordache Gh. Elena (2352, 63, 66, 77, 402, 46, 48, 53, 55, 56, 62, 69), *Vasiliev Lucia* (2347, 52, 56, 57, 59, 63, 66, 78, 79, 83, 92, 95, 400, 02—12, 15, 34, 45, 48, 52, 56, 57, 62, 63).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 10. Dobriţoiu Petre (2446—51, 53—58, 62), Abduraim Aiten (2434, 46, 48—50, 52, 54—56, 58, 61—63).

CORABIA. Clasa 8. Begea I. Marian (2438, 55, E: 886, 90, 93, 901—03, 09, 11, 14). Clasa 10. Popa M. Constantin (2392, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 44—58, 61—63). *Absolvenţi*: Băjan Mihai (2383, 404, 05, 07—09, 11—15, 17), Stoica Marin (2385, 95, 406, 07, 14, 17, 21, 38, 45, 49, 53, 55, 60, 63).

CRAIOVA. *Şcoala medie nr. 1 « N. Bălcescu »*. Clasa 10. Georgescu Gh. Gheorghe (2395, 97, 404, 05, 07—11, 27), Opriş Dumitru (2392, 404, 06, 07, 10, 15, 27, 32, 38, 45, 47—50, 52—55), Stancu Dinu Dorin (2404—10, 15, 24, 45, 48).

Şcoala medie nr. 2 « Fraţii Buzeşti ». Clasa 9. Radu Gh. Gheorghe (2445—48, 52, 55—57, 62). Clasa 10. Bărboiu D. Mircea (2448, 49, 52—57, 62, 63, 97).

Şcoala medie nr. 3. Clasa 8. Cetăţeanu Rodica (2392, 400, 04, E: 886 88, 91, 93, 97, 98, 909). Clasa 9. Negreţu Mariana (2395, 404, 08, 10, 55, 56, 61—63). Clasa 10. Alpredi Elvira (2392, 95, 97, 402, 04—10, 31, 38, 42, 46—48, 51—53, 55—58, 61—63, P).

Student Truţă Coriolan (2391, 97, 99, 404, 06—08, 10, 12, 13, 15, 24, 26, 30, 42, 45, 46, 48, 52, 55). *Absolvenţi*: Bărbulescu I.Ion (2405—07, 09, 11, 12, 15, 45, 48, 50, 52, 62), Bratcovici Marin (2449, 59, 72, 73, 78, 80, 82, 87, 89, 97), Dinuţ Teodor (2385, 95, 421, 25, 27, 36, 38, 70—73, 76—79, 83 87, 90, 91, 97—99), Georgescu A. Paul (2339, 40, 54, 56, 57, 60, 63, 78—80), *Mihai K. Gheorghe* (2349, 54, 56, 57, 59—61, 63, 64, 74, 78—80, 92, 94, 95, 404, 14, 16—18, 35, 45—63), Pungaru V. Mircea (2356, 57, 59, 60, 63, 78—80, 95, 404—10, 17, 18, 45, 46, 55, 56, 61—64).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa 10. Iliescu Şerban (2404, 05, 08, 09, 13—15, 17, 36, 38), Murăreci Fănică (2430, 38, 45—53, P).

DEJ. Şcoala medie nr. 1. Clasa 10. Motognea Stepan (2404—09, 11, 15, 38, 45, 48, 52, 55, 62, 63).

*Şcoala medie nr.*2. Clasa 8. Costea Gheorghe (2405, 55, 64, E: 886, 99, 902, 11, 18, 19), Filip Liviu (2455, E: 886, 93, 98, 902, 11, 14, 18), Ilieşu Nicolae (2405, 45, E: 887, 902, 11, 18, 93, 98), Lăpăzan Emilia (2405, 55, E: 886, 93, 901, 02, 05, 09, 11, 14), Perja Lucia (2403, 06, 38, 40, 55, 63, E: 886, 89, 94, 902, 07, 09, 15), Petrina Petru (2438, 55, E: 858, 86, 93, 902, 14, 16, 18, 19), Custură Paula (2395, 402, 04—06, 08—10, 38, 45, 46, 55, 57, 61, 63), Haranguş Ana (2404—10, 45, 55, 56, 61—63), Munteanu Lucia (2329, 95, 98, 400, 05, 06, 09, 10, 45, 55, 56, 62, 62, 71), Mureşan Maria (2400, 05—07, 09—11, 45, 55, 56, 61—63), Petraru Elena (2392, 95, 400, 05, 06, 09, 10, 45, 55, 56, 61, 63, 69, 71), Pop Eugenia (2392, 404—06, 09, 10, 45, 55, 61—63), Pop Maria (2404, 07, 09, 10, 45, 55, 56, 61, 63), Pop Terezia (2404—06, 08—10, 45, 55, 56, 61—63, 71), Puşcaş Ana (2395, 400, 05, 06, 09, 10, 38, 45, 55, 57, 61—63), Săvan Aurelia (2329, 95, 404, 06, 08—10, 45, 55, 56, 63,), Suciu Voichiţa (2404—06, 09, 10, 38, 45, 55—57, 62, 63, 92, 95), Văclaş Maria (2400, 05, 06, 09, 10, 38, 45, 55—57, 62, 63, 67, 71). Clasa 10. Cîmpeanu Romulus (2431, 32, 38, 42, 45, 48, 52, 55, 56, 62, 63).

DEVA. Clasa 10. Certejan Tiberiu (2379, 415, 44, 46—48, 55—58, 62).

DOROHOI. Clasa 9. Ispas I.Mihai (2404—07, 09—10, 45, 61, 62,). Clasa 10. Cuciureanu Aurel (2395, 405—07, 09, 44, 45, 48, 50, 55, 56, 61, 63), Jişcanu Vasile (2404, 05, 07, 09, 10, 45, 48, 50, 55, 61—63), Popa Gheorghe (2404—06, 09, 10, 44, 45, 52, 55, 56, 61, 63).

FOCŞANI. Clasa 7. Tudorancea Agripina (E: 880, 81, 94, 95, 97, 98, 905, 06, 09).

GĂEŞTI. Clasa 9. Triboi Eugen (2329, 95, 404, 05, 09, 10, 30, 38, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 61—63). Clasa 10. Tîrtan Gabriel (2418, 19, 30—34, 38, 45, 49, 50, 59, 83).

GĂLĂŢENI (Bucureşti). *Şcoala de 7 ani. Ionescu V.Marian* (2395, 406, 10, 44—46, E: 874, 76, 77, 79—81, 84, 86, 93—95, 99—903, 06—09, 11, 12, 15, 17, 19).

GALAŢI. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 10. Marcovici Iosif (2411, 38, 45, 46, 49, 53, 56, 57, 61—63).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 9. Noiman Gergeta (2395, 404, 05, 09, 10, 45, 55, 57, 62), Pintilie Constanţa (2395, 404, 05, 08, 09, 26, 55, 57, 62, P).

Şcoala medie M. Clasa 8. Munjiev Gerge (E: 875—77, 79—81, 83, 84, 901,). Clasa 9. Giurgea Victor (2395, 404—11, 44—46, 50, 55, 56, 61, 62,). Clasa 10. Amariei Iulian (2404—09, 11, 57, 63), Hobai Marcel (2412, 27, 46, 49, 50, 52—55, 57), Nicolae Ion (2404—06, 08—10, 25, 27, 45, 46, 48, 52—56, 63).

GIURGIU. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Perşoiu I. Titus (2455, 61, E: 874, 76, 78, 80, 83, 84, 86, 88, 93), Popescu M. Cristian (2362, 95, 404, 38, 46, 55—57, E: 881, 88—90, 93, 98, 903, 09), Popescu M. Radu (2356, 405, 09, E: 871, 75, 80, 85—90, 92—94, 97, 98). Clasa 9. Toma P. Const (2357, 59, 68, 78, 92, 95, 404—10, 38, 45—48, 50, 52, 55—57, 59), Vasilescu Florian (2346, 49, 53, 56, 57, 60, 64, 68, 70, 72, 77, 78, 82, 92, 405),, *Vişinescu M. Mihai* (2306, 67—69, 75, 78, 98, 400, 14, 16, 17, 20, 32, 34, 35, 41, 44—50

53—56, 58, 60—64). Clasa 10. Şerban Aurel (2395, 405, 07, 10, 15—17, 42, 44—46, 48—50, 52, 54, 57, 58, 60, 62, 63, P).

HOREZU (Piteşti). Clasa 10. Belciu D. Alexandru (2395, 404, 07, 45, 48, 50, 52, 55, 57—59, 61—63).

IANCA (Galaţi). Clasa 10. Iancu D. Ovidiu (2392, 95, 97, 400, 02, 04—12, 15, 17, 44, 46—49).

IAŞI. *Stundenţi*: Mihai Aurel (Fac. mat.-fiz.) (2349, 54, 92, 405, 09, 14, 15, 17, 45, 47, 48, 57, 62), *Rotaru Const.* (Inst. Politehnic) (2343, 46, 47, 49, 51, 52, 56, 57, 59, 61—64, 70—80, 84—86, 90, 92, 95—97, 99—401, 04—10, 12—16, 24, 27, 44—63, P).

Şcoala medie nr. 1 « *Mihail Sadoveanu* ». Clasa 9. Cosma Nicolae (2392, 94—96, 99, 405—07, 09, 10, 25, 45—47, 51, 55—58, 62). Clasa 10. Cuşmaru Ilie (2414, 17, 26, 30, 47, 52—54, 59, 61, 63, 72,), Iţicovici Michel (2430, 45, 46, 48, 55—58, 61, 62, 72), Şor Liber (2462, 30, 45, 47, 48, 52, 56, 58, 59, 61—63).

Şcoala medie nr. 3. « *C. Negruzzi* ». Clasa 9. Nanu Gh. Octavian (2425, 26, 29, 30, 37, 38, 47, 51, 52, 62, 71, 80, 82). Clasa 10. Creţu Mihai (2420, 22, 25—30, 31, 34, 35, 37—40, 42—53, 55—63, 69, P), Mămăligă Adrian (2384, 87, 91, 92, 96, 97, 99, 407, 09, 11, 24, 26, 27, 30, 46, 48, 49, 52, 53, 55—57, 61, 62), Manole Virgil (2444, 47, 48, 50, 52, 55—57, 60, 62, 63).

Şcoala medie nr. 8. Clasa 8. Botez Gheorghe (2420, 32, 38, 39, 55, 56, E: 899—901, 03, 05, 06, 08, 09).

LUGOJ. Clasa 10. Boroancă Ion (2444—49, 51, 53—58, 61—63), Păpuşoiu Gh. (2423, 26, 30—32, 34, 35, 38, 39, 45—51, 53—58, 61, 62, 64, 88—91, P).

MEDGIDIA. Clasa 10. Abdulamit Ghiulber (2395, 405, 06, 08—10, 15, 16, 45, 48, 56, 61, 63).

MEDIAŞ. *Şcoala A. Jilăveanu S. Gheorghe* (2329, 95, 99, 404, 05—21, 31—34, 38, 42, 44—50, 52—58, 60—64, P), Olteanu Const. (2392,95, 405, 07, 09—11, 17, 33, 44—46, 48, 50, 52—56, 62), Panţuru T. Dumitru (« Cîteva propietăţi ale triunghiului ortic ») (2390, 92, 94—96, 99, 404—11, 13—18, 20, 23, 33, 35, 38—40, 44—50, 52—58, 61—63, P).

MORENI (Ploeşti). Clasa 8. Moflic Emilian (2422, 34, 38, 55, 56, 62, 64, E: 871, 90, 903, 08).

OCNA MUREŞULUI. Aiud. Clasa 10. *Rusu Mihai* (2292, 97, 99, 304, 07, 09, 16, 19, 53, 54, 56, 57, 59—61, 64, 71—74, 77—79, 92, 95, 402, 04—11, 13—15, 17, P).

ORADEA. *Absolvent* Giacomelli Ioan (2418, 33, 38, 44, 46, 49, 53—55, 60, 62, 64). *Şcoala medie nr.*1. Clasa 9. Dalacu Nicolae (2385, 92, 94, 405, 55, 56, 58, 61, 62, P), Onescu Victor (2385, 92, 95, 99, 405—07, 09—11), Pascovici Dumitru (2385, 92, 404—07, 10, 55, 57, 56), Trip Nicolae (2392, 404, 05, 07, 09, 10, 38, 45, 46, 55—58, 61, 62). Clasa 10. Dan T. Traian (2404, 05, 09, 10, 14, 45, 48, 49, 53, 54, 56, 62, 63), Gheregi Paul (2405, 07, 09, 10, 14, 44—46, 48, 52, 62, 63), Cristina Gheorghe (2424, 26, 27, 38, 44—57, 61—63, 72, 83), Iudea Andrei (2405, 09, 10, 44—49, 52—56, 61—63), Paşca Nicolae (2395, 417, 24, 31, 38, 42, 44—50, 53—58, 61—64, 99).

ORAŞUL STALIN. *Şcoala medie nr.*4. Istok Albert (2444, 45, 48—53, 55, 56, 61—63).

PIATRA OLT. *Şcoala de 7 ani.* Clasa 7. Florea Doina (2404—07, 09, 10, E: 890, 91, 94, 96, 909).

PITEŞTI. Absolvent Ghiţulescu Iulian (2383, 85, 92, 404, 05, 08, 09, 12, 14—18, 33, 45, 48, 52, 55—57, 60, 61). Clasa 9. Bică I. Constantin (2387, 96, 98, 406, 08, 24, 38, 51, 61, 63, 71, 97). Clasa 10. Badea D. Gheorghe (2405, 07, 09, 44, 45, 48, 49, 52—54, 62), Neculce Silvia (2395, 02, 04—11, 14, 17).

PLOEŞTI. *Şcoala medie nr. 1* « *I. L. Caragiale* ». Clasa 7. Marinescu Alexandru (2392, 406, 56, 63, E: 874—76, 79, 83, 98). Clasa 8. Teodorescu Luiza (2400, 04—07, 09, 55, E: 886, 90, 93). Clasa 9. Ciochină Const. (2357, 92, 95, 99, 404—10, 45—48, 55, 57, 61, 62), Crăciun Gh. Nicolae (2392, 95, 404—10, 46, 54—56, 58, 61—64, 94, 97), Crasan Octavian (2392, 95, 404—11, 15, 55, 56, 61, 62), Dumitrescu Mircea (2392, 95, 403, 04, 06, 03, 38, 53, 55, 59, 61, 62), Năstase Victorian (2245, 359, 407—09, 38, 53, 55, 61, 62), Negulescu Dumitru (2404, 05, 10, 44—48, 50, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Geain Haim (2357, 68, 77, 78, 84, 86, 403, 06, 08, 10, 15), *Georgescu P. Adrian* (2392, 95, 402, 04, 05, 07—11, 14, 15, 17, 42, 45—49, 52—63, 72, 82, 90), Marussi B. (2392, 406, 14, 17, 42, 44—46, 48, 52, 53, 56—58, 62, 63), Niculescu Dorin (2356, 57, 59, 68, 78, 95, 404—11, 45, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 61, 62, 64), *Păncescu Florin* (2353, 57, 58, 60, 64, 63, 68, 70—74, 78—80, 92, 95, 404, 05, 07, 09—11, 45—50, 52—57, 59, 62, 63), *Popescu Eugen* (2383, 90, 92, 95, 97, 99, 404—11, 15, 24, 38, 44—52, 54—58, 61, 63, 72, 80—82, 90, 97), Vieru C. Teodor (2395, 405, 09—11, 46, 55, 63).

Şcoala medie nr. 2 « A. Toma ». Clasa 7. Ciortan Stanca (E: 885, 87—89, 91, 93, 94, 97, 905, 07, 09). Clasa 10. Dumitrescu T. Silvia (2404, 05, 09, 10, 45, 48, 49, 52, 54, 55, 57, 62), Dobrişan Mariana (2360, 64, 404, 07, 08, 12, 15, 42, 44—46, 56—58, 62).

Şcoala medie nr. 3 Clasa 7. Negrea Ştefan (2392, E: 885, 88, 89, 93, 94, 99, 900, 02, 03, 07, 08). Clasa 8. Negrea Mihai (2392, 420, 38, 88, 91, 93, E: 889, 94, 903, 07, 14). Clasa 9. Băzăvan Ghiocel (2404, 05, 07, 44—48, 50, 55—57, 61, 62).

Şcoala de 7 ani nr. 14. Clasa 7. Giorghiu A. Nicolae (E: 885—88, 90, 92—94, 96, 97). PUCIOASA. Clasa 8. Dincă Stan (2438, E: 899—903, 08, 09, 11, 15), Erhan Const. (2434, 38, 56, E: 885, 86, 88, 93, 98—903, 08, 09), Şerbănoiu Nicolae (2438, 56, E: 899—903, 08, 09, 11, 13, 15, 18, 19). Clasa 9. Biscupschi Cezar (2445, 46, 48, 52, 55, 56, 58, 61—63), Gheorghe I. Nicolae (2438, 44—46, 48, 52, 55, 56, 58, 61, 62), Grigorescu Grigore (2445, 46, 48, 52, 55, 56, 58, 61—63), Oproiu I. Vasile (2444—46, 48, 52, 55, 56, 58, 61—63). RĂDĂUŢI. Clasa 10. *Iftimie Viorel* (2381—87, 89—405, 07—20, 22—25, 27—35, 37—40, 42—64).

REŞIŢA. Clasa 10. Cucu Romulus (2360, 78, 79, 92, 95, 400, 04—11).

RÎMNICU SĂRAT. Clasa 7. *Bunea Teodor* (2404—06, 08, 09, 39, 44, 45, 56, E: 885—91, 93—95, 97, 99—903, 05, 06, 08, 09, 11, 14). Clasa 8. Popescu C. Cornel (2444 55, E: 886, 89, 90, 93, 901, 02, 05, 09, 11, 14, 15, 18, 19), Puiu Octavian (E: 875—77, 79, 80, 83, 85, 88, 89, 91).

RÎMNICU VÎLCEA. *Şcoala medie nr. 1.* Clasa 8. Munteanu Gh. Marin (2394, 455, E: 886, 89, 93, 98, 901, 02, 09, 13). Clasa 9. Constantinescu I. Ion (2395, 404, 06, 09, 11, 45, 46, 48, 50, 51, 55, 57, 61, 62), Neguţ Nicolae (2392, 94—96, 98, 400, 07, 13, 25, 26, 46, 55, 57, 58, 62). Clasa 10. *Bulucea D. Const.* (2371, 423, 25—32, 37—39, 41, 44—64, P), Circiumărescu Florin (2404, 05, 09, 10, 38, 48, 49, 54, 55, 57, 61, 63), Constantinescu I. C. (2395, 404, 05, 09, 10, 45—48, 51, 53—55, 57, 59, 61—63), Petre Dan (2378, 404, 08, 11, 15, 16, 44—46, 48, 49, 52, 55, 56, 61 — 63), Petrescu I. Constantin (2405, 07, 10, 32, 38, 45, 48, 49, 52, 55, 56, 62), Răducănoiu Cornel (2444—46, 48, 49, 52—58, 61—63), Văcărescu N. Nicolae (2415, 19, 23, 26, 30, 34, 38, 41, 42, 44—64, 72, 77, 78, 87, 90, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa 9. D. Andrei Georgeta (2392, 404, 05, 08—10, 24, 38, 45, 55, 56, 61—63), Cîrstea Jenica (2404, 05, 08—10, 38, 45, 55, 56, 61—63), Despoiu Marinela (2392, 404, 05, 08—10, 24, 38, 45, 55, 61), Florica Elena (2392, 404 05, 08, 09, 24, 38, 45, 55, 56, 61, 62).

TROŞIORI DE VEDE. Clasa 9. Leonte Alexandru (2434, 39, 44—49, 52, 53, 55, 57, 58, 60—62). Clasa 10. Beianu Zaharia (2407, 28, 31, 33, 40, 44, 46, 48, 55, 57, 61—63), *Grecu Anton* (2347, 56, 64, 92, 94, 404, 08, 11, 18, 24, 33, 34, 38, 40, 41, 44—47, 49, 50, 52—58, 61—63, 64, 82, 89, P), Iancu D. Petre (2445, 46, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 60—63), absolvent Rizescu Ilie (2433, 34, 44—46, 49, 50, 53, 54, 55, 61, 62, P).

SATU MARE. Clasa 9. Fănăţean Nicolae (2404, 05, 09, 10, 38, 45, 55, 61, 62), Săveanu Mircea (2404, 05, 09, 10, 38, 45, 55, 56, 61, 62), Soran Ioan (2304—06, 08—10, 49, 53, 56—58, 79). Clasa 10. Lupuţiu Gheorghe (2312, 414, 18, 33, 46, 48, 49, 52—54, 57, 62), Meteş Vasile (2392, 95, 404, 06, 34, 38, 36, 55, 56, 62, 91).

SIBIU. *Şcoala M. A.* Pirău Marius (2392, 404, 06, 10, 27, 38, 44—46, 48, 53, 55, 57, 60—62), *Pupăzan V. Nicolae* (2418, 23, 24, 26—28, 30, 32, 35, 37—39, 42, 65, 68, 71, 72, 76, 78, 80—84, 87—91, 97—99), Stoica Marin (2356, 57, 59, 60, 78, 433, 38, 44, 45, 48—50, 52, 53, 55—57, 60—62).

SIGHET. Clasa 8. Tomoiagă M. Dorin (P).

SIGHIŞOARA. *Şcoala medie mixtă nr. 1.* Clasa 8. Capidan Cristina (2455, 56, 62, 63, E: 903, 05, 11, 14, 17), Cernuscă M. Nicolae (903, 05, 11, 14, 17, 18, 55, 56, 61—63), 61—63), Para Rodica (2455, 56, 62, 63, E: 903, 05, 11, 14, 17), Tudoran Viorica (2455, 56, 62, 63, E: 903, 05, 11, 14, 17, 18). Clasa 9. Vîlceanu Viorel (2404, 05, 09, 10, 13, 38, 44, 55, 62, 72, 77, 91). Clasa 10. Roşca Nicolae (2404—07, 09, 10, 12, 13, 15, 38, 44—46, 48, 50, 52, 55, 57, 62, 90).

Şcoala medie germană. Clasa 10. Bredl Heinke (2405, 44, 45, 48, 49, 50, 55—57, 63), Bucovski Peter (2430, 33, 38, 42, 44, 46—49, 51, 52, 55—57, 09, 61—64), Dengel Elfriede (2409, 15, 44, 48, 50, 53, 55—57, 62, 63, 92).

SLĂNIC (Ploeşti). Clasa 10. Soare Andrei (2395, 404, 05, 07—10, 48, 55, 61—63, 72).

SLATINA (Piteşti). Clasa 10. Florea Dorel (2384, 86, 411, 15, 45, 46, 48, 52, 54, 56, 71), abs. Dorobanţu Valeriu (2383, 84, 97, 409, 419, 20, 32, 43, 47, 51, 60, 73, 74, 76, 77, 81, 83, 87, 92, 97—99).

SUCEAVA. Absolvent. Robilă V. Ioan (2392, 94, 400, 05, 06, 09—11, 45, 48, 63).

TECUCI. *Şcoala medie nr.* 2. Clasa 8. Ailioaiei Rodica (2392, 455, 62, E: 886—90, 92, 93, 900—02, 06), Bradea Ioan (2392, 34, 38, 55, E: 886—94, 97, 98), Crucianu Maricica (E: 887, 89, 91, 93, 94, 98—900, 02, 03, 09), Gavrilă Tudorică (E: 863, 64, 69, 72, 79,

83, 91, 93, 901, 09), Ignatovici I. Victoria (E: 886—89, 91—94, 907, 09, 11). Clasa 10. Hilohi V. Dan (2440—50, 53, 54, 57, 58, 61, 63, 87), Munteanu Romeo (2392, 404—06, 09, 10, 44, 46, 49, 50, 53—55, 61, 62). *Tudose Traian* (2385, 91, 94, 95, 402, 04, 05, 08, 09, 15, 24, 32, 34, 38, 44—56, 61—64).

TIMIŞOARA. *Şcoala medie nr.* 1 Clasa 8. Bratu Dorin (2455, 56, 61, E: 902, 03, 06 — 09), Coajă Alexandru (2420, 38, 55, 56, 62, E: 899, 900 — 03), Mureşan Vasile (2455, 61, 62, E: 899, 909). Clasa 9. Anuţi Aurel (2356, 57, 60, 92, 94, 95, 404—07, 10 45, 52, 55, 57, 62), Boanţă Alexandru (2444—48 50—52, 56, 57, 59, 61—63), Ciucurel Olimpida (2349, 53, 56, 57, 59, 61, 92, 404—06, 10), Grossler Const. (2444—48 55—57, 61—63), Ionescu Alex. (2424, 44—48, 50, 51, 55—58, 61—63), Mihăileanu N. Constantin (2406—15), Vlădea Radu (2438,44—46, 48, 55, 56, 58, 62, 63). Clasa 10. Stricher Petre (2446—48 50, 52—57, 62, 63, 72, 97, 99).

Şcoala medie nr. 7. Clasa 10. Junger Agneta (2432, 35, 40, 45, 46, 49, 56, 57, 61—63).

TÎRGOVIŞTE. Clasa 8. Brezeanu I. Florin (2349, E: 874—76, 78—80, 83, 84, 86, 88—90, 92, 97, 99, 900—03, 09), Rujan N. Romulus (2455, 62, 63, E: 874, 76, 79, 80, 83, 84, 86, 88, 93, 99, 902, 03, 09). Clasa 9. Dumitru I. Gheorghe (2392, 95, 404—07, 09, 10 27, 46, 48, 52, 55, 56, 58, 61, 62 P), *Popescu S. Liciu Dan* (2356—59, 70, 72, 84, 92, 94, 95, 97, 98, 99, 404—11, 20, 32, 38, 44—46, 51, 55, 56, 58, 61—64).

TÎRGU-JIU. Clasa 8. Aniţescu N. (E: 866, 74—80, 83, 84), Velicescu Mircea (2340, 47, 49, 56, 57, 59, 60, 70—72, 74, 80, E: 863—66, 74—79, 81, 83). Clasa 9. Aniţescu N. Nicolae (2345, 47—49, 54, 56, 57, 60, 63, 64, 71—80), Bozdog Ion (2345, 48, 49, 54, 56, 56, 57, 63, 64, 71, 78—80), Cocheci N. Nicolae (2392, 95, 400, 05—07, 10, 45, 48, 55, 62). Clasa 10. Hoară Horaţiu (2415, 44—48, 51—53, 55—58, 61—63).

TÎRGU MUREŞ. *Liceul « Bolyai Farcaş »*. Clasa 9. Vecerdi Teodor (2385, 87, 92, 95, 405, 06, 09, 10, 45, 46, 55, 56). Clasa 10. *Peterfi Attila* (2321, 63, 64, 70, 79, 87, 91, 92, 94, 95, 97, 98, 400, 02, 04—11, 13—20, 31—34, 38, 42).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa 10. Stîngu Nicolae (2379, 95, 404, 05, 07, 09, 11, 14, 17, 32, 38, 45, 46, 49, 50, 52, 53, 56, 61, 63, 64), abs. Răileanu Mihai (2384, 87, 92, 95, 52—59, 61—63).

TÎRNĂVENI. Absolvent Neamţu Ioan (2431—33, 38, 43, 44, 48, 50, 52—54, 61—64).

TITU (Bucureşti). Clasa 10. Ghinea P. Ion (2404—10, 44—46, 48, 49, 52, 53, 55—58, 61—64).

TRUSEŞTI (Suceava). Clasa 7. Dimitriu Emilia (2404, 05, 09, 38, 52, 55, 56, E: 890, 93, 901, 02). Clasa 8. Aniţei Aneta (2368, 404—06, 09,38, 55, 56, 69, E: 890, 93, 901, 02), Bodron Const. (2405, 38, 55, E: 874, 76, 79, 80, 86, 900, 02), Bodron Marin (2438, 63, E: 880, 86, 90, 93, 901, 05), Buhăceanu C. Maria (2405, 06, 38, 55, 63, 65, E: 876, 90, 93, 98, 900, 02), Călin Alexandrina (2368, 404—06, 09, 38, 55, 56, 62, 63, E: 874, 76, 79, 80, 86, 91, 96, 98—903), Cojocaru Const. (E: 874, 76, 79, 80, 86, 93, 94, 98—900, 02, 06, 09, 38, 55, 56, 62), Dănilă Elisabeta (2405, 06, 09, 38, 55, 56, 62, E: 880, 901, 02, 05), Damian Vasile (2405, 06, 38, 55, 62, E: 876, 79, 85, 86, 93, 903), Furtună Ioana (2405, 06, 09, 38, 55, 56, 62, E: 874, 76, 79, 80, 86, 90, 93, 96, 99, 900, 03, 05), Grasu Maria (2405, 06, 09, 38, 55, 62, 65, E: 876, 80, 93, 96, 99, 900, 02, 09,), Grosu Margareta (2404—06, 09 55, 56, 62, E: 874, 76, 79, 80, 91, 93, 96, 902), Ioniuc C. Constantin (2438, 55, 56, 65, E: 876, 79, 80, 86, 89, 900, 02), Lazăr Eugen (2392, 400, 38, 55, 62, E: 876, 79, 80, 84, 86, 90, 93, 99, 900—02, 05, 08, 09), Lopatnic Veronica (2406, 09, 38, 55, 56, 62, E: 874, 76, 79, 80, 86, 90, 91, 901, 02), Mighin Viorica (2404—06, 09, 38, 55, 56. E: 890, 93, 901, 02), Popovici Mihai (2392, 405, 06, 38, 55, 56, 63, E: 876, 72, 80, 84, 86, 90, 93, 99, 900—03, 05), Psoski Cristian (2406, 38, 55, 56, 65, E: 874, 76, 79, 80, 86, 93, 99, 900—02), Raulic P. Teodor (2406, 38, E: 874, 76, 79, 80, 86, 93, 94, 98—900, 02), Rotaru Eugenia (2405, 06, 09, 38, 55, 62, E: 890, 95, 98, 901, 02, 09), Rotundu Laurenţiu (2392, 438, 55, 63, E: 876, 79, 80, 84, 86, 90, 93, 99, 900—02, 05, 08), Silion Lucia (2401, 02, 04—06, 08, 09, 38, 55, 56, 62, E: 890, 94, 900—02), Simion Valentina (2405, 56, 62, E: 874, 80, 86, 99, 900, 02), Strungaru Vasile (2348, 455, E: 874, 76, 80, 86, 93, 900, 02, 05), Tigăniuc Dumitru (2368, 405, 06, 38, 55, 56, 62, 63, E: 874, 76, 79, 80, 86, 94, 99—903, 05), Vornicu Emilia (2404—06, 09, 38, 55, 56, 62, E: 890, 93, 01, 02). Clasa 9. Benic Georgeta (2357, 404—06, 08, 10, 56, 57, 61, 62), Cadinoiu I. Ioan (2357, 78, 92, 404—06, 08—10, 38, 45, 46, 55, 56, 61, 62), Chihaia Marinela (2404—06, 09, 10, 38, 55, 56, 61, 62), Chiponea Maria (2357, 404, 06, 08—10, 38, 55, 56, 61, 62,), Cojocaru Nicolae (2357, 404—06, 08—10, 38, 45, 55, 56, 61, 62), Enea Mircea (2357, 404, 06, 10, 38, 55, 56, 61, 62), Furtună Luminiţa (2357, 68, 79, 404—06, 08—11, 38, 46, 50, 55, 56, 61, 62), Grosu C. Ion (2357, 404, 06, 08—10, 38, 45, 55, 56, 61, 62,), Moni M. Ortansa (2404—06, 08—10, 38, 55—57, 61, 62), Neamţu Nicolae (2404—06, 08—10, 46, 55—57, 61, 62), Prisăcaru M. Cornelia (2357, 404—06, 08—10, 38, 55, 56, 61, 62), Valenciuc Rodica (2404—06, 09, 10, 38, 55, 56, 61, 62). Clasa 10. Bejenaru Gh. Ioan

(2345, 49, 61, 78, 95, 404—10, 17, 38, 42, 44—46, 05 49, 50, 53—57, 61—63), Bejenaru Gh. Maria (2345, 49, 61, 74, 78, 95, 404—10, 17, 38, 42, 44—46, 49—50, 53—56, 61—63), Bîdin Al. Marcel (2378, 404, 05, 08—10, 38, 44, 46, 50, 55, 56, 61—63), Buhai Gh. Gheorghe (2378, 404—06, 08—10, 38, 44, 46, 50, 55, 56, 61—63), Creţu C. Ioan (2378, 404—06, 08—10, 38, 42, 46, 55, 56, 61, 63), Epure C. Const. (2349, 78, 404, 05, 68, 406, 08—10, 38, 46, 39, 50, 53, 55—57, 61—63), Iftimie Emil (2378, 95, 404—06, 10, 38, 44, 50—51, 53, 55, 57, 62, 63), Mocanu H. Ovidiu (2378, 404—06, 09, 10, 14, 17, 38, 44—46, 49, 50, 54—57, 61—63), Nechifor C. Dan (2378, 404—06, 08—10, 38, 44, 50, 55, 61—63), Toma C. Mihai (2378, 95, 404—06, 08—10, 38, 44—46, 49, 50, 55—57, 61—63), Volintiru C. Radu (2368, 78, 404, 05, 08—10, 38, 42, 44, 50, 55, 56, 61, 63).

TURNU MĂGURELE. *Absolvenţi.* Marin Năstase (2432, 38, 45, 48, 49, 52, 53, 55—57, 60—63), Stoicea P. Tudor (2432, 34, 38, 45, 48, 49, 51, 52, 55, 57, 58, 60, 62—64).

TURNU SEVERIN. *Şcoala medie nr.*1. Clasa 9. Alexe I. Alexandru (2392, 407, 45, 46, 48, 55, 61, 62). Clasa 10. Caragioiu Mircea (2424, 27, 45, 46, 48—51, 54—57, 61, 62).

URLAŢI. Clasa 10. Enache Ion (2325, 405, 06, 09, 10, 45, 46, 48, 49, 52, 55, 57, 59, 62, 63).

★

Mulţi elevi trimit probleme propuse cunoscute şi astfel riscă să nu li se mai ia în seamă problemele ce vor mai trimite.

Reamintim că problemele rezolvate identic, unele chiar cu greşeli comune, trimise de unii corespondenţi, nu vor fi luate în seamă, fiind un exemplu negativ.

Pînă la apariţia G.M.F.B. Nr. **7** se mai primesc soluţii la problemele propuse în numerele 4—**6** din 1957. Elevii de clasa VIII-a pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru clasele V-VII.

La probleme propuse la rubrica *Chestiuni de examen* se primesc soluţii timp de *trei luni* de la publicarea enunţurilor.

Soluţiile trimise să fie aşezate în *ordinea lor numerică* iar pe plic să se scrie numele, **clasa** şi **şcoala** din care rezolvitorul face parte.

După apariţia acestei reviste, şcolile medii care participă la întrecerea pe cercuri de elevi pe şcoli sînt rugate să ne trimită fişa respectivă conform indicaţiilor date în numărul 11 din noiembrie 1956.

***ERATĂ.* — La problema 2685 în loc de diametrele se va scrie segmentele.**

Biblioteca Matematică Română

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957, G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a și a *X*-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calulele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au *dat generalizări* și observații interesante sub formă de *note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor *extrașcolare* la matematică și la fizică, asupra *cercurilor de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei *se vor face. Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARCUŞEVICI.	Şiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducţiei matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităţilor.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARCUŞEVICI	Arii şi logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice şi alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime şi minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele şi observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calculul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVŢEV	Experienţe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente de teoria congruenţelor de drepte.
20. GH. ŢIŢEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.
22. NICOLAE STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere la fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORŞ	Noţiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.

ABONAMENTUL LA G.M.F.-B PE ANUL 1957, ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE)

C. 523 — Intreprinderea Poligrafică nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426

AAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
GIMEH - CSERE
VIMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

MAGHIAR

Anul VIII — iulie 1957

7

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, nr. 7—iulie 1957

SUMARUL

Pag.

1. *Examenul de fizică în concursul de admitere în institute şi facultăţi de conf. univ. N. Stănescu* 337
2. *Două articole de matematici elementare ale lui Traian Lalescu* 344
3. *Atracţia universală de prof. Angela Negulescu* . . . 350
4. *O aplicaţie în fizică a numărului „e": ecuaţia barometrului de A. Şaichin* 362
5. *Paralogisme geometrice de prof. univ. M. Ghermănescu* 366
6. *Note matematice* 373
7. *Probleme rezolvate (2029; 2030; 2031; 2159; 2160)* . 376
8. *Probleme propuse (2705—2727)* 380
9. *Chestiuni de examen (2728—2736)* 383
10. *Rezultatul „Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957"* 385
11. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 388

Anul VIII 7 iulie

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovan A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ. redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.** conf. univ.

REDACŢIA; Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articole, note, recenzii, probleme propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia G.M.F.-B se vor trimite pe adresa de mai sus

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VIII Nr. 7 iulie 1957

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONI

EXAMENUL DE FIZICĂ LA CONCURSUL DE ADMITERE ÎN INSTITUTE ŞI FACULTĂŢI

Conf. univ. N. STĂNESCU

CONSTATĂRILE făcute la examenul de Fizică de la concursul de admitere în Institute şi Facultăţi prezintă aspecte interesante, din care se pot desprinde concluzii folositoare pentru cei ce se pregătesc să dea aceste examene. De la început se constată că foarte multe lucrări scrise, de altfel ca şi răspunsurile orale, sînt slabe sau insuficiente. Iată un exemplu. La un asemenea examen, din 135 de lucrări scrise, numai 24 au fost apreciate cu nota 3 sau peste 3, iar restul de 111 au fost calificate cu note sub 3. Dacă ţinem seamă de faptul că tinerii candidaţi ştiau că dau un asemenea examen şi s-au pregătit în acest scop, rezultatele pun într-o lumină şi mai defavorabilă aspectul cifric. În articolul de faţă ne vom ocupa numai de lucrările şi răspunsurile slabe de la concursurile de admitere.

În ce constă insuficienţa răspunsurilor candidaţilor şi care este cauza ei?

În primul rînd, considerăm răspunsurile care dezvăluie totala ignoranţă la Fizică, a candidatului. Iată cîteva exemple de asemenea răspunsuri:

— Rezistenţa şuntului se calculează cu ajutorul legii $s = \frac{af^2}{2}$, unde a este rezistenţa galvanometrului; « Lungimea de undă este cantitatea de lumină a unei surse de curent care străbate un spaţiu de 1 mm/s »;

Apoi:

— « Areometrul se numeşte areometru, pentru că funcţionează cu ajutorul aerului ».

— « Ca să măsurăm curenţi de aşa intensitate, trebuie să micşorăm concentraţia soluţiei aflată în galvanometru ».

Un candidat defineşte mişcarea uniformă rectilinie în felul următor: « Atunci cînd asupra unui corp acţionează o forţă, iar corpul în virtutea inerţiei nu întîmpină nicio forţă care să se opună forţei iniţiale »;

— « Dilataţia este egală cu coeficientul de dilatare al metalelor înmulţit cu densitatea lui şi cu diferenţa de căldură care i se aplică (în grade) ».

Menţionăm că răspunsurile citate sînt reproduse textual, fără vreo parafrazare. Ne întrebăm cum de au reuşit aceşti candidaţi să afirme asemenea enormităţi? Socotim că ei nu au luat examenul în serios, pentru că este imposibil ca cineva care a studiat să fie totuşi atît de ignorant. Din acest considerent nu vom comenta răspunsurile citate.

Răspunsurile slabe dovedesc că mulţi candidaţi nu au noţiuni clare, bine conturate. De exemplu, unul dintre ei afirmă: « ca să mărim sensibilitatea galvanometrului de 100 de ori, împărţim scara gradată în diviziuni de 100 de ori mai mici ». Altul spune că: « razele catodice se lovesc de sticlă, se încetinesc total şi trec mai departe sub formă de raze X ».

Un altul încearcă să ne convingă că « miliampermetrul este a mia parte din ampermetru », iar « lungimea de undă este distanţa dintre două cuante de energie ». Alţii confundă presiunea cu forţa de presiune: « presiunea este proporţională cu suprafaţa fundului vasului ». De asemenea se confundă proprietăţile oglinzilor concave cu proprietăţile lentilelor. Unii candidaţi consideră punctele aflate la dublul distanţei focale a lentilelor drept centre de curbură ale feţelor lentilelor ! Asemenea lipsuri îşi au rădăcina în modul defectuos cu care sînt deprinşi elevii să înveţe. Ei se folosesc numai de memorie învăţînd mecanic, fără a pune la contribuţie puterea lor de judecată, pentru a-şi însuşi în mod conştient ceea ce citesc. Din această cauză ei acumulează noţiuni confuze, nu deosebesc fenomenele, descriu experienţele şi aparatele în mod neprecis. În legătură cu natura luminii unii din ei enumeră teoriile lui Newton, Fresnel, Maxwell, însă nu pot arăta în ce constă deosebirea dintre unda mecanică şi unda electromagnetică. Din aceeaşi cauză ei nu pot da un răspuns exact şi logic. Dacă în chestiunea de tratat nu există relaţii matematice, care să dea un aspect cantitativ răspunsului, ei se împotmolesc într-o expunere vagă, sinuoasă şi lipsită de logică, în care noţiunile şi denumirile se confundă între ele în aceiaşi măsură. Puţini candidaţi pot deosebi o mărime fizică de variaţia ei, de exemplu, fluxul magnetic şi variaţia fluxului magnetic. Studiul prin memorare împiedică însuşirea temeinică, durabilă a noţiunilor fundamentale şi pune pe candidat în situaţia de a nu putea face o expunere logică şi o demonstraţie consecventă, atît la studiu cît şi la examen. Elevii sînt ispitiţi întotdeauna să alunece pe această pantă, care simplifică pentru moment învăţarea lecţiilor « pentru nota de-a doua zi ». Cunoştinţele obţinute prin asemenea învăţătură se uită curînd şi lasă o încîlceală descurajantă în mintea elevului. Prin efort susţinut şi cu ajutorul profesorilor elevii trebuie să lichideze acest sistem de a învăţa. Memorarea mecanică a Fizicii mai are şi alte consecinţe: în primul rînd, elevii nu pot aplica cele învăţate la explicarea fenomenelor din natură şi din jurul lor. În al doilea rînd nu pot rezolva problemele de Fizică. Faptul că memorează formulele fără a cunoaşte şi înţelege principiul fizic pe care-l exprimă ele îi pune în situaţia de a rezolva numai acele aplicaţii în care trebuie înlocuite literele din formulă cu datele numerice din problemă. Ei nu analizează fenomenele fizice de la baza calculelor pe care le implică rezolvarea. Iată cum procedează un candidat pentru a rezolva următoarea problemă extrem de simplă: « Ce rezistenţă exterioară trebuie să aibă circuitul unui generator electric a cărui tensiune la borne este de 12 V pentru ca intensitatea să fie de 2 A, dacă sîrmele de legătură au 0,5 Ω? ». Candidatul afirmă că se aplică legea lui Ohm, ceea ce este just, şi scrie imediat:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{12}{2} = 6\,\Omega.$$

« Rezistenţa circuitului trebuie să fie de 6 Ω » conchide el. Întrebat ce rost are rezistenţa de 0,5 Ω dată de enunţul problemei, candidatul afirmă că este dată de prisos ! Ca să rezolve problema candidatul a folosit formula legii lui Ohm şi a luat din enunţ valoarea tensiunii şi a intensităţii, însă nici n-a încercat

măcar să se gîndească la realizarea concretă a circuitului cerut de enunțul problemei. Invitat să facă pe tablă schița circuitului, el o desenează după cum se vede în fig. 1, fiind și mai mult convins că în enunțul problemeni nu era necesar să se indice 0,5 Ω ! Iată unde duce memorarea mecanică a formulelor.

Un alt candidat trebuie să rezolve problema' « trei elemente Leclanché avînd fiecare forța electromotoare de 1,5 V și rezistența interioară de 2 Ω se leagă în paralel; care este intensitatea curentului principal, dacă circuitul se închide printr-o sîrmă cu rezistența de 3 Ω? ». Candidatul a dedus destul de repede formula corectă necesară rezolvării:

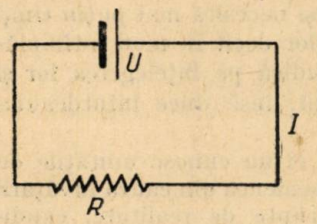


Fig. 1

$$I = \frac{E}{\frac{r}{n} + R} = \frac{1{,}5}{\frac{2}{3} + 3} \approx 0{,}4\ \text{A}.$$

Invitat să facă schema legăturilor el a desenat-o așa cum se vede în fig. 2 a. Fiind întrebat care este rezistența exterioară și care este cea interioară, candidatul modifică schema desenînd schema din fig. 2 b ! El nu a putut să arate cel puțin sîrma prin care circulă curentul principal.

Acestea sînt exemple tipice de studiu formal, de memorare mecanică a formulelor. Neavînd în gîndirea lor nici o legătură cu realitatea candidații nu înțeleg nimic din fenomenul fizic pe baza căruia trebuia să rezolve problema. Mai mult chiar, ei nu înțeleg nici motivul pentru care au fost notați insuficient, deși numeric au rezolvat problema.

Uneori însușirea formală a cunoștințelor și neobișnuința candidatului de a executa o schiță a condițiilor enunțate în problemă nu duce nici măcar la rezolvarea ei mecanică. Astfel, un candidat care avea de rezolvat problema: « Un ecran se găsește la depărtare de 1 m față de o lumînare aprinsă. La ce depărtare de lumînare trebuie pusă o lentilă cu distanța focală de 9 cm, pentru

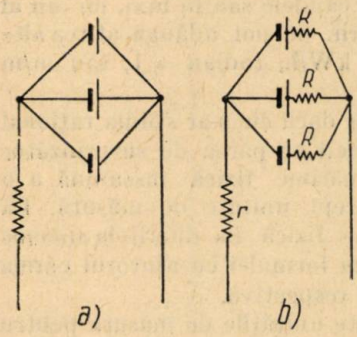


Fig. 2

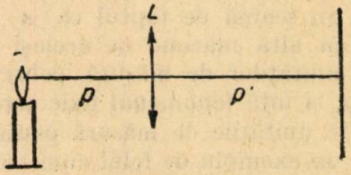


Fig. 3

ca imaginea clară a lumînării să se formeze pe ecran? » Candidatul a scris formula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

și a scos valoarea lui $p = \frac{p'f}{p' - f}$, socotind pe f și p' cunoscute și a dedus valoarea $p = 9{,}89$ cm. Dacă ar fi făcut schema montajului descris în enunț (fig. 3) el ar fi observat ușor că în realitate sînt cunoscute f și $p + p'$. Prin

urmare problema se rezolvă folosind două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \qquad \text{şi} \qquad p + p' = 100,$$

care duc la soluţiile $p = 10$ cm şi $p' = 90$ cm sau invers, $p = 90$ cm şi $p' = 10$ cm.

Este uşor de înţeles că memorarea mecanică, deşi necesită mai puţin timp pentru fixare, nu poate duce la rezolvarea problemelor decît în mod întîmplător. Studiul bazat pe analiza logică a noţiunilor, adică pe înţelegerea lor şi apoi pe memorare, implică un timp mai îndelungat, însă duce întotdeauna la rezolvarea justă a problemelor.

O altă lipsă a candidaţilor constă în faptul că ei nu cunosc unităţile de măsură. De asemenea din cauza învăţării mecanice şi rupte de realitate, candidatul memorează diferitele unităţi de măsură disparate, lipsite de legătură organică. Drept urmare elevii nu sînt în stare să sesizeze sau să deducă logic unităţile de măsură adecuate şi cu atît mai puţin să le folosească just la rezolvarea problemelor. Un candidat răspunde că în formula dilatării temperatura se exprimă în . . . secunde ! Întrebat de ce a ales această unitate de măsură, el răspunde: « deoarece lungimea este dată în milimetri ! ». Din acest răspuns se deduce nu numai ignoranţa candidatului, dar şi metoda lui de învăţare: memorare mecanică *A* memorat dar n-a înţeles şi în orice caz, a uitat. Deoarece însă, judecata cea mai elementară are nevoie de o bază concretă pentru a-şi sprijini deducţiile, candidatul face legătura între *t* (temperatură) şi *t* (timp). Explicaţia candidatului este un răspuns de ghiceală, dat la întîmplare. Un candidat afirmă că lungimea de undă se măsoară în candele sau în luxi, iar un al doilea, că lungimea de undă se măsoară în dioptrii. Se pot adăuga atîtea alte exemple de unităţi de mărimi date *greşit*: w/s, kW/h, radian = 1, sau m/m în loc de mm, 1 l = 0,0001 cm etc.

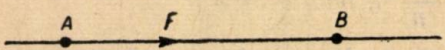


Fig. 4

Cîtă ordine s-ar pune în cunoaşterea unităţilor dacă ele s-ar studia raţional şi ar fi memorate numai după ce ar fi înţelese. Oricît ar părea de surprinzător elevii nu ţin seamă de faptul că a măsura o mărime fizică înseamnă a o compara cu altă mărime de acelaşi fel luată drept unitate de măsură. La stabilirea unităţilor de măsură pentru o mărime fizică în diferitele sisteme de unităţi, ei uită fenomenul fizic care stă la baza formulei cu ajutorul căreia se stabilesc unităţile de măsură pentru mărimea respectivă.

Dăm un exemplu de felul cum trebuie studiate unităţile de măsură pentru lucrul mecanic. Pornim de la faptul concret: lucrul mecanic se produce cînd o forţă *F* îşi deplasează punctul de aplicaţie din *A* în *B* (fig. 4). Valoarea lucrului mecanic efectuat este egală cu produsul dintre intensitatea forţei şi deplasare, aceasta efectuîndu-se pe linia de acţiune a forţei:

$$L = F.AB. \qquad (1)$$

Pentru măsurarea lucrului mecanic se va lua drept unitate de măsură de asemenea un lucru mecanic. Lucrul mecanic efectuat este egal cu unitatea, dacă *F* este egală cu unitatea şi deplasarea este egală cu unitatea. Prin urmare, oricare ar fi sistemul de unităţi de măsură, unitatea de lucru mecanic va fi lucrul mecanic efectuat de unitatea de forţă care-şi deplasează punctul de aplicaţie cu o unitate de distanţă, de-a lungul liniei ei de acţiune. După

cum se vede, definiția aceasta a unității de lucru mecanic descrie fenomenul fizic al producerii lucrului mecanic (fig. 4) și ține seamă de relațiile cantitative din formula lucrului mecanic (1). Ea este independentă de sistemul de unități, poate fi transpusă într-un sistem oarecare de unități, dacă forța și deplasarea sînt măsurate în unitățile sistemului dat. De exemplu, în sistemul C.G.S. unitatea de lucru mecanic este;

$$1[L]_{CGS} = 1 \text{ dyn. } 1 \text{ cm.} = 1 \text{ dyn. cm} = 1 \text{ erg,} \qquad (2)$$

adică: unitatea CGS de lucru mecanic este lucrul mecanic efectuat de forța de o dină care-și deplasează punctul de aplicație pe distanța de 1 cm de-a lungul liniei sale de acțiune; această unitate din sistemul CGS se numește erg.

In sistemul MKS unitatea de lucru mecanic are aceiași definiție; se înlocuiește unitatea de forță cu newtonul și unitatea de distanță cu metrul; această unitate se numește joule:

$$1[L]_{MKS} = 1 \text{ N. } 1 \text{ m} = 1 \text{ N.m.} = 1 \text{ j.} \qquad (3)$$

Dacă în definiția unității de lucru mecanic dată mai înainte se înlocuiește unitatea de forță cu 1 kgf și unitatea de distanță cu 1 m, se obține unitatea de lucru mecanic din sistemul M Kf S, adică kilogrametrul:

$$1[L]_{MKfS} = 1 \text{ kgf. } 1\text{m} = 1 \text{ kgf. m} = 1 \text{ kgm.} \qquad (4)$$

Iată cum o singură definiție generală, care trebuie memorată ca descriere a fenomenului fizic dat, servește la definirea a trei unități de lucru mecanic; acestea nu mai trebuie memorate deosebit, ci se pot deduce cînd este nevoie de ele. Prin această modalitate de învățare, diferitele unități se leagă organic unele de altele și se fixează ordonat și durabil în memoria candidatului.

În răspunsurile candidaților se mai observă lipsa deprinderii de a expune consecvent un subiect. Ei nu-și fac un plan al răspunsului în care să expună pe rînd și logic ideile și nu desprind esențialul de amănunt. Nu delimitează și nu caracterizează clar fenomenul despre care vorbesc. De multe ori candidatul spune: « nu știu cum să încep ». De exemplu, dacă trebuie să vorbească despre inducția electromagnetică cei mai mulți candidați descriu diferitele experiențe de inducție, fără a trage o concluzie din aceste descrieri și nu arată niciodată ce este în fond inducția electromagnetică: producerea unei forțe electromotoare într-un circuit, care limitează un flux magnetic variabil. În ce privește legea lui Lenz, rareori se găsește un candidat care să o poată enunța corect sau să o poată explica.

Expunerile abundă în expresii subiective, uneori comice: « luăm », « avem », « nostru »; de exemplu: — « luăm pe Jupiter . . . » (era vorba de viteza luminii), « aici avem un șurub de fixare . . . », « cilindrul nostru este așezat vertical . . . » etc. Toate piesele sînt ale noastre, aparatele sau mașinile nu au nimic. Din cele expuse pînă aici se pot deduce lipsurile cele mai frecvente ale pregătirii candidaților pentru examenele de admitere, lipsuri care trebuie și pot fi înlăturate. În acest scop candidații trebuie să părăsească metoda de învățare prin memorare mecanică. Ei trebuie să se obișnuiască să studieze rațional, consecvent, sistematizat.

În pregătirea unui răspuns bun la Fizică este necesar să se țină seamă de faptul că Fizica este o știință de observare calitativă a faptelor experimentale, de măsurare cantitativă a mărimilor fizice de care depind fenomenele și de

interpretare, adică de explicare ştiinţifică a fenomenelor naturii. Prin urmare, în răspunsul său candidatul trebuie să arate faptele experimentale sau observaţiile care stau la baza fenomenului tratat; el trebuie să caracterizeze acel fenomen şi să formuleze precis legile după care el se desfăşoară.

Să presupunem că trebuie tratată tema: mişcarea circulară uniformă. În răspunsul său candidatul va începe prin definirea ei, apoi va expune caracteristicile acestei mişcări şi deosebirile ei de mişcarea de rotaţie.

Cei mai mulţi candidaţi nu ştiu că mişcarea circulară uniformă este mişcarea unui solid în jurul unei axe.

Să vedem ideile principale pe care trebuie să le expună candidatul în răspunsul său, pentru ca acesta să aibă o înlănţuire logică. Le găsim expuse în paragrafele 113—119 din Manualul de fizică pentru clasa a VIII-a. Ele trebuie grupate în următoarele puncte:

a) viteza în mişcarea circulară uniformă;

b) acceleraţia radială centripetă;

c) forţa radială;

d) aplicaţii.

Trebuie precizat faptul că viteza liniară are o valoare numerică constantă, însă direcţia ei variază în fiecare moment. Din această cauză, caracterizînd mişcarea circulară uniformă, candidatul trebuie să vorbească despre viteza unghiulară care este egală cu mărimea unghiului descris de rază într-o secundă. El stabileşte apoi relaţia $v = \omega r$ dintre viteza liniară v şi viteza unghiulară ω.

Trecînd la al doilea punct al răspunsului, candidatul deduce că în cazul mişcării circulare uniforme trebuie să existe o acceleraţie radială centripetă, deoarece direcţia vitezei liniare variază în fiecare moment, iar acceleraţia măsoară tocmai variaţia vitezei într-o secundă. Se deduce apoi expresia acceleraţiei centripete:

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Al treilea punct al răspunsului se referă la forţa centripetă. Existenţa ei se explică prin faptul că fiecare acceleraţie este determinată de acţiunea unei forţe asupra punctului material, sensul forţei fiind acela în care se produce acceleraţia. Întrucît acceleraţia este centripetă forţa cu care acţionează corpul de legătură care sileşte punctul material să descrie mişcarea circulară este de asemenea centripetă. Mărimea forţei centripete va fi deci: $F = ma = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$. Însă, deoarece corpul de legătură acţionează cu o forţă centripetă asupra punctului material, acesta va acţiona la rîndul său asupra corpului de legătură cu o forţă egală şi direct opusă, deci o forţă centrifugă. Această forţă centrifugă rezultă din acţiunea punctului material asupra corpului de legătură; ea se naşte sau dispare o dată cu forţa centripetă.

Candidatul trebuie să completeze această expunere cu cîteva exemple de aplicaţii tehnice ale mişcării circulare uniforme. Tratînd subiectul dat după schema şi în felul menţionat mai sus, candidatul dă un răspuns complet, sistematizat, care corespunde materialului cuprins în manual.

Propunem tinerilor cititori care se pregătesc pentru un asemenea examen să aleagă diferite teme din programa examenului, să alcătuiască planul expunerii lor folosind paragrafele respective ale manualelor şcolare.

Pentru a ne completa îndrumările, vom aduce și un exemplu de felul cum trebuie rezolvată o problemă. Să presupunem că tema de examen cuprinde problema cu enunțul următor:

«Un încălzitor este constituit din sîrmă de nichelină, cu lungimea de 5 m și secțiunea de 0,08 mm. Încălzitorul are randamentul de 80% și trebuie să fie parcurs de 3 A la tensiunea de 110 V. Se poate pune încălzitorul direct la priza de 110 V? Dacă nu, ce trebuie făcut? Peste cît timp începe să fiarbă pe acest încălzitor, o cantitate de 580 g apă cu temperatura inițială de 13,6°C?»

Pentru rezolvare întocmim o schemă de montaj (fig. 5) și aranjăm datele problemei sub forma unei tabele:

$\rho = 0{,}4 \dfrac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}$

$l = 5$ m

$s = 0{,}08\ \text{mm}^2$

$I = 3$ A

$\eta = 80\% = 0{,}8$

$U = 110$ V

$\Delta t = ?$ s

$t' = 13{,}6°\text{C}.$

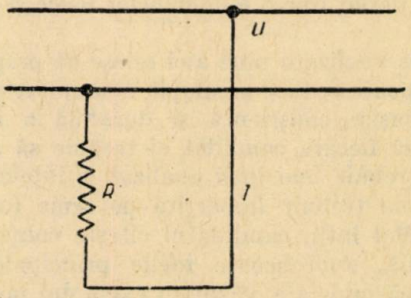


Fig. 5

Pentru a constata dacă încălzitorul poate fi pus direct la priza de 110 V, aplicăm legea lui Ohm la circuitul încălzitorului:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{110}{3} = 36{,}66\ \Omega.$$

Rezultă că încălzitorul trebuie să aibă rezistența de 36,67 Ω, pentru a putea fi pus direct la priza de 110 V. Din datele problemei calculăm rezistența încălzitorului:

$$R_1 = \rho \frac{l}{s} = 0{,}4 \frac{5}{0{,}08} = 25\,\Omega,$$

adică $R_1 < R$, ceea ce înseamnă că încălzitorul pus direct la priză va fi parcurs de un curent $I = \dfrac{U}{R_1} = \dfrac{110}{25} = 4{,}4$ A, deci se va arde.

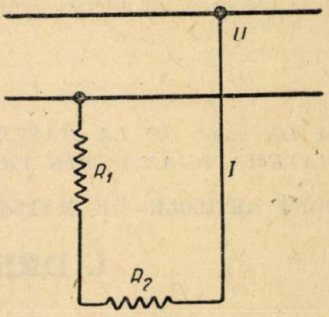


Fig. 6

Pentru ca încălzitorul să funcționeze în regim normal, trebuie pus în serie cu el (fig. 6) o rezistență suplimentară $R_2 = R - R_1 = 36{,}67 - 25 = 11{,}67\ \Omega$. Încălzitorul dezvoltă o cantitate de căldură egală cu $\Delta Q = 0{,}24\ R I^2 \Delta t$ cal, din care $\eta\ \Delta Q$ cal sînt absorbite de apa care se încălzește. Deci,

$$\eta \Delta Q = m\,(100 - t°)$$

sau:

$$\eta \cdot 0{,}24\ R I^2\ \Delta t = m\,(100 - t°),$$

de unde scoatem:

$$\Delta t = \frac{m(100 - t^\circ)}{0{,}24\,\eta\, R_1 I^2}$$

ceea ce dă:

$$\Delta t = \frac{580 \cdot 88{,}4}{0{,}24 \cdot 0{,}8 \cdot 25 \cdot 9} \approx 19{,}3 \text{ min.}$$

Aşadar, rezolvarea unei probleme nu înseamnă numai un calcul matematic de numere introduse într-o formulă. Candidatul trebuie să înţeleagă şi să urmărească desfăşurarea fenomenelor fizice şi să reprezinte prin relaţii numerice legile lor.

Din cele analizate pînă aici reiese că pregătirea pentru concursul de admitere nu se poate reduce la simpla acumulare mecanică de cunoştinţe, ci trebuie să fie o însuşire conştientă şi durabilă a acestora. Indiferent de modul în care studiază fiecare candidat el trebuie să aibă în vedere un lucru esenţial: materialul trebuie mai întîi analizat şi înţeles şi numai după aceea memorat.

Programa trebuie împărţită pe teme (capitole, paragrafe) nu pe număr de pagini. Mai întîi, candidatul citeşte conţinutul temei, pentru a-şi forma o idee generală, apoi scoate ideile principale, caută legătura cauzală dintre acestea, după cum am văzut în exemplul menţionat mai sus « mişcarea circulară uniformă ». Abia pe urmă candidatul îşi notează ideile principale în caiet şi rezolvă cîteva probleme de aplicaţie a temei studiate. În încheiere el îşi verifică cunoştinţele răspunzînd la « întrebările recapitulative » prevăzute la sfîrşitul fiecărui capitol. Răspunsurile trebuie formulate complet şi cu glas tare, nu în gînd.

Numai în acest fel candidatul îşi poate da seama dacă şi-a însuşit materialul din programă sau nu. Dacă nu poate răspunde la întrebări, înseamnă că trebuie să citească încă o dată capitolul respectiv.

Metoda de studiu descrisă asigură cunoaşterea temeinică a materialului, deci trecerea cu succes a oricărui examen.

---

75 DE ANI DE LA NAŞTEREA MARELUI MATEMATICIAN ROMÎN TRAIAN LALESCU

DOUĂ ARTICOLE DE MATEMATICI ELEMENTARE ALE LUI TRAIAN LALESCU *)

I. DREAPTA LUI SIMSON **)

DREAPTA lui Simson joacă un rol important în problemele de Geometria triunghiului. Proprietăţile sale interesante nu se găsesc expuse sistematic în nici un tratat de Geometrie; de aceea socotesc că va interesa pe cititorii « Revistei Matematice din Timişoara » o expunere elementară a proprietăţilor geometrice în legătură cu această dreaptă.

---

*) Traian Lalescu, mare matematician romîn care a trăit între anii 1882—1929.

**) Articol apărut în Revista matematică din Timişoara nr. 10/1922.

Teorema lui Simson constă din următoarea proprietate:

Proiecțiile pe laturile unui triunghi ale unui punct de pe cercul său cicumscris, sînt în linie dreaptă.

Fie α, β, γ proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului ABC (fig. 1). În patrulaterele înscriptibile $MA\,\beta\gamma$ și $MB\,\alpha\gamma$ avem:

$$\hat{1} = \hat{1}' \quad \text{și} \quad \hat{2} = \hat{2}'.$$

Dar unghiurile $\widehat{AMB}$ și $\widehat{\alpha M\beta}$ sînt egale ca avînd același supliment $\widehat{BCA}$. Deci $\hat{1} = \hat{2}$ și prin urmare

$$\hat{1}' = \hat{2}'$$

ceea ce ne arată că punctele α, β, γ sînt în linie dreaptă.

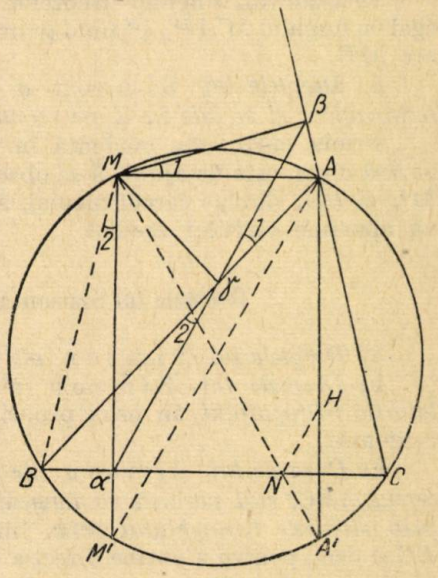


Fig. 6

Dreapta $\alpha\beta\gamma$ se numește dreapta lui Simson a punctului M.

Reciproc, *dacă proiecțiile unui punct pe laturile unui triunghi sînt în linie dreaptă, punctul este pe cercul circumscris al triunghiului.*

Este deajuns de parcurs egalitățile de unghiuri din demonstrația precedentă, în sens invers. Din egalitatea unghiurilor $\hat{1}' = \hat{2}'$ deducem egalitatea $\hat{1} = \hat{2}$ și prin urmare, $\widehat{BMA} = \widehat{\alpha M\beta}$. Dar acesta din urmă este suplimentar cu C. Deci, unghiurile $\widehat{AMB}$ și C fiind suplimentare, patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil.

Proprietățile dreptei lui Simson. I. *Fie M' intersecția cercului circumscris cu proiectanta lui M pe BC. Dreapta lui* Simson *a lui M este paralelă cu AM'.* Într-adevăr avem: $\sphericalangle BAM' = \hat{2}$ ca avînd aceiași măsură în cercul circumscris. Pe de altă parte $\hat{2} = \hat{2}'$, deci $\widehat{BAM'} = \hat{2}'$ și prin urmare dreptele $\alpha\beta\gamma$ și AM' sînt paralele.

2. *Dreapta lui* Simson *trece prin mijlocul segmentului care unește M cu ortocentrul triunghiului H.*

Fie N punctul unde MH'_a (fig. 1) întîlnește BC. Dreptele AM' și AH'_a sînt egal înclinate pe BC fiindcă sînt egal înclinate pe MM'; tot așa, dreptele NH și NH'_a sînt egal înclinate pe BC, căci punctele H și H'_a sînt simetrice față de BC. Deci dreapta lui Simson este paralelă cu NH.

Dar în triunghiul dreptunghic $MN\alpha$ dreapta lui Simson a punctului M și ipotenuza fiind de asemenea egal înclinate pe αN, dreapta lui Simson va trece prin mijlocul lui MN. Dreapta lui Simson fiind paralelă cu NH și trecînd prin mijlocul lui MN, va trece și prin mijlocul lui MH.

3. *Mijlocul m al segmentului MH se găsește pe cercul medial* (cercul celor nouă puncte) deoarece ortocentrul este centrul de homotetie al

cercului circumscris şi al cercului medial, raportul de omotetie fiind egal cu 2.

4. *Dreptele lui* Simson *a două puncte M şi P fac între ele un unghi egal cu acela a cărui măsură pe cercul circumscris este arcul MP.*

Într-adevăr, unghiul dreptelor lui Simson ale punctelor M şi P este egal cu unghiul $M'AP'$, P' fiind punctul analog lui M' faţă de P. Dar arc $M'P' =$ arc MP.

5. *Dreptele lui* Simson *a două puncte M şi P diametral opuse sînt rectangulare şi se taie în K pe cercul medial.*

Prima parte este evidentă în virtutea proprietăţii de la pct. 4. Pentru partea doua, este de ajuns să se observe că punctele m şi p, mijloacele dreptelor MH şi PH, sînt pe cercul medial, aşa că unghiul mKp fiind drept, punctul K va aparţine cercului medial.

Dreptele lui Simson a cîtorva puncte remarcabile

a) *Dreptele lui* Simson *ale vîrfurilor unui triunghi sînt înălţimi.*

b) *Dreptele lui* Simson *ale punctelor diametral opuse vîrfurilor sînt laturile triunghiului,* în baza proprietăţii de la pct. 5, verificarea directă este evidentă.

c) *Dreptele lui* Simson *ale picioarelor H'_a, H'_b, H'_c ale înălţimilor pe cercul ABC, sînt paralele cu tangentele în A, B, C la cercul circumscris şi trec prin vîrfurile triunghiului ortic,* fiindcă coarda AH'_a este perpendiculară pe BC şi deci, pentru a obţine direcţia dreptei lui Simson a lui H'_a trebuie să unim pe A cu el însuşi.

Dreptele lui Simson ale acestor puncte formează deci triunghiul antimedial al triunghiului ortic.

d) *Dreptele lui* Simson *ale picioarelor bisectoarelor interioare pe cercul circumscris* (mijloacele arcelor AB, CA şi AB) *trec prin mijloacele laturilor respective şi sînt perpendiculare pe bisectoare.*

Într-adevăr, A_1 fiind mijlocul arcului BC, subîntins de unghiul A, piciorul perpendicularei coborîte din A pe BC este mijlocul A' al laturii BC; pe de altă parte A, fiind pe bisectoarea interioară, dreapta care uneşte proiecţiile sale pe AB şi AC este perpendiculară pe această bisectoare.

e) *Dreptele lui* Simson *ale picioarelor bisectoarelor exterioare pe cercul circumscris, trec prin mijloacele laturilor respective şi sînt paralele cu bisectoarele interioare,* în virtutea proprietăţii 5.

Dreptele lui Simson joacă un rol însemnat în teoria ortopolului şi în faimoasa teoremă a lui Feuerbach. Într-un articol viitor urmează dezvoltarea acestei proprietăţi.

II. SERII CONVERGENTE ŞI SERII DIVERGENTE*)

1. În matematicile de şcoală medie, se întîlneşte pentru prima dată noţiunea de serie cînd se studiază transformarea fracţiilor ordinare în zecimale. Dacă luăm de pildă fracţia $\frac{7}{11}$ şi facem împărţirea, căpătăm fracţia zecimală

*) Articol apărut în Revista Matematică din Timişoara nr. 3/1923.

periodică simplă 0,63636363 . . ., cu un număr infinit de zecimale şi care se mai poate scrie şi astfel:

$$\frac{6}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots+\frac{6}{10^{2n-1}}+\frac{3}{10^{2n}}+\cdots \qquad (1)$$

Aceasta este forma sub care se scriu seriile, care sînt deci nişte sume de un număr infinit de termeni bine determinaţi, scrişi toţi după o regulă anumită, regulă care caracterizează seria.

Expresia generală a unei serii este:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

iar termenul u_n se numeşte *termenul general.*

2. O particularitate a seriei (1) este că, cu cît luăm mai mulţi termeni, cu atît suma lor se apropie mai mult de $\frac{7}{11}$, căci aceasta revine la a împinge împărţirea din ce în ce mai departe, şi noi ştim că *restul* împărţirii este mai mic ca unitatea zecimală a ultimei cifre a cîtului. Deci dacă luăm n termeni în seria (1), suma lor diferă de $\frac{7}{11}$ cu mai puţin de $\frac{1}{10^n}=\underbrace{0{,}000\cdots01}_{n}$. Seria (1) se bucură deci de proprietatea că dacă facem pe n să crească necontenit, suma

$$u_1+u_2+\ldots+u_n \qquad (2)$$

creşte mereu şi se apropie din ce în ce mai mult de $\frac{7}{11}$, *aşa de aproape cît voim noi,* fiindcă putem împinge împărţirea oricît voim şi la fiecare cifră a cîtului apropierea se face mai mare, aşa că diferenţa între $\frac{7}{11}$ şi sumele succesive poate deveni mai mică de cît orice cîtime am vrea noi.

În asemenea cazuri zicem că $\frac{7}{11}$ este limita sumei (2) cînd n creşte nemărginit şi acestei limite i se dă în cazul nostru numele firesc de *suma seriei* (1).

Asemenea serii ca (1), astfel că suma (2) tinde către o limită finită bine determinată, se numesc serii *convergente.*

Dacă însă sumele (2) în loc să tindă către o limită finită, se măresc din ce în ce mai mult aşa că suma creşte nemărginit, seria se zice *divergentă.*

Aşa de pildă, seria

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

este evident o serie divergentă.

3. Seriile sînt foarte utile în matematicile superioare şi se poate spune că teoria lor este la baza matematicilor superioare, după cum sistemul numerelor raţionale şi iraţionale stă la baza aritmeticii şi algebrei.

De pildă, în mecanica cerească, unde astronomii trebuie să calculeze poziţiile planetelor din decursul anilor, sau să prevadă eclipsele de soare ori de lună, sau să stabilească data echinoxiilor de primăvară, cantităţile ce trebuie determinate sînt toate exprimate prin asemenea serii.

De aceea a fost nevoie să se facă un studiu amănunţit al acestor expresii matematice şi acest studiu face azi obiectul unui capitol important din Analiză,

numit *Teoria seriilor*; alcătuitorii programelor din 1901 la noi, au crezut nimerit să le introducă chiar în şcolile noastre medii, cu toate că asupra acestui fapt s-ar mai putea sta puţin de vorbă.

Ce este important a se şti înainte de toate?

Desigur să ştim dacă o serie este convergentă sau divergentă. Pentru aceasta s-au stabilit o mulţime de reguli practice care se aplică uşor în cazurile obişnuite şi care se învaţă pe larg în cursurile de Algebră superioară. Nu este intenţia autorului să insiste asupra acestor reguli cunoscute. Un spirit logic ar putea însă întreba: Nu este posibil să se găsească un singur criteriu care să tranşeze hotărît în toate cazurile dacă o serie este convergentă ori divergentă şi să simplifice astfel tot acest domeniu?

Răspunsul este negativ. Un matematician învaţat, Paul Dubois Reymond, a arătat că orice « criteriu de convergenţă » s-ar descoperi, se poate da imediat un exemplu de serie căreia acest criteriu să nu-i poată fi aplicabil. Această teoremă ciudată care înfrînge sforţările noastre nu poate fi uşor asimilată nici de cei care ştiu matematică, ca să urmărească deplin demonstraţia sa logică, deoarece ea este în legătură cu o noţiune abstractă şi foarte delicată, aceea a gradului de creştere a infiniţilor mari.

4. Pentru a ne da totuşi, puţin seama de această chestiune, vom spune că practica a arătat că pentru ca o serie convergentă să fie utilă la calcule, nu este destul să fie convergentă, dar este nevoie să fie *repede* convergentă, adică să ne fie deajuns să adunăm numai cîţiva termeni la început pentru a obţine cu destulă aproximaţie, suma seriei.

A doua chestiune care trebuie deci studiată în teoria seriilor este aceasta: *Cît de repede converge o anumită serie convergentă? Cît de încet converge o serie divergentă ?*

Este evident că toţi calculatorii vor cere matematicienilor să le servească serii cît mai repede convergente. Sînt unele cazuri excepţionale — de pildă în teoria lunei — cînd seriile găsite de matematicieni pentru expresia unei coordonate cereşti sînt serii divergente. În acest caz, se întîmplă totuşi că divergenţa seriei este de o natură specială; suma care are termeni şi pozitivi şi negativi se apropie pînă la un moment destul de aproape de cantitatea căutată, dar apoi se depărtează şi creşte nemărginit. Asemenea serii divergente pot de asemenea fi utilizate în practică, în lipsă de altceva mai bun, dar şi aci vor fi preferate acele serii divergente care diverg mai încet.

Pentru a înţelege bine aceste afirmaţii, foarte utile în matematici, s-au gîndit învăţaţii să le lămurească prin exemple concrete.

Iată aci un tablou luat din cartea « Orders of infinity » de G. Hardy, care este foarte instructivă.

a) Să luăm întîi seria bine cunoscută, geometrică:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

convergentă pentru $|x| < 1$ şi care are suma $\dfrac{1}{1-x}$.

Să ne punem întrebarea: Cîţi termeni trebuie adunaţi pentru a căpăta suma seriei cu două zecimale exacte. Iată răspunsul:

dacă $x = 0{,}1$ sînt de ajuns 3 termeni;
dacă $x = 0{,}5$ trebuie 9 termeni;
dacă $x = 0{,}9$ trebuie 72 termeni.

Concluzia: Seria geometrică nu mai este destul de « bine convergentă » dacă x este mai mare ca 0,5.

6. Să luăm seria armonică generalizată:

$$(3) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

Această serie este convergentă numai dacă $\alpha > 1$ și valoarea sa este o funcție de α, care se înseamnă în matematici prin $\zeta(\alpha)$ și se numește *funcția lui* Riemann.

Să luăm și aci cîteva valori particulare date lui α și să ne punem aceiași întrebare ca mai sus.

Dacă $\alpha = 10$ un singur termen este de ajuns pentru a avea suma seriei cu două cifre zecimale exacte, această sumă fiind 1,000 98 46 . . .

Dacă $\alpha = 2$, numărul termenilor necesari trece dintr-odată la 200; suma seriei este $\frac{\pi^2}{6} = 1{,}644\,93$, iar dacă $\alpha = 1{,}5$ avem nevoie de 160 000 termeni: suma seriei este 2,612 . . .

În sfîrșit, pentru $\alpha = 1{,}1$ numărul termenilor necesari atinge valoarea formidabilă de 10^{33} pentru a căpăta suma 10,58 a seriei în acest caz.

Se vede de aici că seria (3) este foarte puțin potrivită pentru calcularea valorilor funcției lui Riemann, cînd α are valori $\zeta < 2$.

c) Serii foarte convergente sînt seriile exponențiale și înrudirile sale. Pentru seria

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

a cărei sumă este numărul $e = 2{,}718\,282 \ldots$ este de ajuns 6 termeni pentru a avea două zecimale exacte.

O serie încă și mai convergentă este seria:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$$

a cărei sumă este 1,291 286 . . . și pentru care sînt de ajuns 3 termeni pentru a obține două zecimale exacte.

d) Serii foarte încet convergente sînt seriile convergente ultra-armonice.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2\,(\log 2)^2} + \cdots + \frac{1}{n(\log n)^2} + \cdots,$$

$$\frac{1}{3\,\log 3\,(\log\log 3)^2} + \cdots + \frac{1}{n\,\log n\,(\log\log n)^2} + \cdots$$

Suma primei serii este 2,11; suma seriei a doua este 38,43 . . . Aceste serii converg așa de greu încît pentru a doua care este totuși ceva mai convergentă, trebuie mai mult de 7.10^{86} termeni pentru a căpăta două zecimale exacte, iar în cazul întîi, numărul termenilor necesari este egal cu 10^{86} număr mai mare decît distanțele de la pămînt pînă la stelele cele mai depărate, exprimate în metri!

2) Exemple analoge pot îi date pentru serii divergente. Aşa de pildă, seria armonică:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

care este divergentă, este foarte încet divergentă căci trebuie peste 12 000 termeni pentru ca suma ei să fie mai mare ca 10.

Seria:

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n} + \cdots$$

devine mai mare ca 10, numai peste 10^{4300} termeni, iar seriei

$$\frac{1}{3 \log 3 \log \log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n \log \log n} + \cdots$$

îi trebuie $10^{10^{100}}$ pentru acelaşi lucru!

Este destul să ne amintim că aceste serii sînt primele două din şirul infinit de serii divergente, al căror termen general este:

$$\frac{1}{n \log n \log_2 n \ldots \log_k n}$$

pentru a avea o idee — încă foarte vagă — de varietatea nesfîrşită a gradelor de convergenţă şi divergenţă a seriilor.

ATRACŢIA UNIVERSALĂ

Prof. ANGELA NEGULESCU

1. Cum s-a ajuns la stabilirea atracţiei universale

IDEILE actuale despre Univers sînt rezultatul dezvoltării de secole a fizicii şi a celorlalte ştiinţe.

Problema mişcării planetelor şi îndeosebi problema cauzei mişcării lor a fost cercetată de Copernic, Kepler şi mai ales de Newton, care a dedus cunoscuta «lege a atracţiei universale». Cu ajutorul acestei legi s-au putut determina exact masa planetelor, orbitele pe care se mişcă ele, abaterile în drumul lor datorite apropierii de alţi aştri, producerea eclipselor etc.

Această lege a putut fi stabilită numai după ce I. Kepler a enunţat legile conform cărora se mişcă planetele, iar Galileu a găsit legile căderii corpurilor.

Această epocă este frămîntată de problema cunoaşterii universului şi a mişcării corpurilor cereşti.

Încă din timpurile vechi (anul 145) astronomul grec Ptolomeu a încercat să explice mişcările Soarelui, Lunii şi ale planetelor printre stele, plecînd de la concepţia numită *geocentrică*. După această concepţie fiecare planetă execută o mişcare circulară, a cărui centru se roteşte la rîndul său în jurul Pămîntului.

Cercul pe care se mişcă planeta a fost denumit *epiciclu*, iar cel pe care se roteşte centrul epiciclului în jurul Pământului a fost denumit cerc *deferent*. Ţinînd seamă de viteza mişcării planetelor şi a centrelor epiciclurilor se puteau calcula dinainte poziţiile planetelor.

Deoarece sistemul geocentric nu era în contradicţie cu doctrinele religioase, clasele stăpînitoare l-au recunoscut « oficial », pedepsind cu asprime orice deviere de la această concepţie. Astfel dezvoltarea ştiinţei despre Univers a stagnat pentru timp îndelungat. În decursul întregului Ev Mediu studiul lumii înconjurătoare a rămas rupt de viaţă şi de natură. Prin dezvoltarea ştiinţei navigaţiei şi a orientării pe mări, care implicau observarea atentă a mişcării astrelor, au

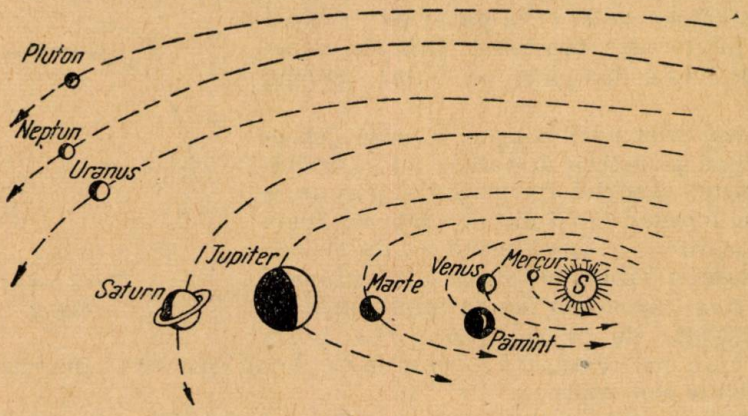


Fig. 1

ieşit la iveală greşeli enorme în calculele astronomice bazate pe sistemul lui Ptolomeu.

Ştiinţa începu să se dezvolte datorită noului mod de producţie, respectiv în cadrul noii orînduiri, capitalismul. Invenţia tiparului înlesneşte răspîndirea lucrărilor savanţilor. Apar tot mai mulţi cercetători ai universului, ca Leonardo da Vinci, Nicola de Cusa şi alţii.

În anul 1543 vestitul astronom polonez Nicolai Copernic a determinat o adevărată revoluţie în astronomie prin lucrarea sa « Despre mişcările corpurilor cereşti », în care susţine că în centrul universului se găseşte Soarele, nu Pămîntul. El afirmă primul că Pămîntul este o planetă care se roteşte în jurul Soarelui în 365 zile. Rotaţia diurnă a stelelor pe bolta cerească se datoreşte rotaţiei Pămîntului în jurul axei sale timp de 24 ore. (Fig. 1)

Ipoteza *heliocentrică* a lui Copernic, conform căreia Soarele se află în centrul universului, a fost dezvoltată de Giordano Bruno, care a arătat că Soarele este o stea ca şi celelalte nenumărate stele şi formează numai un sistem solar în cadrul universului infinit.

Cartea lui Copernic, în contradicţie cu învăţătura lui Ptolomeu, adoptată de biserica catolică, a fost declarată eretică de către papă, iar cei ce sprijineau ideile lui Copernic erau urmăriţi de Inchiziţia papală.

Din această cauză Giordano Bruno a fost ars pe rug în anul 1600. Mai tîrziu, Galileo Galilei, care a realizat prima lunetă astronomică, a observat fazele lui Venus, asemănătoare cu fazele Lunii, apoi petele solare şi cei patru sateliţi ai lui Jupiter, întărind astfel concepţia helio-centrică. Judecat

de tribunalul inchiziției, Galileu a fost silit să renege învățăturile sale și să declare că Pămîntul se află în centrul universului. Ieșind din tribunalul papal, el a rostit cuvintele rămase celebre: « e pur si muove » (și totuși se mișcă).

Dezvoltarea studiului științific al universului nu putea fi oprită. Pe baza numeroaselor observații făcute de Tycho Brahe asupra mișcării planetei Marte astronomul Johann Kepler a ajuns la concluzia că orbita planetei Marte nu este circulară. Cercetînd diferite curbe ovale, el a descoperit legile mișcării planetelor, care constituie baza mecanicii corpurilor cerești.

Prima lege a lui Kepler stabilește forma orbitelor planetare.

Orbitele planetelor sînt elipse; toate au un focar comun, în care se găsește Soarele. Elipsa este o curbă închisă, cu următoarea proprietate caracteristică: suma distanțelor de la orice punct de pe elipsă pînă la focare este constantă. Orbitele planetelor sînt elipse apropiate de forma cercului (fig. 2).

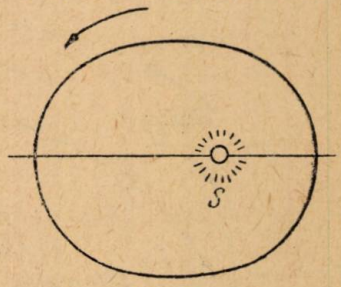


Fig. 2

Legea a doua a lui Kepler arată dependența vitezei planetelor de poziția lor pe orbită. În apropierea Soarelui (la periheliu) planeta se mișcă mai repede; cu cît distanța față de Soare crește, cu atît ea se mișcă mai încet (la afeliu). Viteza planetei variază în așa fel, încît aria descrisă de raza vectoare în fiecare unitate de timp este constantă; de aceea legea a II-a a lui Kepler se mai numește « legea ariilor ». Ariile descrise în timpuri egale de raza vectoare sînt egale.

Încă pe timpul lui Copernic se știa că planetele mai îndepărtate au o perioadă de revoluție mai mare. Aceasta l-a condus pe Kepler la cea de a treia lege, care stabilește dependența distanțelor dintre planete și Soare de perioadele lor de revoluție. Conform acestei legi, pătratele timpurilor de revoluție a două planete sînt proporționale cu cuburile semiaxelor lor mari; acest lucru îl exprimă următoarea formulă matematică foarte importantă pentru mecanica cerească:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \text{const.}$$

Pe baza acestei legi, măsurînd perioada unei planete, se poate calcula distanța ei față de Soare.

Legile lui Kepler reprezintă numai aspectul cinematic al mișcării planetelor; ele arată numai felul în care se mișcă planetele, dar nu și cauzele acestei mișcări.

Formulele matematice ale mișcării planetelor conțineau una dintre cele mai importante legi ale naturii: legea atracției universale.

2. Newton descoperitorul legii atracției universale

La începutul secolului al XVII-lea Galileu a stabilit legile căderii corpurilor, adică modul în care cad corpurile. El a constatat că greutatea corpurilor determină căderea lor, însă nu a putut să explice cauza greutății, deci cauza căderii corpurilor.

Am arătat că în același timp Kepler a descoperit (1609) legile, conform cărora se mișcă planetele în jurul Soarelui. Dar nici el nu a stabilit cauza mișcării de revoluție a planetelor. Prin urmare se făcuse studiul cinematic al mișcării planetelor, cît și al căderii corpurilor.

Dinamica acestor mișcări nu era încă descoperită și ca urmare nu se putea găsi nici cauza comună a acestor două fenomene. Problema explicării mișcărilor planetare, cît și aceea a căderii corpurilor a fost rezolvată de I. Newton (1666). El a analizat legile mișcării planetelor pe baza legilor dinamicii, considerînd că legile mecanicii trebuie să fie valabile atît pentru mișcarea corpurilor de pe pămînt, cît și pentru mișcarea corpurilor cerești. Se spune că Newton a fost surprins de analogia dintre mișcarea Lunii în jurul Pămîntului și căderea unui măr.

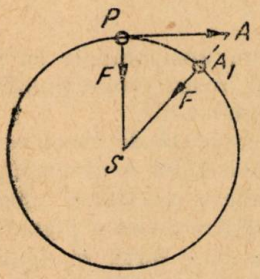


Fig. 3

Într-adevăr, rotația Lunii este asemănătoare cu mișcarea de rotație a unei pietre în praștie. După cum o piatră nu scapă pe direcția tangentă la traiectoria ei circulară, deoarece este reținută de o forță de atracție exercitată de sfoara de care este legată, tot așa Luna este supusă forței de atracție exercitată de Pămînt. Această forță de atracție o menține pe traiectorie și este aceiași forță care produce căderea corpurilor: forța de gravitație. În felul acesta s-a realizat o sinteză, care explică în același fel mișcarea proiectilelor pe pămînt și mișcarea de revoluție a planetelor.

Iată care este schema raționamentului lui Newton. Conform legii I-a a lui Kepler planetele descriu orbite eliptice, de formă foarte apropiată de cerc. În prima aproximație se poate considera că orbitele planetare sînt cercuri. Dar o mișcare circulară se face sub acțiunea unei forțe centripete. Urmează că mișcarea unei planete în jurul Soarelui se face sub acțiunea unei forțe centripete, adică a unei forțe îndreptată continuu spre centrul Soarelui. Este ușor de presupus că această forță centripetă trebuie să fie o forță de atracție exercitată de Soare asupra planetei, adică între acțiunea Soarelui și mișcarea planetelor trebuie să existe o legătură cauzală. Așadar cauza fizică prin care Newton explică mișcarea planetelor este o forță de atracție numită *forță de gravitație*, pe care Soarele o exercită asupra planetelor, ca o forță centripetă care determină mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Dacă asupra planetei P (fig. 3) nu s-ar exercita o forță centripetă, ea s-ar mișca conform legii inerției, parcurgînd într-un interval scurt de timp o porțiune PA de tangentă. Datorită forței centripete însă, ea rămîne pe traiectoria circulară și parcurge în acel interval de timp drumul real PA_1; acest drum este rezultanta spațiilor PA și AA_1, ca și cum planeta ar fi « căzut » necontenit spre Soare, datorită atracției exercitate de acesta. Se știe însă că forța centripetă este dată de expresia

$$f = m\omega^2 r,$$

unde m este masa corpului atras, în cazul considerat este masa planetei, ω — viteza unghiulară a planetei pe orbita ei, iar r — distanța dintre centrul Soarelui S și al planetei P. Înlocuind aici viteza unghiulară în funcție de perioada T, obținem:

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2} mr.$$

Dar legea a III-a a lui Kepler arată că pătratul timpului de revoluție T al planetei este proporțional cu cubul semiaxei mari r, adică:

$$\frac{T^2}{r^3} = K = \text{constant},$$

în care constanta K nu depinde de masa m a planetei.

Dacă înlocuim pe T din formula forței de atracție prin valoarea sa din legea a III-a a lui Kepler, obținem relația:

$$F = 4\pi^2 mr \frac{1}{Kr^3} = K_1 \frac{m}{r^2}. \qquad (1)$$

Deducem din acest rezultat că Soarele acționează asupra unei planete cu o forță de atracție direct proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrul Soarelui și acela al planetei.

Am admis însă că mișcările corpurilor cerești se efectuează de asemenea conform legilor mecanicii. Dacă ținem seamă de legea a III-a a dinamicii, urmează că acțiunii Soarelui asupra planetei îi corespunde o reacțiune, adică o forță opusă, dar de aceiași intensitate. Forța de atracție dintre Soare și planetă este reciprocă, adică planeta atrage la rîndul ei Soarele cu o forță F_1 egală cu aceea cu care Soarele atrage planeta. Conform rezultatului găsit mai sus urmează că forța de atracție dintre planetă și Soare trebuie să fie proporțională cu masa corpului asupra căruia acționează forța de atracție, adică cu masa M a Soarelui:

$$F_1 = K_2 \frac{M}{r^2},$$

unde K_2 este o constantă de proporționalitate care nu depinde de masa Soarelui. Însă $F = F_1$, deci: $K_1 m = K_2 M = CmM$, deoarece K_1 trebuie să aibă ca factor pe M, iar K_2 trebuie să aibă ca factor pe m. Forța de atracție reciprocă dintre Soare și planetă va fi:

$$F = C \frac{mM}{r^2}$$

sau, dacă notăm constanta C cu f:

$$F = f \frac{mM}{r^2}. \qquad (2)$$

Newton a considerat că atracția dintre corpuri este un fenomen general. Această forță de atracție se exercită între toate corpurile, iar factorul de proporționalitate f este o *constantă universală* numită *constanta de gravitație*. Legea expusă mai sus a căpătat denumirea de *legea atracției universale* și se enunță astfel: *două corpuri se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrele lor.*

Căderea corpurilor se datorește forței de atracție pe care o exercită Pămîntul asupra lor, denumită forță de greutate sau gravitație. Așadar gravitația este un caz particular al atracției universale.

Ce semnificaţie fizică are factorul f? Este el un număr sau o mărime fizică? Să-i deducem valoarea din legea generală şi să înlocuim mărimile cuprinse în expresia lui prin unităţile lor din sistemul CGS:

$$[f] = \left[\frac{F \cdot r^2}{mM}\right] = \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2} = \text{g} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{g}^2} = \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}. \qquad (3)$$

Aşadar, constanta de gravitaţie f nu este un număr abstract, ci o mărime fizică, deoarece formula ei dimensională depinde de lungime, masă şi timp, adică de mărimile fizice fundamentale.

Dacă în legea atracţiei universale considerăm $m = M = 1$ g şi $r = 1$ cm (fig. 4), atunci

$$f = F.$$

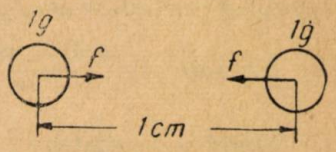


Fig. 4

Cu alte cuvinte constanta gravitaţiei universale f este reprezentată numeric prin forţa cu care se atrag două corpuri de masă egală cu unitatea aflate la o distanţă egală cu unitatea, unul de altul.

Atracţia dintre două corpuri poate fi pusă în evidenţă prin experienţa făcută de Cavendish (fig. 5). Suspendăm de un fir de torsiune foarte subţire o bară orizontală, la capetele căreia se găsesc două sfere mici de aceiaşi masă m. În apropierea lor aducem două sfere mari de plumb de masă M. Ele exercită forţe de atracţie şi firul se răsuceşte. Dacă din A răsucim firul în sens opus, pînă cînd bara revine în poziţia iniţială de echilibru, putem deduce forţa de atracţie dintre masele mari M şi cele mici m.

Cunoscînd masele M şi m, distanţele dintre centrele lor şi forţa de atracţie, putem calcula valoarea lui f din formula (3).

$$f = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2}.$$

Acest rezultat a arătat cît de mică este atracţia dintre corpuri. Într-adevăr forţele de frecare sînt mult mai mari, altfel sticla ar atrage paharul depe masă etc.

Acum, cînd cunoaştem pe f, putem pune problema invers: să aflăm masa unui corp. De exemplu, să calculăm masa Pămîntului.

Greutatea G a unui corp de masă m aflat pe suprafaţa Pămîntului se poate exprima astfel, conform legii a II-a a dinamicii: $G = mg$.

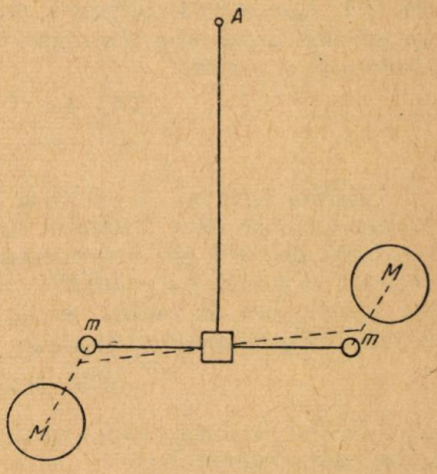


Fig. 5

Pe de altă parte, din cauza atracţiei dintre corp şi Pămînt, greutatea aceluiaşi corp se poate exprima astfel, pe baza legii lui Newton:

$$G = f\frac{Mm}{R^2},$$

în care M este masa Pămîntului, iar R — raza Pămîntului. Deci:

$$mg = f\frac{Mm}{R^2},$$

de unde putem deduce valoarea masei Pămîntului:

$$M = \frac{R^2 g}{f}.$$

Înlocuind valorile cunoscute: $R = 6370$ km $\approx 6{,}4 \cdot 10^8$ cm; $g = 980$ cm/s^2; $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2}$, găsim : $M = 5{,}95 \cdot 10^{27}$ g $= 5{,}95 \cdot 10^{21}$ t.

Știind că densitatea $\rho = \frac{M}{V}$, putem calcula densitatea medie a Pămîntului:

$$\rho = \frac{5{,}95 \cdot 10^{27}}{4\pi\frac{R^3}{3}} = \frac{5{,}95 \cdot 10^{27}}{4\pi \cdot 6{,}4 \cdot 10^{24}} = 5{,}5 \text{ g/cm}^3.$$

Densitatea scoarței Pămîntului, găsită prin experiență, este 2,5 g/cm^3, ceea ce înseamnă că în centrul Pămîntului se află substanțe cu densitate mare.

Pe baza forței de atracție care se exercită între planete și asteroizi (corpuri cerești asemănătoare planetelor, care descriu, ca și acestea, orbite în jurul Soarelui și care nu au lumină proprie) s-a stabilit exact masa unor planete.

Legea atracției universale a fost verificată pentru prima oară de N e w t o n, care a aplicat această lege la mișcarea Lunii. Cunoscînd distanța de la Pămînt pînă la Lună $r = 3{,}84 \cdot 10^{10}$ cm și perioada de revoluție a Lunii $T = 2{,}36 \cdot 10^6$ s, el a calculat accelerația centripetă pe care o are Luna în mișcarea ei în jurul Pămîntului și a găsit:

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0{,}271 \text{ cm/s}^2.$$

Conform legii lui N e w t o n, această accelerație se datorește atracției Pămîntului. Dar dacă Pămîntul determină această accelerație centripetă la o distanță de 60 de ori mai mare decît raza lui, urmează că la suprafața lui ar trebui să producă o accelerație centripetă de $60^2 = 3600$ ori mai mare. Cu alte cuvinte, dacă, înmulțind această accelerație de 0,271 cm/s^2 cu 3600, obținem valoarea lui g; urmează că teoria lui Newton este verificată. Ori se constată că:

$$3600 \cdot 0{,}271 \approx 980 \text{ cm/s}^2,$$

adică tocmai valoarea găsită experimental pentru accelerația căderii corpurilor la suprafața Pămîntului.

3. Cîmpul gravitațional

Ne propunem să calculăm energia potențială care se datorește forțelor de atracție. Din mecanică știm că energia potențială a unui sistem de corpuri constă din energia datorită forțelor de atracție ori de respingere dintre acele corpuri.

Energia potențială este deci energia datorită poziției relative a corpurilor sau a particulelor unui corp. Energia potențială se măsoară prin lucrul mecanic exercitat de forțele de interacțiune, cînd se îndepărtează corpurile din poziția lor pînă la o distanță infinită unul de altul. În cazul cînd forțele de interacțiune sînt forțe de atracție, energia potențială este negativă, deoarece trebuie să se consume un lucru mecanic pentru a îndepărta corpurile unul de altul.

Să considerăm două particule de mase m și m_1 aflate la o distanță r una de alta; forța lor de atracție este dată de relația (2), adică

$$F = f\frac{mm_1}{r^2}.$$

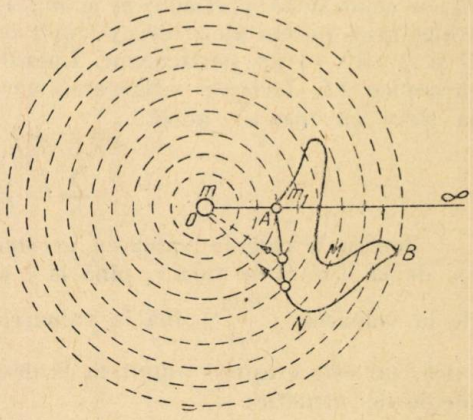


Fig. 6

Presupunem că masa m a uneia dintre ele este foarte mare față de masa m_1 a celeilalte, așa încît putem considera m fixă. Trasăm sfere concentrice în m, cu raze care cresc treptat de la r pînă la ∞ (fig. 6). Particula m_1 se poate depărta de m pe o traiectorie oarecare AMB, ANB, ori alta. Forța de atracție dintre cele două particule rămîne permanent radială față de m, oricare ar fi traiectoria urmată de m_1. Orice porțiune de traiectorie poate fi parcursă fie pe una din sferele punctate, fie de la o sferă la alta. Deoarece forța de atracție este radială, adică perpendiculară pe tangenta la sferă în orice punct, înseamnă că pentru deplasarea particulei m_1 pe una din sfere nu se consumă lucru mecanic, deoarece forța este perpendiculară pe deplasare. Pentru a trece de la o sferă la alta vecină, particula m_1 poate urma drumul minim radial Δr sau un drum oarecare $\Delta r'$ care face un unghi α cu Δr. În primul caz lucrul mecanic necesar pentru a trece m_1 de la o sferă la alta este

$$\Delta L = F \cdot \Delta r.$$

În cel de-al doilea caz lucrul mecanic este:

$$\Delta L' = F \cdot \Delta r' \cos\alpha.$$

Deoarece sferele au razele foarte apropiate una de alta, putem considera $\Delta r = \Delta r' \cos\alpha$, deci

$$\Delta L' = F \cdot \Delta r = \Delta L,$$

adică *lucrul mecanic consumat pentru a deplasa particula m_1 de pe o sferă pe alta este independent de drumul pe care se deplasează particula.*

Orice traiectorie a particulei m_1 poate fi însă împărțită în deplasări foarte mici, adică fie în deplasări pe o sferă, pentru care lucrul mecanic este nul, fie în deplasări de la o sferă pînă la alta, pentru care lucrul mecanic este același, indiferent de direcția deplasării.

Așadar, lucrul mecanic al forțelor de atracție sau împotriva atracției efectuat la deplasarea particulei m_1 dintr-un punct A într-un punct B față de particula m, *nu depinde de drumul urmat de m_1, ci numai de poziția inițială și cea finală a particulei m_1 față de m.*

Cînd particula m_1 se apropie de m, lucrul mecanic este pozitiv, deoarece este produs de forţele de atracţie; cînd particula m_1 se depărtează de m, lucrul mecanic este negativ, deoarece este efectuat pentru a învinge forţele de atracţie.

Forţele care produc lucru mecanic independent de drum se numesc *forţe conservative.* Prin urmare atracţia universală este o forţă conservativă.

Pe baza rezultatelor expuse pînă aici, putem calcula energia potenţială W_p a celor două particule m şi m_1. Deoarece lucrul mecanic nu depinde de traiectorie, putem alege drept traiectorie raza care trece prin poziţiile iniţiale O şi A (fig. 6) ale particulelor. Lucrul mecanic total L va fi suma lucrurilor mecanice ΔL efectuate la trecerea succesivă de la prima sferă de rază r_1 pînă la sfera cu raza ∞, adică:

$$L = \sum_{r_1}^{\infty} f \frac{m m_1}{r^2} \cdot \Delta r = W_p .$$

Pentru a calcula valoarea acestei sume prin metode simple, observăm că de la o sferă de rază r_1 pînă la o sferă de raza r_2 forţa de atracţie scade de la valoarea $f \frac{mm_1}{r_1^2}$ pînă la valoarea $f \frac{mm_1}{r_2^2}$. Deplasarea $\Delta r = r_2 - r_1$ fiind mică, nu este greşit să admitem că de-a lungul deplasării Δr a acţionat o forţă medie de atracţie:

$$\sqrt{f \frac{mm_1}{r_1^2} \cdot f \frac{mm_1}{r_2^2}} = f \frac{mm_1}{r_1 r_2} ,$$

iar lucrul mecanic va fi:

$$\Delta L_1 = f \frac{mm_1}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = f \cdot mm_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

Pentru altă deplasare mică $r_3 - r_2$ lucrul mecanic va fi:

$$\Delta L_2 = f\, mm_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \text{ etc.}$$

Observăm uşor că

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \ldots = f\, mm_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right),$$

deoarece termenii intermediari se simplifică. Prin urmare:

$$W_p = \sum_{r_1}^{\infty} f \frac{mm_1}{r^2} \Delta r = \sum_{r_1}^{\infty} \Delta L = f \frac{mm_1}{r} ,$$

pentru că forţele sînt de atracţie:

$$W_p = - f \frac{mm_1}{r} . \qquad (4)$$

Aşadar, *energia potenţială a două particule care se atrag este invers proporţională cu distanţa dintre ele.*

Se demonstrează că două sfere omogene se atrag, ca şi cum întreaga lor masă ar fi adunată în centrul sferelor. Ţinînd seamă de acest fapt, putem aplica

relația (4), pentru a exprima energia potențială a unui corp de masă m aflat pe suprafața Pămîntului:

$$W_p = -f\frac{Mm}{R}, \tag{5}$$

unde R este raza Pămîntului, iar M — masa lui.

Dacă acest corp de masă m este ridicat la o înălțime h deasupra nivelului mării, așa încît h să fie mic față de R, energia potențială a corpului de masă m va varia cu ΔW_p față de nivelul mării:

$$\Delta W_p = -f\frac{Mm}{R+h} - \left(-f\frac{Mm}{R}\right) = f\frac{Mm}{R}\cdot\frac{h}{R+h} > 0.$$

Observăm că la ridicarea corpului pînă la înălțimea h față de nivelul mării energia lui potențială crește. Această creștere a energiei potențiale a unui corp de masă m ridicat la o înălțime mică h față de nivelul mării poate fi exprimată neglijînd pe h față de R:

$$\Delta W_p = f\frac{Mm}{R^2}\cdot h.$$

Însă $f\frac{Mm}{R^2} = G = mg$ este tocmai greutatea corpului, deci:

$$W_p = Gh = mgh,$$

care este bine cunoscuta formulă a energiei potențiale, datorită forței de gravitație.

Cauza atracției universale nu a fost explicată satisfăcător nici pînă-n prezent. Din formula atracției universale (2) reiese că atracția se transmite la distanță în mod instantaneu și fără participarea unui mediu intermediar. Această concepție metafizică, părăsită astăzi, este cunoscută sub numele de « actio in distans ».

Newton a fost împotriva acestei concepții, după cum reiese dintr-o scrisoare a sa către Bentley: «... să admiți că un corp poate acționa asupra altuia la distanță prin vid, fără intermediul a ceva care să transmită acțiunea de la un corp la altul, mi se pare o absurditate atît de mare, încît nu cred ca un om competent în gîndirea filozofică să o poată face vreodată ».

Newton a explicat gravitația prin forța de atracție inerentă corpurilor, care acționează instantaneu unele asupra altora fără să încerce a explica și cauza acestor forțe de atracție. Cu problema cauzei atracției universale se ocupă în prezent teoria relativității generale, de care însă nu ne vom ocupa în acest articol.

În fizică se consideră că manifestarea forțelor de gravitație este legată de anumite proprietăți ale spațiului, în care se găsesc masele atractive. Partea din spațiu în care se manifestă forțele de gravitație se numește *cîmp gravitațional*. El este o formă a materiei, care transmite acțiunea de la o particulă de substanță la alta. Particulele de substanță sînt surse ale forțelor de atracție universală.

Cîmpul gravitațional se poate caracteriza în fiecare punct al său prin două mărimi fizice fundamentale. Una din aceste mărimi este *intensitatea cîmpului gravitațional*, legată de forța pe care o exercită cîmpul asupra unui corp aflat în acel punct.

Cea de-a doua mărime este *potențialul cîmpului gravitațional*, legată de energia potențială pe care o posedă un corp aflat în acel punct al cîmpului.

Intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct al său este o mărime care se măsoară prin forța cu care cîmpul acționează asupra unei mase punctiforme egală cu unitatea, aflată în acel punct. Din această definiție rezultă că:

$$\Gamma = \frac{F}{m} = f\frac{M}{r^2} = \frac{mg}{m} = g, \qquad (6)$$

deoarece forța cîmpului de gravitație F este tocmai greutatea corpului de masă m, adică $F = mg$. Se constată deci că intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct este reprezentată numeric prin accelerația gravitației în acel punct. Dacă ținem seamă de faptul că acțiunea de atracție în exterior a unei sfere omogene se comportă ca și cum toată masa ei ar fi concentrată în centrul ei, rezultă din relația (6) că intensitatea cîmpului scade cu pătratul distanței. Dacă Γ este intensitatea cîmpului gravitațional la nivelul mării (la distanța R de centrul Pămîntului) (fig. 7), valoarea ei scade după curba NY, cînd depărtarea r a corpului față de centrul Pămîntului crește.

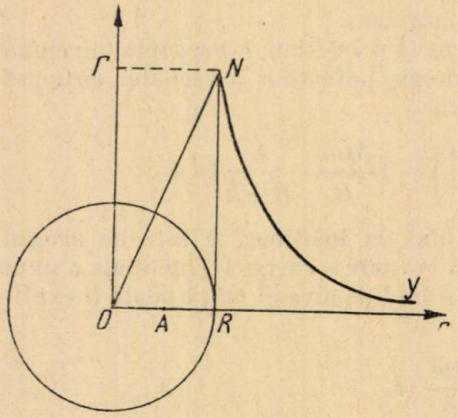


Fig. 7

Dacă reprezentăm vectorul intensitate a cîmpului gravitațional în diferite puncte (fig. 8), vedem că el are aceiași valoare pe o suprafață sferică A_1B_1 concentrică cu suprafața Pămîntului AB. Pentru sfere cu raze din ce în ce mai mari A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc. valoarea intensității scade.

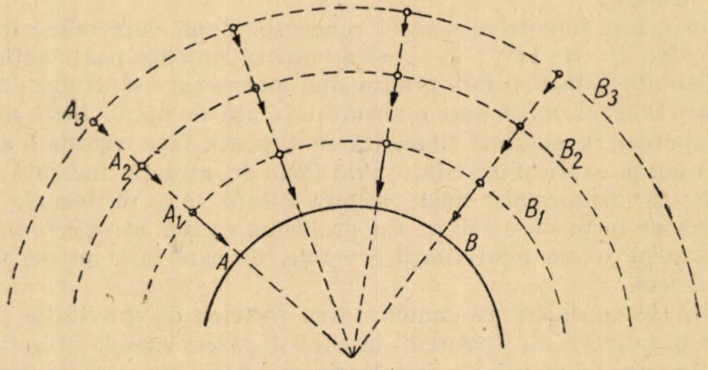


Fig. 8

Intensitatea cîmpului gravitațional în puncte din ce în ce mai apropiate de centrul Pămîntului, sub nivelul mării, scade proporțional cu distanța urmînd dreapta NO (fig. 7). Această scădere se datorește faptului că pentru un punct A (fig. 7) există mase atractive ale căror acțiuni dau o rezultantă îndreptată spre centrul O, dar există și mase atractive între A și R ale căror acțiuni atractive dau o rezultantă îndreptată spre punctul R.

Potențialul cîmpului gravitațional într-un punct al său este o mărime care se măsoară prin lucrul mecanic cheltuit pentru a aduce o masă punctiformă egală cu unitatea de la infinit — unde nu există cîmp — pînă în acel punct al cîmpului. Dacă ținem seamă de relația (5), potențialul gravitațional V într-un punct al cîmpului pe suprafața Pămîntului va fi:

$$V = \frac{W_p}{m} = -\frac{fM}{R}. \tag{7}$$

Dimensiunile potențialului în sistemul CGS sînt

$$[V] = \frac{\text{erg}}{\text{gram}} = \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}}{\text{g}} = \frac{\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}}{\text{g}} = \text{cm}^2\,\text{s}^{-2}$$

sau

$$[V] = \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)^2,$$

adică potențialul gravitațional are dimensiunile unei viteze la pătrat. El se va măsura deci în erg/g sau în $(\text{cm/s})^2$.

Dacă într-un punct oarecare A al cîmpului gravitațional potențialul este V_1, iar în alt punct B potențialul este V_2, atunci pentru a deplasa masa de 1 g din A în B se va cheltui un lucru mecanic egal cu diferența de potențial $\Delta V = V_2 - V_1$ dintre cele două puncte. Pentru a deplasa masa între acele două puncte ale cîmpului gravitațional în sensul micșorării potențialului, forțele de gravitație vor efectua un lucru mecanic L dat de relația:

$$L = m\,(V_2 - V_1) \tag{8}$$

sau, dacă ținem seamă de formula potențialului (7):

$$L = m\left[-\frac{fM}{r_2} - \left(-\frac{fM}{r_1}\right)\right],$$

$$L = fm\,M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

r_1 și r_2 fiind distanțele de la centrul Pămîntului pînă la punctele A, respectiv B.

Din expresia potențialului (7) observăm că valoarea potențialului gravitațional variază invers proporțional cu distanța. Prin urmare la aceiași distanță de centrul Pămîntului potențialul gravitațional are aceiași valoare. Suprafețele în ale căror puncte potențialul gravitațional are aceiași valoare se numesc *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel*. În cîmpul de atracție format de o masă punctiformă sau de o sferă cu masa omogenă suprafețele de nivel sînt sfere concentrice.

Din cele expuse despre potențial rezultă că valoarea absolută a potențialului gravitațional la suprafața Pămîntului reprezintă lucrul mecanic care ar trebui cheltuit pentru a arunca o masă de un gram de pe suprafața Pămîntului în spațiul cosmic:

$$[V] = \frac{fM}{R} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{27}}{639\,400\,000}\ \text{erg} \approx 6325\ \text{kgm}.$$

Forţa de gravitaţie a Pămîntului — caz particular al atracţiei universale — este legată de întreaga activitate a omului. Această forţă este utilizată drept forţă motoare. De exemplu, energia potenţială de gravitaţie a apei din lacurile de acumulare ale hidrocentralelor pune în mişcare uriaşele turbine hidroelectrice, care furnizează energie electrică. Tot energia cîmpului gravitaţional pune în mişcare apa rîurilor etc. Maşinile de ridicat şi transportat greutăţi, macaralele, avioanele etc. sînt mijloace tehnice prin care omul învinge energia forţei de atracţie universală.

O APLICAŢIE ÎN FIZICĂ A NUMĂRULUI „e". ECUAŢIA BAROMETRULUI

A. ŞAICHIN

ÎN nr. 11/1956 al « Gazetei matematice şi fizice », seria B, a fost publicat articolul « Numărul « e » în natură » de conf. E. T o t h, în care s-a arătat că numărul e apare în numeroase probleme practice. Vrem să arătăm aici cum putem rezolva cu ajutorul numărului e o problemă de fizică, anume, să calculăm presiunea aerului la o înălţime dată.

Se ştie că presiunea aerului scade cu înălţimea şi că acest fenomen este datorit faptului că la o anumită înălţime, asupra aerului nu mai apasă întreaga grosime a atmosferei.

Să considerăm de exemplu, înălţimea de 1000 m. Care este presiunea aerului la această înălţime? Vom presupune pentru simplificare, că temperatura atmosferei este de 0° şi că presiunea aerului la înălţimea nivelului mării este $p_0 = 760$ mm Hg $= 1{,}0332$ kg/cm^2. Ştim că în aceste condiţii greutatea specifică a aerului este $\gamma_0 = 1{,}293$ g/dm^3.

Presiunea la 1000 m se obţine scăzînd din presiunea p_0, presiunea dată de coloana de aer aflată între 0 şi 1000 m. Care este această presiune? Presiunea p, exercitată pe unitatea de suprafaţă de o coloană de lichid de înălţime h şi greutate specifică γ este dată de formula $p = h\,\gamma$. În cazul de faţă intervine o complicaţie. Greutatea specifică a aerului este 1,293 la presiunea de 1,0332 kg/cm^2; pe măsură ce ne ridicăm, presiunea scade, aerul se rarefiază şi deci şi greutatea sa specifică scade. În consecinţă nu putem aplica formula de mai sus întrucît valoarea lui γ este variabilă de-a lungul coloanei. Fiind în imposibilitate de a face calculul exact, ne vom mulţumi cu un calcul aproximativ.

Vom considera că întregul strat de aer are greutatea specifică de la nivelul mării, adică $\gamma_0 = 1{,}293$ gf/dm^3. Pentru calcul trebuie să lucrăm cu unităţi determinate. Dacă alegem ca unităţi centimetrul şi gramul-forţă, avem:

$$\gamma_0 = 1{,}293 \cdot 10^{-3} \text{ gf/cm}^2,$$

$$h = 100\,000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm},$$

$$p = h\gamma = 1{,}293 \cdot 10^2 \text{ gf/cm}^2$$

sau, transfomînd în kgf/cm^3:

$$p = 1{,}293 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}1293 \text{ kg/cm}^2.$$

Rezultă că presiunea la 1000 m este

$$p_{1000} = 1{,}0332 - 0{,}1293 = 0{,}9039 \text{ kg/cm}^2.$$

Valoarea astfel găsită este evident exactă, datorită ipotezei că γ este constant în tot stratul. Putem obține însă, o valoare și mai exactă, împărțind stratul de 1000 m în două. Pentru primul strat de 500 m lucrînd cu valoarea lui γ_0, obținem:

$$p_{500} = 0{,}9685 \text{ kg/cm}^2.$$

Să calculăm în baza acestei valori a lui p_{500}, pe γ_{500}; avem

$$\frac{\gamma_{500}}{p_{500}} = \frac{\gamma_0}{p_0},$$

de unde rezultă

$$\gamma_{500} = 1{,}2121 \text{ g/dm}^3.$$

Pentru al doilea strat, cuprins între 500 și 1000 m, lucrăm cu valoarea astfel aflată a lui γ_{500}; obținem:

$$p_{1000} = 0{,}9079 \text{ kg/cm}^2.$$

Se înțelege că această valoare este mai aproape de realitate decît cea obținută lucrînd cu întreg stratul, însă nici ea nu este exactă.

O valoare și mai apropiată decît am obținut pînă acum vom obține dacă împărțim stratul de aer în 5 straturi; se găsește

$$p_{1000} = 0{,}9102 \text{ kg/cm}^2.$$

Împărțind stratul de aer în 10, 50, 100 straturi obținem respectiv

$$p_{1000} = 0{,}9109;\ 0{,}9115;\ 0{,}9116 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă continuăm subdiviziunea, de exemplu în 200 sau 1000 straturi, obținem aceleași cifre la primele patru zecimale:

$$p_{1000} = 0{,}9116 \text{ kg/cm}^2.$$

Să tratăm acum problema, în formă generală. Ne propunem să calculăm presiunea aerului la o înălțime h. Împărțim stratul de aer dintre nivelul mării și înălțimea h în n straturi; fiecare din aceste straturi va avea grosimea $\frac{h}{n}$.

Să notăm cu p_0 presiunea la nivelul mării; p_1 presiunea în partea superioară a primului strat; $p_2, p_3, \ldots, p_n$ presiunile în părțile superioare ale celorlalte straturi; să notăm $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ greutățile specifice respective.

Presupunînd că primul strat are pe toată grosimea sa greutatea specifică γ_0, rezultă că presiunea exercitată de el este $\frac{h}{n}\gamma_0$ și deci, $p_1 = p_0 - \frac{h}{n}\gamma_0$.

Scoțînd acum p_0 factor comun:

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right).$$

La fel găsim

$$p_2 = p_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{p_1}\frac{h}{n}\right).$$

Însă greutăţile specifice sînt proporţionale cu presiunile:

$$\frac{\gamma_1}{p_1} = \frac{\gamma_0}{p_0}.$$

Ţinînd seamă de aceasta, obţinem

$$p_2 = p_1\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right) = p_0\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right) = p\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^2.$$

În mod analog, avem

$$p_3 = p_0\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^3,$$

. . . . . .

$$p_n = p_0\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^n.$$

Cine este p_n? Este valoarea presiunii la înălţimea h, însă nu valoarea exactă, ci valoarea aproximativă; aproximaţia este cu atît mai bună, cu cît n este mai mare, şi vom obţine valoarea exactă — pe care o notăm cu p_h — dacă vom face n foarte mare, adică îl vom face să tindă către infinit:

$$p_h = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_0\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Ce se întîmplă cu expresia

$$\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^n \qquad (2)$$

dacă n tinde către infinit?

Pentru a răspunde la această întrebare vom folosi cunoştinţele din articolul menţionat.

Acolo s-a arătat că dacă n tinde către infinit, expresia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

tinde către numărul e a cărui valoare este

$$e = 2{,}718\,28\ldots$$

Să aducem expresia noastră sub o altă formă, aşa fel încît să apară

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Să notăm provizoriu

$$\frac{p_0 n}{\gamma_0 h} = m. \tag{3}$$

Avem:

$$\frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n} = \frac{1}{m} \quad \text{și} \quad n = \frac{m\gamma_0 h}{p_0}$$

și deci:

$$\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{m\gamma_0 h}{p_0}} = \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{\gamma_0 h}{p_0}}. \tag{4}$$

Relația (3) ne arată că dacă n tinde către infinit atunci și m tinde către infinit; trebuie deci, să vedem ce se întîmplă cu expresia $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ dacă m tinde către infinit.

Să punem această expresie sub altă formă. Avem:

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^m.$$

Notăm $m - 1 = p$; avem $m = p + 1$ și deci

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{p+1} = \frac{1}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

Dacă m tinde către infinit, atunci p tinde de asemenea către infinit; deci la numitorul ultimei fracții primul factor tinde către numărul e, iar al doilea către 1.

Revenind la egalitatea (4) avem așadar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\gamma_0}{p_0}\frac{h}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\gamma_0 h}{p_0}} = e^{-\frac{\gamma_0 h}{p_0}}$$

și în consecință egalitatea (1) devine

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{p_0}}.$$

Această egalitate se numește ecuația barometrului și exprimă variația presiunii în funcție de înălțime. De exemplu, pentru $h = 1000$ m găsim (făcînd calculele cu logaritmi),

$$p_{1000} = 0{,}9116 \text{ kg/cm}^2 = 670 \text{ mm Hg}.$$

PARALOGISME GEOMETRICE

Prof. univ. M. GHERMĂNESCU

1. CALEIDOSCOPUL matematic « *Unde e greşala* », al prof. A. Hollinger, arată cîteva exemple de consecinţe imposibile la care conduc unele raţionamente sau figuri greşite (G.M.F. seria B, nr. 9/1956, p. 475—482).

Asemenea exemple au atras atenţia încă din timpuri foarte vechi, şi Euclide (secolul 3 înainte erei noastre) compusese chiar o lucrare intitulată « *Pseudaria* », în care expusese diferitele genuri de raţionamente false la care este condus un începător în Geometrie. Din păcate, această lucrare s-a pierdut, iar informaţii despre ea ne-au rămas de la Proclus.

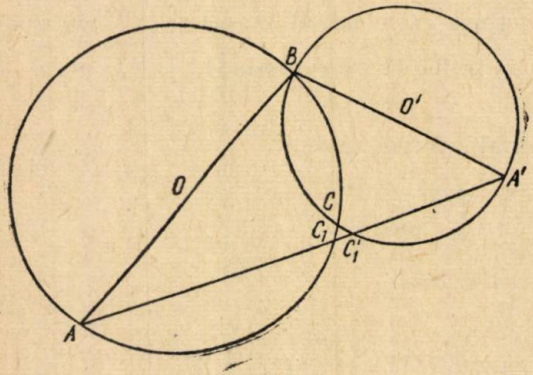


Fig. 1

Cineva a spus că *Geometria este arta de a raţiona pe figuri inexacte*? ! Exemplele date în G.M.F.-B nr. 9, precum şi cele — de altfel, cunoscute — ce urmează în aceste rînduri, vor arăta că nu este bine să acordăm definiţiei de mai sus o încredere absolută şi că o demonstraţie ale cărei deducţii succesive sînt riguroase, dar este aplicată unei figuri greşite, poate conduce la o concluzie absurdă.

Este avantajos şi recomandabil deci, ca în căutarea soluţiei problemei să se execute cît mai exact posibil traseurile geometrice; acest mod de a proceda mai prezintă şi interesul că permite adesea descoperirea unor relaţii între liniile figurii, care altfel ar rămîne neobservate.

De asemenea, demonstraţiile trebuie să se bazeze numai pe definiţii precise. Pascal spune chiar, în « *De l'esprit géométrique* »: « să substituim întotdeauna în mintea noastră, definiţiile în locul obiectelor definite, pentru a nu ne înşela prin echivocul termenilor pe care definiţiile le-au restrîns ».

Este bine, de altă parte, să nu se execute asupra mărimilor decît numai operaţii permise şi, în această privinţă, trebuie să ştim să regăsim sub aparenţele unei logici inatacabile, punctul slab al unui calcul care a condus la un rezultat absurd.

2. **Erori de construcţie.**

1. *Dintr-un punct exterior unei drepte se pot duce două perpendiculare pe acea dreaptă.*

Tragem cu mîna două cercuri O şi O', care se taie în B şi C (fig. 1). Ducem dreptele BO şi BO' pe care le prelungim pînă ce taie cercurile O şi O' în A şi A'. Dreapta AA' taie cele două cercuri în C_1 şi C_1'.

Deoarece unghiurile BC_1A, $BC_1'A'$ sînt drepte, căci sînt înscrise în cîte un semicerc, rezultă că dreptele BC_1 şi BC_1' sînt ambele perpendiculare pe AA' !

Iată deci, două perpendiculare pe o aceiaşi dreaptă, duse dintr-un acelaşi punct B !?

Aci eroarea este uşor de descoperit: dreapta AA' trece chiar prin a doua intersecţie C a celor două cercuri (fig. 2), cum uşor se poate constata dacă se trasează precis figura cu rigla şi compasul. Putem chiar demonstra aceasta în chip riguros: unim A şi A' cu C (fig. 2), unghiurile ACB şi $A'CB$ sînt drepte ca fiind înscrise în cîte un semicerc, iar suma lor face deci, cît două unghiuri drepte. Rezultă că AC şi $A'C$ sînt în prelungire, adică dreapta AA' trece prin C.

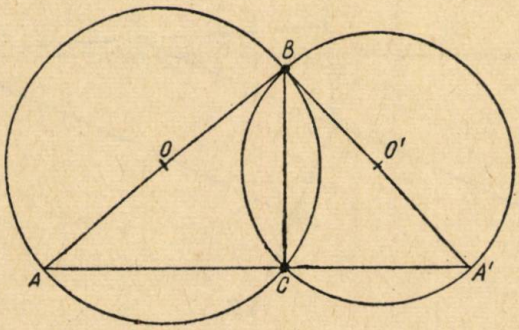


Fig. 2

II. *Un unghiu obtus este egal cu un unghi drept* (Mathésis, 1892, p. 161; *Éducation mathématique*, 1 oct. 1898 şi 15 iul. 1906). — Să considerăm un patrulater $ABCD$, avînd unghiul C drept, unghiul D obtus, iar laturile opuse BC şi AD egale. Ridicăm perpendiculare pe AB şi CD în mijloacele E şi F ale acestora; aceste perpendiculare nu pot fi paralele căci în acest caz, AB şi CD ar fi la fel, B ar fi drept, iar $AD = BC$ ar trebui să se confunde cu perpendiculara coborîtă din D pe AB: $\hat{D}$ ar fi atunci un unghi drept, contrar ipotezei.

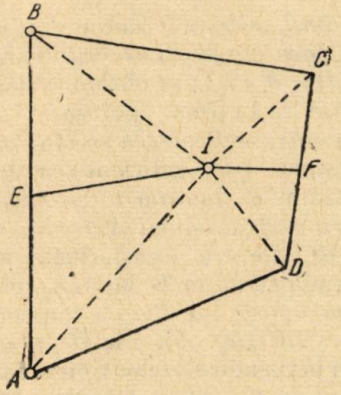


Fig. 3

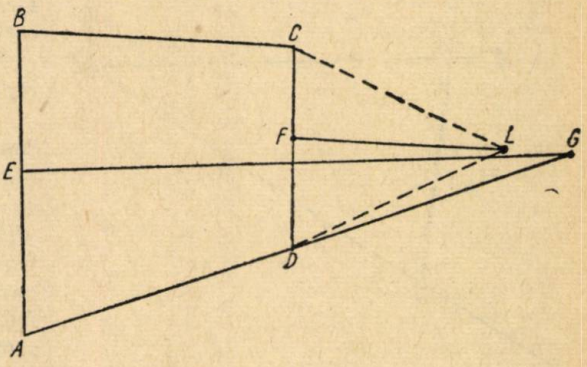


Fig. 4

Perpendicularele în E şi F se întîlnesc deci, într-un anumit punct I. Vom deosebi două cazuri, după cum I este interior sau exterior patrulaterului $ABCD$.

1°. Presupunem I interior patrulaterului $ABCD$ (fig. 3) și să unim I cu vîrfurile patrulaterului. Triunghiurile AID și BIC sînt egale ca avînd laturile egale două cîte două, avem deci:

$$\sphericalangle ADI = \sphericalangle BCI.$$

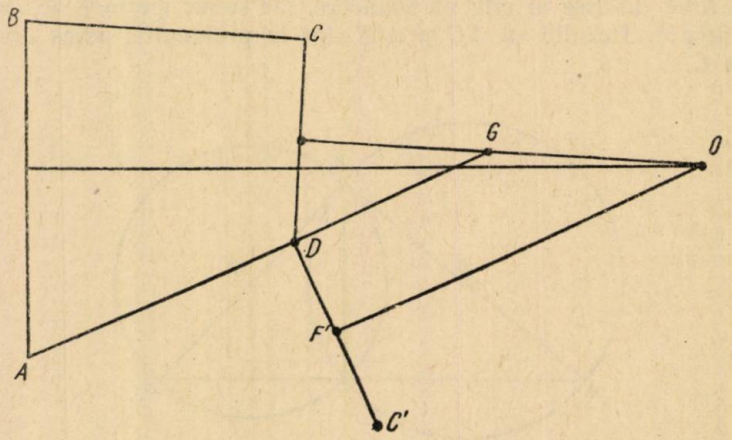


Fig. 5

Dacă fiecăruia dintre aceste două unghiuri îi adăugăm același unghi, $\sphericalangle FDI = \sphericalangle FCI$, se obține

unghiul obtuz D = unghiul drept C.

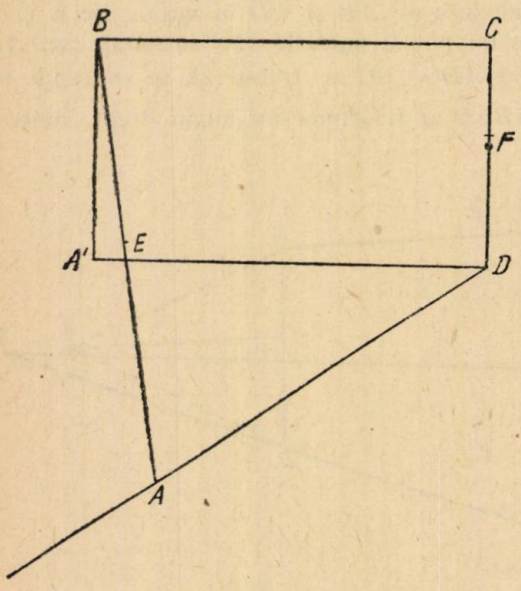


Fig. 6

2°. Presupunem I exterior patrulaterului $ABCD$ (fig. 4). Unim I cu cele patru vîrfuri și obținem ca mai sus, egalitatea

$$\sphericalangle ADI = \sphericalangle BCI.$$

De data aceasta *scădem* din aceste două unghiuri același unghi, $\sphericalangle FDI = \sphericalangle FCI$; se obține același rezultat ca în prima ipoteză.

Pentru reflectarea acestui raționament este suficient să demonstrăm că *punctul I este situat de acea parte a laturii AD unde se află BC*. Pentru aceasta luăm pe perpendiculara în D la AD, spre partea opusă lui BC, o lungime $DC' = DC$ (fig. 5). Fie O intersecția perpendicularelor ridicate în mijloacele F și F' ale laturilor DC și DC'. O este centrul cercului ce trece prin C, D și C'. Dacă rotim figura BCD în jurul lui O, așa fel ca C să vie în D, BCD va veni în ADC' (căci $AD = BC$ prin ipoteză). B venind în A avem $OB = OA$,

iar perpendiculara în mijlocul E al lui AB trece prin O. Astfel, punctul O, intersecția perpendicularelor ridicate pe mijloacele segmentelor AB și CD, nu este altul decît punctul I din fig. 3 și 4. Dar punctul O aflîndu-se pe perpendiculara în mijlocul F' al lui DC', rezultă că OC' este paralelă la AD și se află de parte a lui AD unde nu este C, adică O și C sînt situate de o parte și de alta a lui AD.

De aci rezultă următoarele: *a)* în cazul figurii 3 este imposibil ca I să fie situat în interiorul lui $ABCD$; *b)* în cazul figurii 4, I trebuie să fie situat pe perpendiculara în F, nu între F și punctul G în care AD întîlnește această perpendiculară, cum presupune implicit fig. 4, ci dincolo de G. Triunghiul AID se află atunci întors față de dreapta AD și scăderea unghiului FDI din $\sphericalangle ADI$ care a servit ca bază raționamentului cazului 2°, nu mai are nici o semnificație.

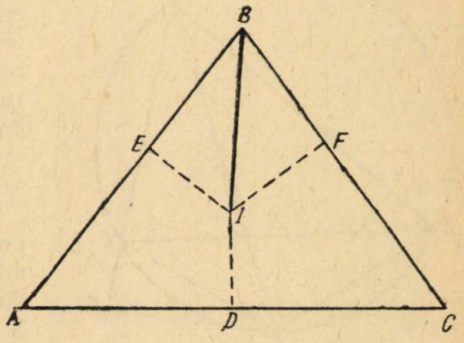


Fig. 7

Observare. Construcția care a făcut obiectul problemei precedente este prezentată uneori astfel. Fie $A'BCD$ un dreptunghi, se duce o dreaptă arbitrară prin unul din vîrfuri D, pe care se ia $DA = DA'$. Se ridică apoi perpendicularele în mijloacele E și F ale laturilor AB și DC pe aceste drepte. Cele două procedee sînt absolut identice în fond, dar ultima ipoteză este ceva mai simplă.

III. *Toate triunghiurile sînt isoscele* (Mathésis, 1893). Fie ABC un triunghi oarecare. Ducem bisectoarea BI a unghiului B și ridicăm o perpendiculară în mijlocul D al laturii opuse AC.

Dacă aceste două drepte, BI și DI, nu se întîlnesc, ele sînt paralele, bisectoarea BI este și înălțime, iar triunghiul ABC este isoscel.

Dacă cele două drepte se întîlnesc într-un punct I, deosebim două cazuri, după cum I este interior sau exterior triunghiului ABC. Vom arăta că în ambele cazuri triunghiul ABC este isoscel.

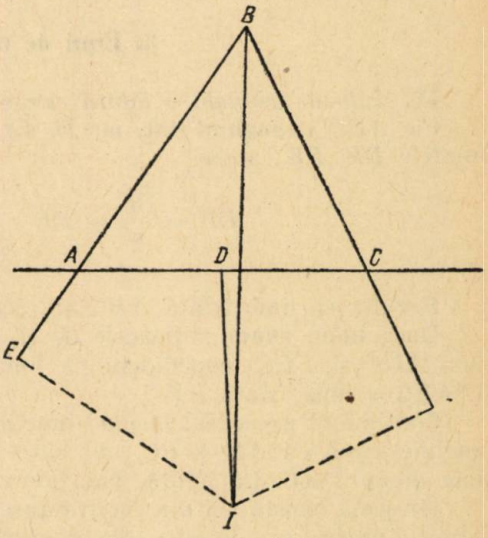


Fig. 8

1°. Dacă I este interior triunghiului ABC, ducem perpendicularele IE și IF respectiv pe AB și BC (fig. 7), apoi unim I cu A și C. Triunghiurile dreptunghice BIE și BIF sînt egale, căci au latura BI comună, iar unghiurile din B egale, deci $BE = BF$. Triunghiurile dreptunghice AIE și CIF sînt de asemenea egale, căci au ipotenuzele egale, $IA = IC$ și catetele $IE = IF$ egale, deci $AE = CF$. Adăugînd lungimilor egale BE și BF

respectiv lungimile egale AE și CF, se obțin sume egale, BA și BC, astfel că triunghiul ABC este isoscel.

2°. Dacă I este exterior triunghiului ABC, ducem IE și IF respectiv perpendiculare pe AB și BC și unim I cu A și C (fig. 8). Ca în cazul precedent, se arată că perechile de triunghiuri (BIE, BIF) și (AIE, CIF) sînt respectiv egale, deci $BE = BF$, $AE = CF$ astfel că scăzînd din lungimile egale, BE și BF, respectiv lungimile egale AE și CF, resturile BA și BC sînt egale, $BA = BC$, deci ABC încă este isoscel.

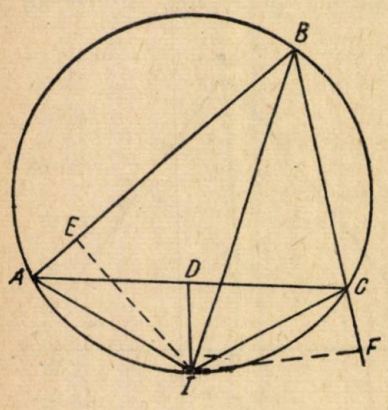


Fig. 9

Să vedem unde este greșeala în aceste raționamente.

1°. Pentru cazul 1°, punctul I nu poate fi interior triunghiului ABC. În adevăr, ducem cercul circumscris triunghiului ABC (fig. 9); bisectoarea unghiului B și perpendiculara pe AC în mijlocul său D se întîlnesc în mijlocul arcului AC, care este poziția reală a lui I, exterioară în mod necesar triunghiului ABC.

2°. Dacă F este pe prelungirea lui BC, E trebuie să se afle între A și B. În adevăr, din așezarea lui F rezultă că $\sphericalangle BCI$ este obtus. Dar $\sphericalangle BCI$ și $\sphericalangle BAI$ fiind suplementare, $\sphericalangle BAI$ este ascuțit; deci piciorul E al perpendicularei duse din I pe AB trebuie să cadă între A și B.

3. Erori de raționament

IV. *Într-un triunghi o latură este egală cu suma celorlalte două.*

Fie ABC triunghiul dat, iar D, E, F mijloacele laturilor sale; să ducem dreptele DF, FE; avem

$$DF = \frac{BC}{2} = BE \quad , \quad FE = \frac{AB}{2} = DB.$$

Rezultă că linia frîntă ABC are aceiași lungime ca linia frîntă $ADEFC$.

Dacă luăm acum mijloacele G, H, I și J, K, L ale laturilor triunghiurilor ADF și FEC, conchidem că linia frîntă $AGHIFJKLC$ = linia frîntă $ADFEC$ = linia frîntă ABC.

Continuînd procedeul în mod indefinit, obținem linii frînte care au aceiași lungime egală cu $AB + BC$, dar care se apropie din ce în ce mai mult de linia dreaptă AC. La limită, vom avea deci $AB + BC = AC$.

Greșeala constă aci din interpretarea falsă a noțiunii de « limită », a cărei definiție precisă este următoarea: o mărime *variabilă* L are ca limită o mărime fixă A atunci cînd diferența $L - A$ poate deveni și rămîne inferioară, în valoare absolută, unei mărimi date ε,

$$|L - A| < \varepsilon,$$

oricît de mic ar fi ε.

În cazul de față, mărimile L și A sînt respectiv perimetrul liniilor frînte construite succesiv și lungimea laturii AC. Dar perimetrul L este *constant*, egal cu suma $AB + BC$, nu este variabil, iar diferența $L - A$ rămîne constantă, deci nu poate fi făcută mai mică decît un număr dat ε. Rezultă deci că nu sîntem în condițiile definiției limitei, astfel că nu este de mirare că am obținut un rezultat absurd.

Observare. — Putem fi ispitiți să vedem oarecare analogie între paralogismul precedent și definiția lungimii unui arc de cerc, care este « limita către care tinde perimetrul unei linii frînte înscrise în acest cerc, cînd laturile acestei linii tind către zero ». Vom observa însă că, aci perimetrul liniei frînte este o cantitate *variabilă* care devine din ce în ce mai mare, rămînînd inferioară lungimii arcului către care tinde, deci aci sîntem în condițiile definiției limitei pe care o putem astfel invoca, fără riscuri.

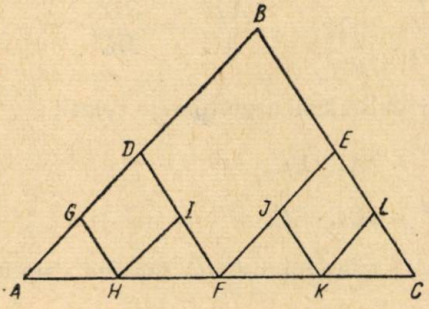


Fig. 10

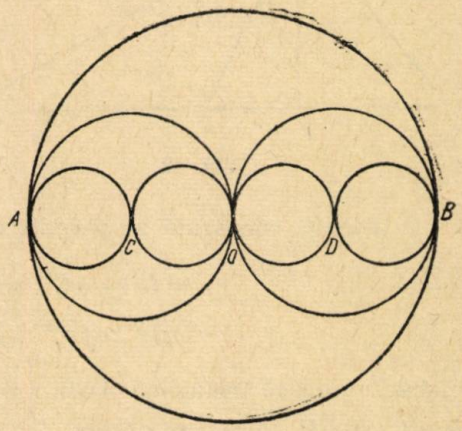


Fig. 11

V. *Lungimea unui cerc este egală cu diametrul său.* Fie cercul O, de diametru $AB = d$ (fig. 11). Să descriem pe OA și OB ca diametru, două cercuri cu centrele în C și D; suma lungimilor acestor două cercuri este $\frac{\pi d}{2} + \frac{\pi d}{2} = \pi d$ adică, egală cu lungimea cercului inițial.

Să descriem pe AC, CO, DO și DB patru cercuri al căror diametru va fi $\frac{d}{4}$, iar suma lungimilor $4.\frac{\pi d}{4} = \pi d$.

Continuînd indefinit această operație suma lungimii cercurilor astfel construite este mereu egală cu lungimea cercului inițial D, însă diametrul lor micșorîndu-se din ce în ce, totalitatea acestor cercuri se va confunda la limită u diametrul AB, astfel că vom avea:

$$\text{lung. cerc. } O = \text{diametrul } AB.$$

Eroarea este aceiași ca în exemplul precedent IV: s-a utilizat în mod nepermis noțiunea de limită pentru o mărime ce rămîne constantă.

VI. *O parte este egală cu întregul.* Fie ABC un triunghi oarecare, în care $\sphericalangle B$ este presupus a fi cel mai mare. Ducem dreapta BD astfel ca $\sphericalangle CBD =$

$= A$ și coborîm pe AC perpendiculara BE (fig. 12). Cele două triunghiuri echiunghiuri, ABC și BDC, dau:

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2}.$$

Pe de altă parte, aceste triunghiuri avînd aceiași înălțime BE, sînt între ele ca bazele lor AC și DC,

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{AC}{DC}.$$

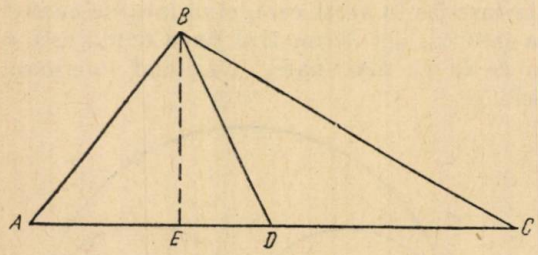


Fig. 12

Din cele două relații precedente se deduce

$$(1) \qquad \frac{\overline{AB}^2}{AC} = \frac{\overline{BD}^2}{DC}.$$

O teoremă cunoscută ne permite apoi să scriem următoarele relații

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \cdot EC,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2DC \cdot EC,$$

valabile, prima în triunghiul ABC, a doua în triunghiul BDC. Ducînd valorile lui $\overline{AB}^2$ și $\overline{BD}^2$ în (1), se obține,

$$\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \cdot EC}{AC} = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,DC \cdot EC}{DC}$$

sau, simplificînd,

$$AC + \frac{\overline{BC}^2}{AC} = DC + \frac{\overline{BC}^2}{DC},$$

$$\frac{\overline{BC}^2}{AC} - DC = \frac{\overline{BC}^2}{DC} - AC,$$

în fine,

$$(2) \qquad (\overline{BC}^2 - AC \cdot DC) \cdot DC = (\overline{BC}^2 - AC \cdot DC)\, AC.$$

Simplificînd ambii termeni prin $\overline{BC}^2 - AC \cdot DC$, se obține $DC = AC$, adică, porțiunea DC din segmentul AC este egală cu întreg acest segment.

Eroare constă în aceea că am simplificat ambii termeni ai egalității (2) cu $\overline{BC}^2 - AC \cdot DC$, fără a observa că această mărime este identic nulă. În adevăr, triunghiurile asemenea ABC și BDC dau imediat

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}, \qquad \overline{BC}^2 - AC \cdot DC = 0.$$

Ori, se ştie că putem simplifica ambii membri ai unei egalităţi cu o aceiaş cantitate, dacă aceasta este diferită de zero sau de infinit. În cazul contrar putem obţine rezultate absurde, ca cel de mai sus sau ca următorul, mai evident, din identitatea

$$a - b = a - b,$$

deducem

$$a - a = b - b, \quad a(1 - 1) = b(1 - 1),$$

deci, simplificînd ambii membri cu $1 - 1$, rămîne $a = b$, adică *toate mărimile sînt egale.*

O învăţătură foarte utilă ce se deduce din exemplul VI este aceia de a nu simplifica o egalitate printr-o mărime despre care nu ştim că este diferită de zero sau de infinit.

NOTE MATEMATICE

Asupra însumării unor forţe concurente

Rezultanta a trei forţe egale $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ este dreapta $\overline{OH}$, H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

Demonstraţie. Fie $\overline{OL}$ rezultanta forţelor $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ iar M punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $OBLC$. Forţele $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ fiind egale înseamnă că rezultanta $\overline{OL}$ este perpendiculară pe latura BC şi avem: $OM = ML$. Prin punctul A ducem o paralelă la rezultanta $\overline{OL}$ care taie înălţimea BD în punctul H. Întrucît $\overline{OL}$ este perpendiculară pe latura BC rezultă că AH este înălţime în triunghiul ABC.

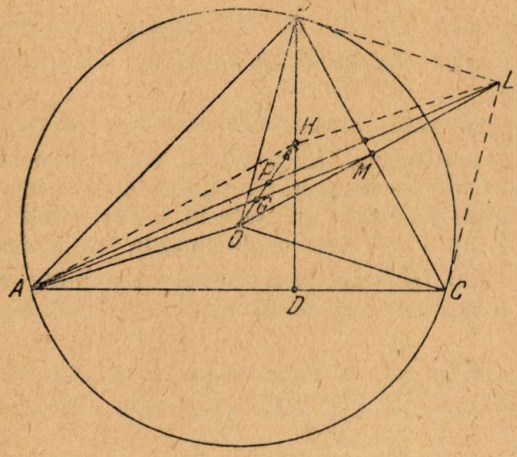


Fig. 1

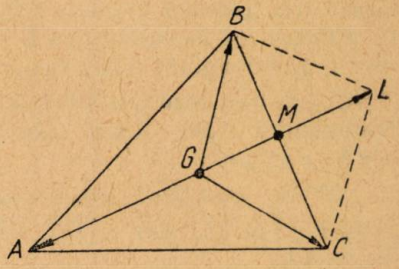


Fig. 2

Fie P mijlocul segmentului AL şi G punctul de intersecţie al dreptelor OH şi AM. Dreptele OH şi AM fiind mediane în triunghiul OAL, rezultă că punctul G este centrul de greutate al triunghiului OAL, deci şi în triunghiul ABC întrucît AM este mediană şi în triunghiul ABC. Dreapta OG taie paralela dusă prin punctul A la rezultanta $\overline{OL}$ în punctul H. Dreapta $\overline{OH}$ este rezultanta forţelor

$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$. Acest rezultat este cunoscut sub numele de «teorema lui Sylvester».

Observații. — 1° *Rezultanta forțelor* $\overline{GA}$, $\overline{GB}$, $\overline{GC}$ *este nulă,* G *fiind centrul de greutate al triunghiului* ABC.

Demonstrație. — Într-adevăr, fie $\overline{GL}$ rezultanta forțelor $\overline{GB}$ și $\overline{GC}$ iar M mijlocul laturii BC. Este evident că $\overline{GL}$ este prelungirea medianei AG. Întrucît $2\,GM = AG$ și $2\,GM = GL$ rezultă că $AG = GL$. Deoarece forțele GL și GA sînt egale și de sens contrar, rezultă că rezultanta lor este nulă, adică ceea ce trebuia arătat.

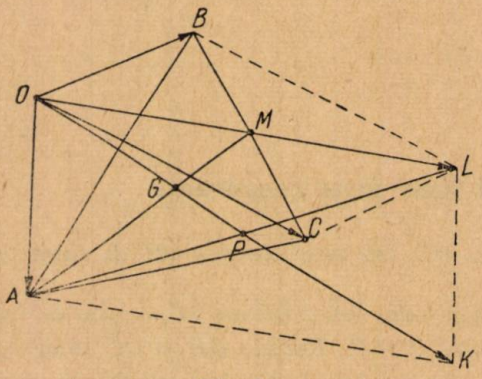


Fig. 3

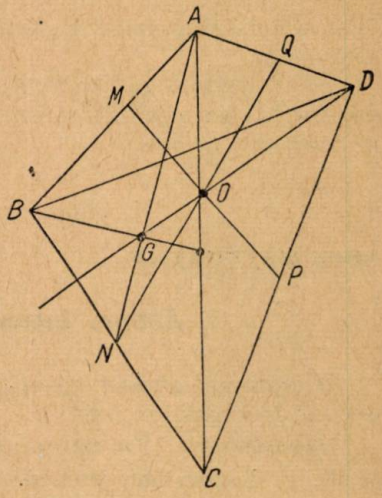


Fig. 4

2° *Fiind date patru puncte oarecare* O, A, B, C *rezultanta forțelor* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ *este o dreaptă ce trece prin centrul de greutate al triunghiului* ABC.

Demonstrație. — Fie $\overline{OL}$ rezultanta forțelor $\overline{OB}$ și $\overline{OC}$ iar M mijlocul laturii BC. Notăm cu $\overline{OK}$ rezultanta forțelor $\overline{OA}$ și $\overline{OL}$ iar cu P mijlocul laturii AL. Întrucît dreptele OP și AM sînt mediane în triunghiul OAL rezultă că punctul lor de intersecție G este chiar centru de greutate în acest triunghi, deci și în triunghiul ABC, deoarece dreapta AM este mediană și în triunghiul ABC. Așa dar, rezultanta forțelor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC. Acest rezultat constituie o generalizare a teoremei lui Sylvester.

3° *Se consideră patrulaterul* $ABCD$. *Să se demonstreze că rezultantele forțelor* $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$; $(\overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BA})$; $(\overline{CD}, \overline{CA}, \overline{CB})$; $(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC})$ *sînt concurente.*

Demonstrație. — Într-adevăr, fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, AD, iar O punctul de intersecție al dreptelor MP și NQ. Pentru demonstrație vom arăta că fiecare din cele patru forțe rezultante trece prin punctul O. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC.

Ne vom folosi acum, de rezultatul stabilit mai sus și anume, că rezultanta forțelor $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ trece prin punctul G. Se știe că dreptele MP și NQ se taie în părți egale, adică $OM = OP$ și $ON = OQ$. Să notăm cu O' punctul de inter-

secţie al dreptei MP cu dreapta DG. Aplicăm teorema lui Menelaus triunghiului MPC tăiat de transversala DG:

$$\frac{O'P}{O'M} \cdot \frac{GM}{GC} \cdot \frac{DC}{DP} = 1.$$

Deoarece $2\ GM = GC$ şi $2\ DP = DC$ rezultă că $O'M = O'P$ adică $O' \equiv O$. Aşadar, rezultanta forţelor $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ trece prin punctul O de intersecţie a dreptelor MP şi NQ.

În mod analog se demonstrează că şi celelalte trei rezultante trec prin punctul O. Prin urmare, cele patru forţe rezultante concură în acelaşi punct.

—Fiind date cinci puncte oarecare O, A, B, C, D rezultanta forţelor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ trece prin punctul de intersecţie al dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $ABCD$.

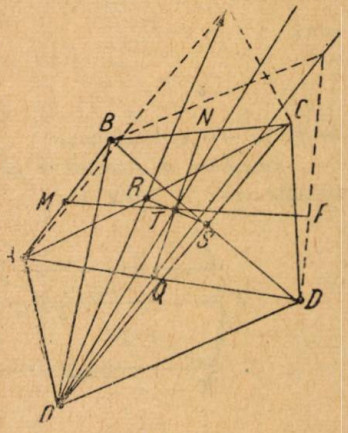


Fig. 5

Demonstraţie. — Într-adevăr, fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, AD, iar R şi S mijloacele diagonalelor AC şi BD. Fie încă $\overline{OL}$ şi $\overline{OK}$ rezultantele forţelor $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ respectiv $\overline{OB}$, $\overline{OD}$. Este evident că $OR = RL$ şi $OS = SK$. Dacă notăm cu T punctul de intersecţie al dreptelor MP, NQ este suficient să demonstrăm că rezultanta forţelor OL şi OK trece prin punctul T. Conform celor stabilite mai sus rezultă că $RS \parallel LK$. Deci rezultanta forţelor $\overline{OL}$ şi $\overline{OK}$ trece prin mijlocul segmentului ce uneşte mijloacele diagonalelor patrulaterului $ABCD$. Să arătăm că acest punct este chiar punctul T. Este uşor de observat că patrulaterul $MRPS$ este un paralelogram. Aşa dar, dreptele MP şi RS se taie în părţi egale. La fel se poate arăta că şi dreptele NQ şi RS se taie în părţi egale. Prin urmare, mijlocul segmentului RS coincide cu punctul T, adică rezultanta forţelor $\overline{OL}$ şi $\overline{OK}$ trece prin T.

Gh. I. Stoian,
student matematici, Bucureşti

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2029

Două oglinzi sferice, una concavă, alta convexă, au aceiaşi axă principală şi razele de aceiaşi lungime $R = 2$m; ele sînt aşezate la 2,50 m una de alta. La 1,50 m de oglinda concavă se găseşte un obiect luminos AB perpendicular pe axă. Razele luminoase sosesc unele pe oglinda convexă după reflexia lor pe oglinda concavă, altele pe oglinda concavă după reflexia lor pe oglinda convexă. Se întreabă unde se vor forma imaginile provenind de la fiecare din aceste duble reflexiuni. Să se construiască aceste imagini.

* * *

Soluție. — 1. *Imaginea formată prin cea de-a doua reflexie pe oglinda convexă.*

Imaginea $A'B'$ formată de prima reflexie pe oglinda concavă va fi la o distanță p' de această oglindă, fiind dată de relația

$$\frac{1}{150} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{100}, \qquad p' = 300 \text{ cm}.$$

Imaginea $A'B'$ este deci asimilabilă unui obiect virtual așezat la 300—250, adică la 50 cm de oglinda convexă și de partea centrului acestei oglinzi; formula folosită aici este:

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{f},$$

adică

$$-\frac{1}{50} + \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{100}$$

de unde $-p' = 100\frac{1}{3}$ cm.

Imaginea și obiectul se găsesc una în prelungirea celeilalte. Iată construcția acestei imagini reale $A\,B$ (fig. 1).

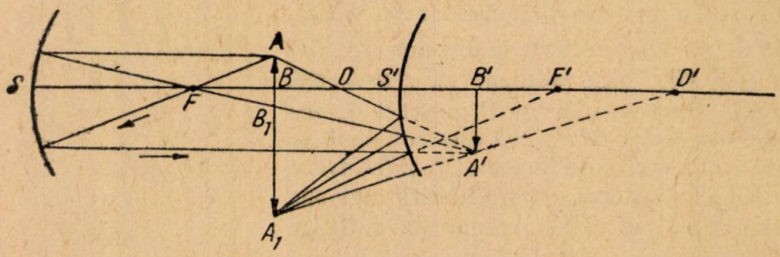


Fig. 1

2. *Imaginea formată prin cea de-a doua reflexie pe oglinda concavă.*

Imaginea *ab* formată de prima reflexie pe oglinda convexă va fi la o distanță p'_1 de această oglindă, fiind dată de relația

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{f},$$

adică,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{100}$$

de unde $-p'_1 = 50$ cm.

Imaginea este virtuală și de partea centrului oglinzii convexe. Însă razele reflectate pe această oglindă sînt divergente după reflexia lor; deci imaginea *ab* poate fi considerată în raport cu oglinda concavă ca un obiect real așezat la 250 + 50 = 300 cm de aceasta din urmă. Avem deci:

$$\frac{1}{300} + \frac{1}{p''} = \frac{1}{100}$$

de unde $p'' = 150$ cm, ceea ce ne arată că această imagină reală se formează la aceiași distanță ca obiectul.

Iată construcţia acestei imagini $a'b'$ (fig. 2)

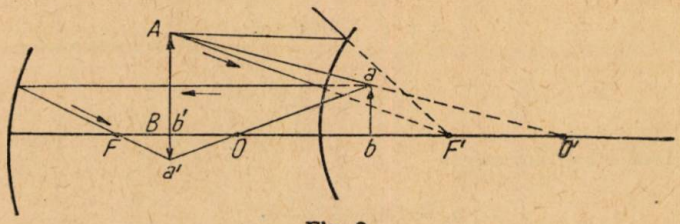


Fig. 2

Dacă vrem să cunoaştem raportul de mărime al celei de-a doua imagini faţă de obiect ajunge să observăm că prima imagine I_1 este obiectul raportat la a doua imagine I_2; avem atunci:

$$\frac{I_1}{O} = \frac{p'}{p} \; ; \; \frac{I_2}{I_1} = \frac{p'_1}{p_1} \, .$$

Înmulţind membru cu membru cele două relaţii:

$$\frac{I_2}{0} = \frac{p' p'_1}{p \, p_1} \, .$$

În primul caz (fig. 1) avem:

$$\frac{I_2}{O} = \frac{300 \cdot 100}{150 \cdot 50} = 4,$$

deci imaginea este de 4 ori mai mare decît obiectul.

În al doilea caz (fig. 2) se obţine printr-un calcul asemănător

$$\frac{I'_1}{O} = \frac{50 \cdot 150}{100 \cdot 300} = \frac{1}{4} \, ,$$

deci a doua imagine este de 4 ori mai mică decît obiectul.

Problema 2030

Două sfere, dintre care una are un volum de 4,190 cm^3, *iar alta de* 28,260 cm^3 *sînt încărcate cu electricitate de acelaşi fel. Distanţa între centrele lor fiind de* 12 cm, *forţa de respingere este de* 4 *dyne. După ce au fost puse în contact se separă şi se aşează la aceiaşi distanţă ca şi prima dată. Respingerea care se exercită între ele este acum* 6 *dyne. Să se afle sarcinile iniţiale.*

Virgil Atanasiu

Soluţie. — Cunoscînd volumele sferelor putem afla razele. Pentru prima sferă $r_1 \simeq 1$ cm, iar pentru a doua $r_2 \simeq 2$ cm. Înainte de a comunica, respingerea era de 4 dyne. Se poate scrie deci:

$$4 = \frac{qq'}{12^2} \, . \qquad (1)$$

După comunicaţia celor două sfere respingerea devine egală cu 6 dyne, deci

$$6 = \frac{q_1 q'_1}{12^2} \, . \qquad (2)$$

Pe de altă parte, după această comunicație cele două sfere ajung să aibe același potențial V și acesta este legat de q și q' prin relația

$$q + q' = V(1 + 2)$$

de unde

$$V = \frac{q + q'}{3}.$$

Ele vor avea însă acum, noi sarcini

$$q_1 = 1V = \frac{q + q'}{3},$$

$$q'_1 = 2V = \frac{2(q + q')}{3}.$$

Ducînd aceste valori în relația (2) avem

$$6 = \frac{(q + q')^2}{q \cdot 12^2} \cdot 2$$

de unde

$$q + q' \simeq 62. \qquad (3)$$

Avînd suma (3) și produsul (1) cele două necunoscute sînt date de ecuația

$$z^2 - 62z + 576 = 0$$

care prin rezolvare ne dă:

$$z_1 = q = 50; z_2 = q' = 12.$$

Problema 2031

Care este cantitatea de cupru depusă la catod în 10 minute, dacă prin baia de sulfat de cupru trece un curent furnizat de o baterie alcătuită din 6 elemente Leclanche legate în serie: a) *în cazul cînd electrozii sînt de fier*; b) *în cazul cînd electrozii sînt de cupru. Se ia rezistența băii și electrozilor 0,2 ohmi, iar f.e.m. a unui element Leclanché 1,5 V; rezistența unui element 0,5 ohmi, f.e.m. de polarizare 1 V; echivalentul chimic al cuprului 31,8.*

Soluție. — a) Cu electrozii de fier polarizarea electrozilor și f.e.m. de polarizație se opune aceleia a pilei; avem deci ca valoare a intensității:

$$I = \frac{6 \cdot 1,5 - 1,32}{6 \cdot 0,5 + 0,2} = 2,4\text{A},$$

și în timp de 10 minute va trece un număr de coulombi

$$Q = 10 \cdot 60 \cdot 2,4 = 1440 \text{ coulombi}.$$

Masa cuprului depus va fi

$$M = \frac{1440 \cdot 31,8}{96\,500} \simeq 0,47 \text{ g}.$$

b) Cînd electrozii sînt de cupru nu mai avem polarizație, deci

$$I_1 = \frac{6 \cdot 1,5}{6 \cdot 0,5 + 0,2} = 2,8\text{A},$$

$$Q_1 = 10 \cdot 60 \cdot 2,8 = 1680 \text{ coulombi},$$

$$M = \frac{1680 \cdot 31,8}{96500} = 0,55 \text{ g}.$$

Problema 2159

Într-un cilindru izolat termic se găseşte o masă m de aer la 0° şi presiune normală (76 cm Hg*). Această masă de aer este închisă în cilindru printr-un piston mobil. În interiorul cilindrului se află o rezistenţă de* 2 *ohmi prin care trece un curent electric; aerul încălzindu-se se dilată şi efectuează un lucru mecanic exterior de 247 jouli. Ştiind că intensitatea curentului este* $\frac{1}{2}$ A, *căldura specifică a aerului* $\frac{1}{4}$, *coeficientul de dilatare a aerului* $\frac{1}{273}$ şi $g = 9{,}81$ m/s^2, *să se afle timpul în ore, necesar trecerii curentului prin rezistenţă pentru a se realiza lucrul mecanic enunţat.*

Virgil Atanasiu

Soluţie. — Lucrul mecanic $W = PSh \alpha t$, unde PS = forţa aerului exercitată asupra pistonului, iar $h \alpha t$ = înălţimea la care s-a ridicat pistonul; dar $Sh = V$ (volumul aerului), deci $W = PV \alpha t$, însă

$$V = \frac{M}{0{,}001293} \text{ deci } W = \frac{P.\, M \alpha t}{0{,}001293}.$$

Căldura degajată de curent este egală cu căldura cîştigată de masa de aer, deci

$$Mct = \frac{I^2 \gamma \theta}{4{,}18} \text{ (unde } \theta = \text{timpul cît trece curentul) deci,}$$

$$Mt = \frac{I^2 \gamma \theta}{4{,}18 \cdot c} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \theta}{4 \cdot 4{,}18 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\theta}{2{,}09}.$$

Înlocuind în formula lucrului mecanic avem:

$$W = \frac{p \alpha \theta}{0{,}001293 \cdot 2{,}09},$$

de unde

$$\theta = \frac{0{,}001893 \cdot 2{,}09 . W}{p \cdot \alpha} = \frac{0{,}001293 \cdot 2{,}09 \cdot 247 \cdot 10^7}{1033 \cdot 981 \cdot \frac{1}{173}} \simeq 1800'' = 30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}.$$

Problema 2160

O bilă de plumb cu raza de 3 cm *este lăsată să cadă liber prin apă într-un bazin adînc de* 5 m. *Aceiaşi bilă este lăsată să cadă liber însă de la înălţimea de* 2 m *deasupra bazinului. Care este timpul pentru a ajunge la fundul bazinului în primul şi al doilea caz? Se neglijează rezistenţa aerului. Experienţa se face în Bucureşti.*

* * *

Soluţie. — Volumul sferei $= \frac{4}{3} \pi R^2$ deci,

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 27 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 36 \cdot 3{,}14 = 113 \text{ cm}^3.$$

G = greutatea sferei de plumb $= V \cdot d \cdot g = 113 \cdot 11{,}3 \cdot g = 1277\ g$. dyn. Greutatea apei dislocuite = 113 g. dyn.

F = Forţa care acţionează asupra bilei îndreptînd-o spre fundul bazinului = $(1277 - 113)g$ — $1164 \cdot 6 \cdot$ dyn.

Forţele sînt proporţionale cu acceleraţiile, deci:

$$\frac{F}{G} = \frac{a}{g}, \text{ adică } \frac{1164}{1277} = \frac{a}{981},$$

de unde:

$$a = \frac{1164 \cdot 981}{1277} \simeq 894 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

$S = \frac{at^2}{2}$ sau înlocuind literele avem:

$$500 = \frac{894\, t^2}{2} = 447\, t^2,$$

de unde $$t = \sqrt{\frac{500}{447}} = 15,06.$$

În al doilea caz, bila căzînd liber de la înălțimea de 2 m prin aer ajunge la suprafața apei din bazin cu o viteză

$$V = \sqrt{2g\,h} = \sqrt{2 \cdot 200\ g} = \sqrt{400 \cdot 980} = 626.$$

Cu această viteză intră bila în apă, deci la mersul prin apă această viteză este o viteză inițială.

Spațiul parcurs este dat de formula: $S = v_0\, t + \frac{at^2}{2}$.

Înlocuind literele prin numere avem:

$$500 = 626\ t + \frac{894}{2} t^2.$$

Aceasta este o ecuație de gradul II în raport cu t care rezolvată dă:

$$t \simeq 0^{\text{s}},56.$$

PROBLEME PROPUSE

2705. — Pentru normarea timpului de lucru la strung, una din operațiile făcute la Atelierele c.f.r. Griviţa Roşie a fost următoarea:

S-a luat o bară rotundă de diametru D ce s-a strunjit de jur împrejur pe lățimea l egală cu lățimea cuțitului, aducînd-se la diametrul d. Viteza cuțitului fiind egală cu vm/s, iar grosimea șpanului fiind egală cu s mm, se cere formula de calcul a timpului necesar pentru această operație.

C. Necşoiu, inginer Bucureşti

2706. — Să se determine cu o eroare mai mică decît 1 mm latura octogonului regulat a cărei arie este de 1 m^2.

* * *

2707. — Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:

$$\sin A \sin B \sin (A - B) + \sin B \sin C \sin (B - C) +$$
$$+ \sin C \sin A \sin (C - A) = \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A).$$

C. Ionescu-Ţiu

2708. — Să se arate că polinomul

$$P(x) = x^n - nx + n - 1$$

se divide cu $(x - 1)^2$ şi să i se găsească şi cîtul, n fiind întreg şi pozitiv.

* * *

2709. — Două recipiente de volum V conțin, fiecare, aer la presiunea H_0. Ele comunică cu un corp de pompă de capacitate C, care trage aer din recipientul A prevăzut cu o supapă S și-l împinge în recipientul B prevăzut cu o supapă S'. Să se calculeze care va fi presiunea în fiecare recipient după n curse complete ale pistonului pompei?

* * *

2710. — Să se secționeze un unghi tetraedric convex printr-un plan astfel încît în secțiune să se obțină un paralelogram.

(Olimpiada matematică, etapa II, cl. 9—10, 1947, Kiew)

2711. — Un obiect se află situat la 60 cm de un ecran. Unde trebuie așezată o oglindă concavă cu raza de 80 cm, pentru ca imaginea obiectului să se formeze pe acel ecran?

Se vor obține două soluții. Să se interpreteze și să se deseneze în cele două cazuri mersul razelor luminoase.

(Cercul de fizică din Capitală)

2712. — Un balon A cu volumul globului de 2 litri, are un gît cilindric BC lung de 50 cm și cu secțiunea de 10 cm^2. Balonul fiind plin cu aer este scufundat cu gîtul în jos într-un vas cu mercur pînă ce gîtul intră complet în mercur. Pînă la ce înălțime se va urca mercurul în gîtul balonului?

(Cercul de fizică din Capitală)

2713. — Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Să se găsească p, q și rădăcinile x_1, x_2 dacă $x_1 + 1$ și $x_2 + 1$ sînt rădăcinile ecuției

$$x^2 - px + pq = 0.$$

(Olimpiada de matematică, etapa I, 1956, cl. 8, Ordjonikidze)

2714. — Să se construiască graficul funcției

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

(Olimpiada matematică, etapa I, cl. 8, Ordjonikidze, 1956)

2715. — Să se demonstreze prin metoda inducției matematicei următoarea egalitate:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(Olimpiada matematică, etapa I, cl. 8, Ordonikidze, 1956)

2716. — Să se arate că în orice triunghi avem:

$$h_a + h_b + h_c = R\,[\cos A + \cos B + \cos C + \\ + \cos(A - B) + \cos(B - C) + (C - A)].$$

Corneliu Georgescu

2717. — Să se elimine x din ecuațiile:

$$\sec x + \cos x = \sqrt{a^2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = \sqrt{b + 2}.$$

* * *

2718. — Pentru a determina raza de girație a unei nave se ancorează într-un punct O o barcă. Barca este prevăzută cu o busolă și un sextant. Nava girează în jurul punctului O, descriind un cerc. Cînd nava se află în direcția E se măsoară unghiul vertical la catargul centru găsindu-se valoarea α. Cînd nava se află în direcția N, W, S unghiurile măsurate sînt respectiv 3α, 4α, 2α.

Care este valoarea unghiului α?

Dacă OV este înălțimea catargului și A poziția navei în direcția Est, unghiul vertical α este unghiul sub care se vede catargul vertical al navei, adică unghiul OAV. Cele patru poziții ale navei sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

C. V. Costăchescu

2719. — Fie, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor unui triunghi oarecare ABC și H ortocentrul lui. Prin A se duce o dreaptă oarecare care taie cercul AB_1HC_1 în D iar prin B și C se duc paralele la AD care taie respectiv cercurile BA_1HC_1, și CA_1HB_1 în E și F. Să se arate că punctele D, H, E, F sînt colineare.

E. Lerner, elev, București

2720. — Să se găsească suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, Ordjonikidze, cl. 9

2721. — Se dă un poligon regulat cu n laturi, a cărui latură este egală cu l. În acest poligon este înscris un alt poligon cu n laturi, astfel încît vîrfurile lui împart laturile celui dintîi în raportul 1:2. În poligonul înscris se înscrie din nou un poligon cu n laturi în mod analog. Continuînd acest proces, nelimitat, obținem o succesiune de laturi ale poligoanelor a_1, a_2,... a_p. Să se găsească suma patratelor acestor laturi și aria poligonului.

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, Ordjonikidze, cl. 10)

2722. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(x + y + z)(ax + y + z) = k^2,$$
$$(x + y + z)(x + ay + z) = l^2,$$
$$(x + y + z)(x + y + az) = m^2.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, 1956, Ordjonikidze, cl. 10)

2723. — Un reostat și trei rezistențe sînt legate în serie și supuse la o tensiune alternativă de 3520 volți și frecvență de 50 perioade pe secundă. Cele 3 rezistențe au fiecare: $R_1 = 2$ ohmi și o selfinducție $L_1 = 0{,}005$ henry, $R_2 = 3$ ohmi și $L_2 = 0{,}027$ henry, $R_3 = 1$ ohm și $L_3 = 0{,}006$ henry. Dacă intensitatea curentului este de 200 amperi și selfinducția reostatului de 0,012 henry, se întreabă ce rezistență trebuie să aibă reostatul și care este valoarea decalajului între curent și intensiunea de la bornele lui.

Tiberiu V. Colibaba, student București

2724. — Să se arate că dacă:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{A + B + C},$$

atunci:

$$\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n + B^n + C^n}$$

pentru orice n impar.

(Olimpiada matematică, etapa II, cl. 9—10, 1947, Kiew)

2725 — Să se găsească soluțiile întregi ale ecuației:

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

(Olimpiada matematică, etapa II, cl. 9—10, 1947, Kiew)

2726. — Într-un rezervor cu robinet, de capacitate 5 litri se introduc 10 litri aer la presiunea de 1 atmosferă și 5 litri de bioxid de carbon la 3 atmosfere. Se deschide robinetul și se lasă să scape o cantitate de amestec în volum de 20 litri la presiunea de 76 cm Hg. Se cere:

1) presiunea amestecului înainte de deschiderea robinetului,

2) presiunea amestecului după scurgerea celor 20 litri amestec la 76 cm Hg,

3) greutățile fiecărui gaz din amestecul rămas dacă un litru de aer cîntărește 1,293 g și de CO_2 cîntărește 1,97 g.

Herman Popilar, Timișoara

2727. — Un cilindru de rază 1 metru se rotește cu 5 rotații pe secundă. Să se calculeze portanța știind că viteza vîntului este de 10 m/s și înălțimea cilindrului este de 10 m.

* * *

CHESTIUNI DE EXAMEN

2728. Se dă expresia:

$$E = \sin 8x + 4 \sin 4x \sin^2 2x + 8 \sin 2x \sin^2 x$$

şi se cere:

1. se se reducă expresia la forma cea mai simplă;
2. să se rezolve apoi ecuaţia $E = 8 \cos^2 x$.

(Institutul de construcţii, Bucureşti)

2729. După cercuri O_1, O_2 de raze R_1, R_2 se taie în A şi B. Fie T_1T_2 o tangentă comună la cele două cercuri (T_1 şi T_2 fiind punctele de contact cu cercurile O_1 şi O_2), iar $\alpha = \sphericalangle P_1AO_2$

1. Să se calculeze în funcţie de R_1, R_2 şi α lungimile segmentelor T_1T_2 şi AB.
2. Să se determine unghiul α astfel ca $T_1T_2 = AB$.

Caz particular $R_1 = 2 + \sqrt{3}$ şi $R_2 = 1$.

(Institutul de construcţii, Bucureşti)

2730. Printr-un punct P din interiorul unui cerc O de rază r se duc două coarde perpendiculare APC şi BPD.

1. Să se arate că $AC^2 + BD^2 = 4\,(2r^2 - OP^2)$.
2. Fie R, S, T, U, proiecţiile lui P pe laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului $ABCD$. Să se arate că dreptele PR, PS, PT, PU sînt bisectoarele unghiurilor patrulaterului $RSTU$ şi să se deducă de aci că acest patrulater poate fi circumscris unui cerc cu centrul în P.
3. Să se arate că patrulaterul $RSTU$ este şi inscriptibil.
4. Fie R', S', T', U' mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$ (R' este mijlocul laturii AB, etc). Să se arate că dreptele RT', SU', TR', US' trec prin punctul P.
5. Să se arate că cercul circumscris patrulaterului $RSTU$ trece şi prin punctele R', S', T', U' şi că centrul său este mijlocul segmentului OP.
6. Să se deducă apoi că diametrul cercului circumscris patrulaterului $RSTU$ este

$$\sqrt{2r^2 - OP^2}.$$

(Institutul de construcţii, Bucureşti)

2731. Să se restrîngă expresia:

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right).$$

(Inst. construcţii — secţia f. frecv. — Bucureşti)

2732. 1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x - a}{1 + ax} + \frac{x - b}{1 + bx} = a + b$$

scriind rădăcinile sub forma cea mai simplă.

2. Să se arate că dacă a,b sînt reale, atunci rădăcinile ecuaţiei date nu pot fi niciodată egale.

3. Ce relaţie trebuie să existe între a şi b, pentru ca una din rădăcinile ecuaţiei să fie 0 sau ∞?

2733. Un căruţaş este angajat să transporte pămînt de la o săpătură. Căruţa poate încărca 1000 kg, calul merge cu 4,8 km/oră, iar încărcatul şi descărcatul căruţei durează împreună 10 minute. Costul transportului este de 3,50 lei pe m^3, costul unei zile de 10 ore este 43, 75 lei. La ce distanţă va fi transportat pămîntul dacă 1 m^3 de pămînt cîntăreşte 1600 kg? (soluţie aritmetică obligatorie).

(Inst. construcţii — secţia f. frecv — Bucureşti)

2734. Să se rezolve ecuația:

$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)(\cos x + \cos 2x + \cos 3x) = \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x.$

(Inst. construcții — secția f. frecv — București)

2735. Se dau două cercuri cu același centru O și având razele r și R. Dintr-un punct A exterior celor două cercuri se duc tangentele AT_1, AT_2 la cercul mic, și tangentele AT', AT'' la cercul mare (T_1, T_2, T' și T'' sînt punctele de contact cu cercurile).

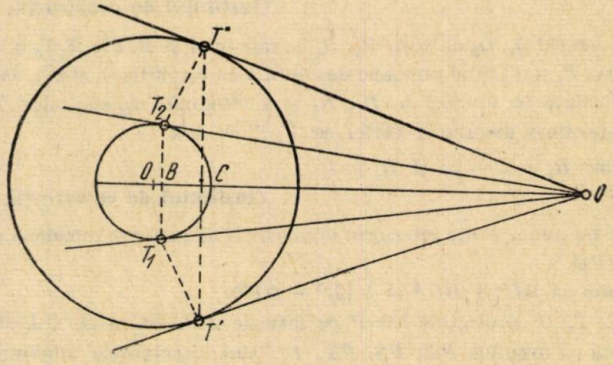


Fig. 1

1. Să se demonstreze că patrulaterul $T_1T_2T'T''$ este un trapez isoscel.
2. Să se calculeze aria acestui trapez în funcție de r, R și de $OA = a$.

2736. În triunghiul ABC se duc bisectoarele interioare AA', BB', CC' și se notează cu α, β, γ unghiurile $AA'C$, $BB'A$, $CC'B$.

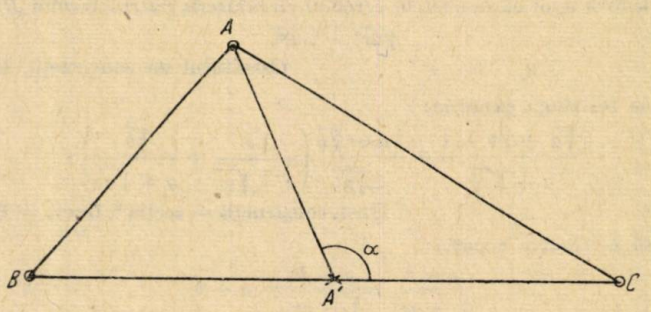


Fig. 2

1. Să se demonstreze că $\alpha = 90° + \frac{B-C}{2}$; $\beta = 90° + \frac{C-A}{2}$; $\gamma = 90° + \frac{A-B}{2}$

și că dacă unghiurile A, B, C sînt în progresie aritmetică, două din unghiurile α, β, γ sînt egale.

2. Să se deducă relația:

$$\cos\alpha \cos\frac{A}{2} + \cos\beta \cos\frac{B}{2} + \cos\gamma \cos\frac{C}{2} = 0.$$

(Inst. construcții — secția f. frecv — București)

REZULTATUL «OLIMPIADEI TINERILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1957»

De curînd s-au încheiat lucrările celei de-a 5-a « Olimpiade a tinerilor matematicieni şi fizicieni » la care au participat elevi ai claselor 5 — 7 din toate colţurile patriei noastre.

Ţinînd seama de succesele obţinute în anii precedenţi şi urmărind stimularea elevilor în studiul acestor discipline, Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. a organizat şi în anul acesta « Olimpiada tinerilor matematicieni şi fizicieni ». Participanţii la aceste concursuri au avut astfel prilejul să adîncească studiul matematicii şi fizicii, să oberve legătura strînsă între aceste discipline şi dezvoltarea tehnicii; ei au putut să-şi dea astfel seama de rolul pe care-l vor avea în construirea socialismului în patria noastră.

Anul acesta au participat la olimpiadă un număr de 6568 elevi din toate regiunile ţării. Numărul participanţilor a crescut cu 600 faţă de cel al anului 1956. Repartizarea pe clase a fost următoarea: din cl. 5 — aproximativ 2800 elevi, din cl.6 — 1900 elevi, iar din cl 7 au participat 1900 elevi.

La majoritatea filialelor numărul participanţilor a crescut cu 30% şi 40%. O creştere simţitoare s-a remarcat la regiunile Baia Mare (200%), Bacău (100%) şi Galaţi (100%).

Sînt însă regiuni ca: Iaşi, Oradea, Craiova, Suceava, unde numărul participanţilor a scăzut faţă de cel de anul trecut. La majoritatea filialelor regionale, numărul participanţilor a fost între 200 şi 500 elevi. Au depăşit cifra de 500, regiunile: Bacău, O. Stalin, Bucureşti, Piteşti, şi au avut o participare sub 200 elevi, filialele: Craiova, Oradea, Suceava, Constanţa.

Din totalul participanţilor au fost admişi la etapa regională un număr de 1200 elevi, ceea ce reprezintă un procent de 18%.

Publicăm lista elevilor premiaţi şi menţionaţi la « Olimpiada tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957 » felicitîndu-i pentru succesele obţinute şi urîndu-le spor la muncă în viitor:

BACĂU. *Premiaţi*: Rusu Constantin, cl.V s.7. ani nr. 8 Bacău; Băluşescu Lucia, cl V s. 7 ani nr. 2 Piatra Neamţ; Doliner Benjamin, cl.V s. 7 ani nr 3 Bacău; Klotzer Eugen cl. VII s.m. 1 Bacău; Rugină Vasile, cl. V s. 7 ani nr. 3 Roman; Solomon Vivi, cl. V s. m. 2 Bacău; Grimberg Dan, cl. V s.m.2 Bacău.

Menţionaţi: Grigore Emilia, cl. V Blăjeşi Buhuşu; Paraschiv D. cl. V s.m. 2 Bacău; Vaisman Ernest, cl V s. 7 ani nr. 2 Bacău; Pais Jean, cl. VII s.m. 1 Bacău; Cohn Ind., cl. VII s.m. 1 Bacău, Negoescu Nicolae, cl. VII s.m. 1 Bacău.

BAIA MARE. *Premiaţi*: Vlahovici Nicolae, cl. VII s. 7 ani nr. 3 Baia Mare; Neamţu Nicolae, cl. V s. ped. Sighet; Voicu Mihai, cl. VII s. 7 ani nr. 1 Baia Mare; Petruşca Gheorghe cl. V s. ped. Carei; Bologh Iudita, cl. VII s. 7 ani nr. 2 Baia Mare.

Menţionaţi: Matei Iudita, cl. V s. 7 ani nr. 5 Satu Mare; Otvős Tomas, cl. V s.m. 3 Satu Mare;Kabay Iuliana, cl. V s. 7 ani nr. 5 Satu Mare; Duca Carmencita, cl. VII s. de 7 ani nr. 3 Baia Mare; Pop Cristina, cl. V s.m. Carei;Kass Csaba, cl. V s.m. 3 Satu Mare; Joja Ana, cl. VII s. 7 ani nr. 3 Baia Mare.

BUCUREŞTI. *Premiaţi:* Dincescu Vasile, cl. V s.m. 17 Bucureşti; Dumitru Dan, cl. V s. elem. 195 Bucureşti; Feran Monica, cl. V s.m. 19 Bucureşti; Ganea Cristian, cl. V s.m. 17 Bucureşti; Kaufman Marcel, cl. V s.m. 17 Bucureşti; Grigorescu Şerban, cl. V s. m. 1 Bucureşti; Mîrşanu Mihai, cl. VI s. m. 13 Bucureşti; Popescu Vlad, cl. VI s. m. 11 Bucureşti; Olteanu Stoica Victor, cl. VII s. m. 17 Bucureşti; Stoicescu Cristian cl. VII s. m. 11 Bucureşti; Brűll Erika, cl. VII s. elem. 76 Bucureşti; Căzănescu Virgil, cl. VII s. m. 1 Bucureşti; Ceicu Mirela, cl. VII s. m. 22 Bucureşti; Costescu Vasile, cl. VII s. m. 18 Bucureşti; Zamfirescu Tudor, cl. VII s. m. 22 Bucureşti; Fischler Alexandru, cl. VII s. elem. 119 Bucureşti; Ionescu-Bujor Miron, cl. VII s. elem. 52 Bucureşti; Lungu Smaranda Cl. VII s. m. 17 Bucureşti; Macovschi Mihai, cl. VII s. m. 13 Bucureşti.

Menţionaţi: Costin Monel, cl. V s. m. 18 Bucureşti; Donescu M., cl. V s. m. 16 Bucureşti; Paidiu Ion, cl. V s. m. 20 Bucureşti; Pantazi Emanuel, cl. V s. m. 11 Bucureşti; Schwartz Ivonne, cl. VI s. elem. 124 Bucureşti; Arsene Cătălin, cl. VII s. elem. 118 Bucureşti; Cristofor Radi, cl. VII s. m. 11 Bucureşti; Rădulescu Ion, cl. VII s. m. 11 Bucureşti; Moldoveanu Ion, cl. VII s. elem. Giurgiu.

CRAIOVA. *Premiaţi*: Udriştoiu Tudor, cl. V s. m. Tg. Jiu; Barbu Gabriela, cl. V s. m. Craiova; Vulpe Elena, cl. V s. m. 2 Tg. Jiu; Ghindeanu Şerban, cl. V s. m. 1 Craiova; Păunescu Doru, cl. VI s. m. 2 Caracal.

Menţionaţi: Ciupag Nicolae, cl. VI s. m. 3 Craiova; Cancer Anca, cl. VII s. m. 1 Tg. Jiu; Mărăscu Cornel, cl. VII s. m. 2 Tg. Severin; Petrescu Ştefan, cl. VII s. m. 2 Tg. Jiu; Anghelescu Dan, cl. V s. m. 2 Craiova; Neamţu Mihai, cl. VII s. m. 2 Tg. Jiu; Duţă Rodica, cl. VII s. m. 3 Craiova; Manolescu Margareta, cl. VII s. m. 1 Tr. Severin.

GALAŢI. *Premiaţi*: Iancovici Zelina, cl. VII s. m. 3 Galaţi; Tătaru Petre, cl. VII s. m. 2 Tecuci; Lichiardopol, cl. V s. m. 3 Galaţi; Leibovici Osias, cl. V s. m. 3 Galaţi; Ene Eugen, cl. V s. 7 ani nr. 10 Brăila; Amza Mihai, cl. VII s. 7 ani nr. 6 Galaţi; Sterlieb Abraham, cl. VII s. 7 ani nr. 6 Galaţi; Holoştenco Rodica, cl. VII s. 7 ani nr. 6 Galaţi; Şerban Elena, cl. VII s. 7 ani nr. 15 Galaţi; Ornstein Leon, cl. V s. 7 ani nr. 17 Galaţi; Rosenblum Sorinel, cl. VI s. m. 3 Focşani; Cojocaru Iuliu Margareta, s. m. 1 Tecuci.

Menţionaţi: Sofroneanu Laura, cl. VII s. 7 ani Galaţi; Ercuţă Ion, cl. VII com. Truşeşti, raion Însurăţei; Melicson Silvia, cl. VII s. 7 ani nr. 6 Galaţi; Dumitrescu Lucia, cl. VI s. 7 ani nr. 12 Brăila; Bilig Gilda, cl. VI s. m. 3 Galaţi; Vasiliu Paul, cl. s. m. 3 Galaţi.

HUNEDOARA. *Premiaţi*; Bivolaru Sanda, cl. V s. ped. Deva; Ciorobîtcă, cl. V s. ped. Deva; Georgescu Tudor, cl. V s. 7 ani Poiana Sibiului; Busuioc Angela, cl. VII s. m. Deva; Lupan M., cl. VII s. 7 ani Alba Iulia; Munteanu Nicoleta, cl. VII s. m. Deva.

ORADEA. *Premiaţi*: Bărbulescu Aurelia, cl. VII s. m. 2 Oradea; Ghite Rodica, cl. V s. m. 6 Oradea; Porkolab Erzebet, cl. V s.m. 4 Oradea; Negruţ Ilie, cl. VII s. 7 cl. V s. m. 6 Oradea; Porkolab Erzebet, cl. V s.m. 4 Oradea; Negruţ Ilie, cl. VII s. 7 ani Săcădat; Sotoc Doina, cl. V s. m. 6 Oradea; Verdeş Petre, cl. V s. m. 6 Oradea; Murg Gheorghe, cl. V s. 7 ani Sicläu-Criş; Popa Lucia, cl. VII s. m. 2 Oradea; Gluc Avram, cl. V s. m. 6 Oradea; Sabău Vasile, cl. V s. m. 1 Oradea.

STALIN. *Premiaţi*: Pop Gheorghe, cl. V s. 7 ani Turcheş-Codlea; Lupu Maria, cl. V s. m. Mediaş; Sereteanu R., cl. V s. m. Mediaş; Szido Laszlo, cl. V s. m. 4 Oraşul Stalin; Vamanu D. Dan, cl. VII s. elem. Făgăraş; Popovici Lia, cl. VII s. 7 ani nr. 5 Oraşul Stalin; Ciucureanu Florin, cl. VII s. 7 ani nr. 5 Oraşul Stalin; Naghi Barbara, cl. VII s.m. 4 Oraşul Stalin, Hertl Katalin ,cl. VII s. m. 4 Oraşul Stalin; Antal Biborca, cl. VII s. m. 4 Oraşul Stalin; Szabo Rio, cl. VII s. 7 ani nr. 10 Oraşul Stalin; Iliescu Violeta, cl. VII s. 7 ani nr. 10 Oraşul Stalin; Gottschlieng Dieter, cl. VII s. 7 ani nr. 3 Sibiu; Binder Peter, cl. VII s. 7 ani Sibiu.

PITEŞTI. *Premiaţi*: Frigură Cornel, cl. VII s. m. 2 Piteşti; Strătilă Şerban. cl. VII s. m. 1 Piteşti; Enescu M. Radu, cl. VII s. 7 ani nr. 1 Piteşti; Dumitrescu Lucia, cl. VII s. m. 1 Piteşti; Guja Aurel, cl. VII s. m. Cîmpulung Muscel; Pescaru Ion, cl. VI s. m. 1 Cîmpulung Muscel; Preoteasa Petre, cl. VI s. 7 ani Sişpringeni, Curtea de Argeş; Chliment Maria, cl. V s. 7 ani Stefăneşti; Copăescu Alexandru, cl. V s. m. 1 Cîmpulung Muscel.

Menţionaţi: Bulucea Dumitru, cl. VII s. m. 2 R. Vîlcea; Bădescu D. Horia, cl. VII ş. 7 ani Curtea de Argeş; Dascălu Domniţa, cl. VII s. 7 ani Cîmpulung Muscel; Christel Sieglinde, cl. VII s. 7 ani Cîmpulung Muscel; Bărbulescu Ioana, cl. VII s. 7 ani Cîmpulung Muscel; Branişte Ligia, cl. VII s. m. 1 Piteşti; Diaconescu Stela, cl. V s. 7 ani Ştefăneşti; Bivol Georgeta, cl. V s. 7 ani Cîmpulung Muscel; Păun I. Florena, cl. V s. m. 2 Slatina, Solea Marcel, cl. V s. m. 1 R. Vîlcea; Tonchievici Rodica, s. m. 1 Piteşti; Paraschiv Ecaterina, s. m. 3 Piteşti.

PLOEŞTI. *Premiaţi*: Popa Ivona, cl. V s. 7 ani Buzău; Dănulescu Virgil, cl. VI s. m. 2 Buzău; Patron Alex, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Reuss Liviu, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Dobre Anghelina, cl. VII s. 7 ani Buşteni; Nicolau Sorin, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Ene Nicolae, cl. VII s. 7 ani Scăeni; Ianovitz Peter, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Pîrîianu Radu, cl. VII s. m. 1 Ploeşti.

Menţionaţi: Nicolau Grigore, cl. V s. m. 1 Ploeşti; Ionescu Sorin, cl. V s. m. 2 Ploeşti; Rădan Sorin, cl. V s. m. Slănic; Penu Corneliu, cl. V s. 7 ani nr. 8 Buzău; Ionescu Tatiana cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Andronescu G. cl. VI s. 7 ani nr. 22 Ploeşti; Lazea Adrian, cl. VI s.m. 1 Ploeşti; Peiulescu Marius, cl. VI s. m. 1 Ploeşti; Nicolaescu Mihaela, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Predeleanu Cecilia, cl. VII s. m. 3 Ploeşti; Pop Augustin, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Zaharia Adina, cl. VII s. m. 2 Tîrgovişte; Vlaga Florin cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Coşoianu Traian, cl. VII s. m. 1 Ploeşti; Marin Florian, cl. VII s. 7 ani Pucheni.

SUCEAVA nu are premiaţi şi menţionaţi la etapa regională.

TIMIŞOARA: *Premiaţi*: Popa Monica, cl. V s. 7 ani nr. 26 Timişoara; Tundrea Doina, cl.V s. 7 ani nr. 1 Reşiţa; Pichler Margareta, cl. V s. 7 ani nr. 4 Lugoj; Burieri Ion, cl. V s. 7 ani Marginea; Lustig Gheorghe, cl. V s. 7 ani nr. 3 Timişoara; Grosu Florin, cl. V s. 7 ani nr. 8 Timişoara; Rosenfeld A., cl. V s. m. 2 Lugoj; Lutvak Gabriel, cl. V s. m. 2 Arad; Mîrza Petru, cl. VII s. m. 1 Timişoara; Iorga Florica, cl. VII s. 7 ani nr. 4 Lugoj; Iorga Valeriu, cl. VII s. 7 ani nr. 4 Lugoj; Vineze Walter, cl. VII s. m. m. Oraviţa; Popa Dorina, cl. VII s. m. 1 Lugoj; Bucea Valeriu, cl. VII s.m.3 Timişoara.

Menţionaţi: Gheju Virginia, cl. V s. m. 2 Lugoj; Foioşanu Mariana, cl. V s. 7 ani nr. 1 Reşiţa; Birău Nicolae, cl. V s. 7 ani Marginea-Făget; Lefter Elena, cl. V s. 7 ani nr. 1 Reşiţa; Biriş Lucia, cl. VI s. 7 ani nr. 4 Lugoj; Turcan Virgil, cl. VII s. m. 13

Lugoj; Rech Olga, cl. VII s. 7 ani nr. 1 Reşiţa, Dogaru Livia, cl. VII s. 7 ani nr. 12 Arad; Coşereanu Sanda, cl. VII, s. m. 3 Timişoara; Neamţu Lucia, Cl. VII s. m. 2 Arad.

CONSTANŢA. Reidel Simion Franclin, cl.V.s.m.l, Constanţa; Brînzescu Vasile, cl.V. s.elem.nr.8 Constanţa; Chiriac Florica, cl.V.s.m.l Constanţa; Roitman Mose, cl.VI.s.m.l Constanţa.

CLUJ. Hupfermann Anna Maria, cl.V.s,elem. Cluj; Grosu Octavian, cl.V.s.elem. nr.2 Turda; Ilovan Aurel, cl.V.s.elem. nr.2 Bistriţa; Plămădeală Linia, cl.V.s.m. Cimpia Turzii; Huciuc Maria, cl.V.s.elem. nr.2 Bistriţa; Mircea Alexandrina, cl.V.ş.m. Ocna Mureş; Gehefugi Lenke, cl.V.s.elem. nr.21 Cluj; Gruiţa Dan, cl.V.s.elem.nr.1 Aiud; Bîdiu Mircea, cl.V. s.elem. nr.2 Bistriţa; Georgescu Mihai, cl.VI.s.m. nr.4 Cluj; Dumitrescu Alexandrina, cl.VI. s.m. nr.2 Cluj; Bayer Erika, cl.VII.s-elem. nr.8 Cluj; Cseke Peter, cl.VII.s.m. nr.7 Cluj; Solea Angela, cl.VII.s.m. Ocna Mureş; Gartner Erika, cl.VII.s.m. nr.1 Aiud.

IAŞI. cl.V; Tofan Emil, s.m.4 Iaşi; Iţicescu Lazaroni, s.m.4 Iaşi; Chiroşcă Mihaela, s.m.4 Iaşi; Goldemberg Daniel, s.m.1 Iaşi; Grindea Rodica, s.m.4 Iaşi; Weisbuch Ezra, s. elem·7 Iaşi; Bolocan Mihai, s.m.6 Iaşi; Leibovici Estera, s.m.4 Iaşi; Sacagiu Lili, s.elem.7 Iaşi; Iţic Clara, s.m.1 Hîrlău: Stoian Paul, s.m.1 Iaşi; Fasolă Const. s.m.4 Iaşi; Stein Lidia, s.m.2 Iaşi. ClasaVI-a: Goldemberg Viviana, s.m.6 Iaşi; Antonescu Mircea, s.m.3 Iaşi; Zamfirescu Floricica, s.m.2 Iaşi. BlasaVII-a. Bivol Adriana, s.m.6 Iaşi; Arsenie Grigore, s. m.1 Bîrlad; Mărculescu Sorin, s.m.3 Iaşi; Diaconescu Mircea, s.elem.12 Iaşi; Vidmichi Emilian, s.m.1 Vaslui; Wolfsohn Arnold, s.m.1 Iaşi; Ulea Mariana, s.m.1 Vaslui; Dumitrică Florica, s.m.1 Bîrlad; Roman Ioan, s.m.1 Iaşi; Scripcaru Doru, s.m.3 Iaşi.

★

Din rapoartele primite de la filialele noastre regionale, care cuprind observaţii asupra desfăşurării Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni rezultă că:

— foarte mulţi participanţi au trimis probleme rezolvate cu ajutorul altor persoane sau copiate după altele. Din această cauză au fost admişi la etapa regională elevi mai slab pregătiţi şi nu au fost admişi elevi mai buni care s-au limitat doar la posibilităţile lor.

— De asemenea se constată o participare mai numeroasă a elevilor din centrele orăşeneşti şi o foarte slabă participare din raioane şi comune. Aceasta dovedeşte o slabă popularizare a olimpiadelor şi un sprijin nu îndeajuns de susţinut din partea secţiilor de învăţămînt raionale, deşi este ştiut că olimpiada contribuie la buna pregătire a elevilor, atît la matematică cît şi la fizică.

— Rapoartele conţin şi observaţii asupra conţinutului şi redactării problemelor. Astfel: s-a remarcat că s-au propus prea multe probleme grele fără să se facă o gradaţie a lor, fapt care a determinat ca majoritatea elevilor să nu poată rezolva cel puţin 50% din problemele propuse şi în felul acesta foarte mulţi elevi care ar fi vrut să participe la olimpiadă au fost demobilizaţi.

La acest lucru a contribuit şi conţinutul problemelor, în general nu prea atractiv şi nici adaptat nivelului şi vîrstei participanţilor în plus, redactarea unor probleme a fost confuză.

— Problemele propuse au cuprins şi materie, care nici la data trimiterii rezolvărilor nu fusese predată la orele de curs.

— Problemele de fizică se rezolvă cu mai multă greutate din cauza înţelegerii superficiale a fenomenelor fizice pe care se bazează rezolvarea problemelor.

Consiliul de Conducere al S.S.M.F. a luat act de aceste lipsuri organizatorice la şedinţa de birou din 31 mai a. c. cînd s-a făcut analiza desfăşurării « Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957 », hotărînd pe viitor îmbunătăţirea organizatorică şi de conţinut care trebuie să se aducă olimpiadei.

Comisia centrală a olimpiadei de pe lîngă S.S.M.F. constată că olimpiada s-a bucurat de sprijinul:

— Ministerul Învăţămîntului în circularele trimise către secţiile de învăţămînt regionale,

— Secţiile de învăţămînt regionale şi raionale au sprijinit olimpiada prin fondurile alocate pentru deplasarea şi masa elevilor, pentru achiziţionarea premiilor, prin popularizarea şi organizarea deplasării la regiuni.

— Filialele S.S.M.F. regionale au asigurat buna desfăşurare a olimpiadei şi sprijinul profesorilor de matematică şi fizică în regiune.

Olimpiada a oferit un prilej de întrecere tovărăşească între elevi, de verificare şi îmbogăţire a cunoştinţelor lor. Profesorii ai căror elevi au participat la concurs au putut să verifice astfel, munca pe care ei au depus-o la catedră şi felul cum elevii şi-au însuşit cunoştinţele predate.

Ţinînd seamă de scopurile urmărite sfătui pe elevi să participe cu tot elanul lor tineresc la « Olimpiada » anului 1958 iar pe profesorii de matematică şi fizică, să sprijine şi să popularizeze mai mult această olimpiadă.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidențiați

Pînă la 15 martie 1957 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Cîrnu Mircea (cl. 9 Tîrgoviște), Ioniță Tudor (student Orașul Stalin), Popa D. Doina (clasa 8, s.m. 15 București), Stepan Ionel (zidar Cobadin), Matei Aurel (absolvent Tîrgu Mureș), Baltag Vasile (clasa 10 Ploești), Peterfy Attila (clasa 10 Tîrgu Mureș), Stoian Mircea (clasa 9, s.m.1 Orașul Stalin), Costinescu Anca (clasa 10 s.m. 2 Iași), Panaitopol Laurențiu (clasa 10 Giurgiu), Stănculescu Adrian (student Craiova), Nicolescu Basarab (clasa 8 Ploești), Rădulescu D. Constantin (s. m. 4 clasa 10 București), Indoleanu Ioan (școala pedagogică nr. 2 Cluj), Ghenea Anghel (absolvent Piatra Olt), Chiriac D. Dumitru (clasa 8 Bacău), Dobre Ion (student electrotehnică București), Cancer Anca (clasa 7 Tîrgu Jiu), Drăgan Petre (clasa 8 Giurgiu), Bușilă A. Ioana (clasa 10 s.m. 7 București), Jianu Ion (clasa 10 s.m. 2 București), Bătireanu Gheorghe (absolvent Buzău), Becupanu Teodor (clasa 10 Tîrgu Neamț), Tănase Const. (clasa 10 Slobozia), Mihăileanu Constantin (clasa 10, s.m. 1 Timișoara), Ianuș Stere (clasa 10 Constanța), Gheorghe A. Cezar (clasa 8 Bacău).

Pînă la 15 martie 1957 s-au mai primit cîte cel puțin zece soluții bune la problemele propuse în G.M.F.—B nr. 11 și 12 din 1956 și nr. 1 din 1957, după cum urmează:

ADJUD (Bacău). *Abs.* Flueraru Costică (2382, 83, 95, 444, 46, 48—54, 56, 58, 61—63).

ALBA IULIA. *S. m.* 2. Clasa 8. Vartic Mihai (2404, 05, 08, 09, 55, 63, E: 885, 86, 90, 94, 98).

ALEXANDRIA. Clasa 10. Ploeșteanu S. Ion (2417—20, 31—33, 38, 39, 42, 44, 45, 47—50, 52—58, 61—63, 71, 72, *P*).

ARAD. *S.m.* 1. Clasa 9. Bogdănescu Silviu (2424, 38, 45, 46, 51, 52,—55—58, 61, 62), Demșoreanu Brutus (2392, 95, 98, 404, 05, 08, 10, 19, 32, 34, 64), Savin Virgil (2387, 92, 424, 26, 45, 50, 55—57, 62).

BACĂU. *S.m.*1. Clasa 8. *Chiriac D. Dumitru* (2377, 415, 17, 34, 44, 48, 50, 52, 54, 59, 60, 64, 76, 77, 87, 89, 95, 97, 91, 99, E: 888, 92, 919, 904, 06, 11—17), 18, P), Grill Alfred (2420, 63, 65, 77, 80, 82, E: 910, 17, 18). Clasa 9. Sîrbu Mihai (2438, 44—50, 52, 55—59, 61, 62, 64, P), Titaru Ion (2438, 39, 43—47, 51, 52, 55—58, 61, 62, P). Clasa 10. Chiriac Vasile (2465, 72, 80—83, 88, 90, 97, 98), Farcaș Constantin (2404, 05, 07—09, 55, 56, 48, 61—63).

BAIA DE ARIEȘ (Cluj). Clasa 8. Gaiță Const. (2405, 06, 20, 62, 99, E: 886, 88, 89, 93, 903, 11, 18), Miheț Simion (2405, 38, 62, 63, E: 886, 88, 93, 903, 11, 18). Clasa 10. Opriță Nicolae (2426, 30, 38, 39, 44—49, 51—53, 56—58, 62, 63, 71, 78).

BAIA MARE. *Învățător* Mariș Ilieș (Vișău) (2395, 400, 04—06, 08, 09, 45, 49, 52—56, 61—63, P). Clasa 9. Racolță Mihai (2444—50, 52, 53, 55, 56, 58, 66, 62), Vornicescu Nicolae (2423, 39, 44—50, 52—55, 57, 58, 61—63).

BĂICOI (Cîmpina). Clasa 9. Dumitrescu Stelian (23, 86, 92, 95, 98, 404, 05, 08, 10, 50, 57, 61, 63).

BREAZA (Ploești). Liceul militar « D. Cantemir ». Clasa 9. Anișca Ion (2405, 09, 10, 45—48, 50, 55—58), Brudască Vasile (2407, 09, 10, 45—48, 50, 55, 56, 62), Cuzuban Dumitru (2392, 95, 404, 05, 07, 09, 48, 52, 55, 61, 62), Damian Toma (2386, 92, 95, 97, 404—10, 15, 45, 46, 55, 56, 61, 62), Dașcov Pavel (2392, 95, 404—10, 15, 45, 46, 55, 56, 61, 62), Dinu Ștefan (2405, 07, 10, 11, 38, 45, 48, 55, 56, 62, 63), Ghiga Ion (2405, 10, 45—48, 50, 55—57, 61), Ilie Gheorghe (2395, 405, 10, 45, 46, 48, 55, 56, 62, 63), Lădău Gheorghe (2392, 95, 404, 05, 07, 10, 45, 48, 52, 55—57, 61, 62), Moldoveanu T. Tudor (2407, 10, 11, 38, 45, 46, 48, 52, 62, 63), Motoargă Dumitru (2385, 87, 92, 94, 98, 400, 04—17), Munteanu Dumitru (2407, 09, 10, 45—48, 50, 55, 56, 61, 62), Munteanu Ion (2405, 07, 09, 10, 38, 45, 48, 55, 56, 62), Năstase Teodor (2395, 404, 05, 09, 10, 45, 46, 55, 56, 62, 63), Oprică Gheorghe (2395, 404, 05, 07, 10, 38, 45, 48, 56, 62, 88), Petre Anghel (2405, 07, 10, 45—48, 50, 55, 56, 61), Serghi Ioan (2386, 407, 10—12, 38, 45, 46, 48, 62), Surucci Sergiu (2405, 07, 09—11, 38, 45, 46, 48, 56, 62), Vîlceanu Marin (2392, 405, 07, 10, 45, 48, 50, 52, 55—57, 61, 62). Clasa 10. Bohățel Dumitru (2392, 405, 07, 10, 46—48, 55—57, 61, 62), Chiș Alexandru (2420, 26, 30, 46—48, 51—56, 61—63), Georgescu Aurel (2386, 92, 95, 97, 405—07, 19, 45, 48, 52, 55, 62, 63, 72), Mancu Florin (2444—48, 50, 52, 56, 58, 61, 63), Oprică Octavian (2384, 95, 402—11, 24), Stănescu Ștefan (2392, 96, 97, 404—06, 08, 09, 49, 52, 53, 55, 62, 72).

BUCUREȘTI. *Studenți. Dobre Ion (Electrotehnică)* (2404, 05, 07—10, 18, 24, 26, 27, 30, 33, 44—50, 52—59, 61—63, 72, 73, 76, 78, 80—83, 87, 90, 94, 97, 99). Abs. Buriman Adrian (2392, 94, 95, 405, 06, 09, 15, 38, 55, 64), Harmata L. Mihai (2431, 68, 70—72, 75, 76, 78, 81, 83, 87, 89, 94, 95, 97, 99), Panait Nicolae (2435, 38, 39, 50, 52, 56, 57,

61—63, 72, 78, 80, 82, 83, 90, 91, **97**, 99), Raicu I. Const. (2445, 48, 52—55, 62, 63, 71, 72, 78, 80), Stănculescu Mirela (2387, 92, 95, 400, 05, 07, 09, 10, 45—48, 50, 52, 55, 57, 58, 62, 63).

S. m. 2. Clasa 9. Diță R. Honoriu (2395, 404—07, 10, 44—48, 50, 55, 56, 58, 61—62). Clasa 10. *Jianu Ion* (2324, 35, 38, 54, 55, 57, 59, 64, 67, 70—72, 78, 79, 95, 404—10, 14, 15, 17, 24, 46, 48, 56, 61, 62), Tureanu Aurel (2344, 78, 92, 451).

S. m. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Clasa 8. Tunaru Elena (2455, 63, E: 885, 86, 88—91, 93, 98, 99, 901, 11, 19). Clasa 9. Dobrescu I. Ecaterina (2387, 92, 95, 400, 05, 07, 09, 10, 45—48, 50, 52, 55, 57, 58, 62, 63). Clasa 10. Ardeleanu Ana (2386, 95, 402, 38, 44, 48, 54, 62, 63, 72), Matei V. Gheorghe (2357, 64, 69, 78, 438, 42, 44—46, 48, 50, 52, 55, 57, 59, 62—64, 90), *Rădulescu D. Const.* (2357, 64, 69, 70, 72, 78, 438, 42, 44—46, 48, 50, 52, 55—57, 59, 61—64, 72—90).

S. m. 7. « *I. L. Caragiale* ». Clasa 8. Grofșoreanu I. Gelu (2405—07, 09, 11, E: 885, 88, 90, 94, 97, 98—900, 11). Clasa 10. Andreescu Sofia (2392, 95, 405, 09, 10, 52, 55, 56, 61—63), *Bușilă A. Ioana* (2386, 87, 92—95, 97, 99, 400, 02, 04—17, 47).

S. m. 11 « *D. Cantemir* ». Clasa 9. Șchiopulescu Dan (2322, 57, 92, 94, 95, 404—06, 08—100, 46, 47, 57, 58). Clasa 10. Ghinea Șt. Gheorghe (2395, 97, 404—10, 46, 48, 57, 61—63).

S. m. 13. Clasa 8. Fierăscu D. Ștefan (E: 910—19), Popescu I. Ovidiu (2456, E: 895, 901, 09, 11, 13—15, 17—19). Clasa 10. Nica Șt. Nic. (2444—46, 48, 50, 52—58, 60—63, 72).

S. m. 15. Clasa 8. *Popa D. Doina* (2255, 307, 29, 405, 38, E: 828, 29, 33, 38, 40, 41, 44, 46, 50—56, 58—63, 65, 67, 69, 70, 72—74, 76—81, 83, 85, 86, 88—95, 97, 98, 900, 02—04, 06, 09).

S. m. 17 « *Matei Basarab* ». Clasa 7. Panaite Teodor (E: 889, 93, 94, 902, 03, 07, 09, 11, 15). Clasa 8. Panait Nicoleta (E: 895, 98, 99, 902, 903, 09, 11, 14, 15, 18). Clasa 10. Aniței Marian (2392, 404, 05, 09, 46, 47, 53, 58, 72, 80, 82, 87), Scherzer Eugen (2392, 95, 400, 04, 05, 07, 09—11, 45, 46, 55, 72, 97), Stere Eugen (2404—08, 10, 15, 45, 48, 50, 52, 55—57, 61—63).

S. m. 18. Clasa 8. Enișteanu N. Bic. (2438, 55, 56, 58, 80, 82, E: 899, 900—02, 08, 09, 11). Clasa 10. Caloianu Vasile (2442, 45, 46, 48, 52, 55, 56, 61—63), Zamfirescu H. (2359, 78, 85, 95, 96, 99, 402, 05, 09—11, 15—17).

S. m. 19. Clasa 8. Neagu Anca (E: 885, 86, 88—91, 9—, 94, 99, 900, 11).

S. m. 20. « Gh. Șincai » Clasa 8. Păduret Victoria (2405, 55, 56, 63, E: 886, 89, 90, 93, 911, 14, 18). Clasa 10 seral. Simion Gh. (2402, 04—07, 09—11).

S.m. 22. Clasa 8. Raicea Liana (E: 891, 93—96, 98—900, 02, 03, 06, 08, 09).

S.m. 26. Clasa 9. Corbuleanu Gabriel (2404, 05, 07, 09, 10, 44, 45, 47, 48, 52, 56, 61), Corbuleanu Marcel (2404, 05, 07, 09, 10, 44, 45, 47, 48, 52, 56, 61), Georgescu Petre (2404—06, 08—10, 44—47), Quintescu S. Dan (2395, 404—11, 44). Clasa 10. Alexandru V. Horia (2392, 94, 95, 402, 04—16).

Sc. m. tehnică de metrologie. Drăgușin Mircea (2428, 38, 44—46, 48—50, 52—57, 59, 62, 63).

BUZĂU. Clasa 7. Moldoveanu M. Florin (E: 902, 03, 07—09, 11, 14, 15, 17, 18). Clasa 8. *Gheorghe A. Cezar* (2384, 87, 91, 92, 94—96, 99, 400, 04—07, 09—11, 13, 16, E: 885—91, 93—98). Clasa 10. Suciu Tita (2444—50, 53—59, 61, 62, 72, 83, 97). Abs. *Bătireanu Gheorghe* (2418—20, 23, 35—37, 65, 66, 70, 72, 74—78, 80—84, 86—91, 94—99).

CALAFAT (Craiova). Clasa 9. Mititelu Ștefan (2391, 400, 06, 08, 11, 13, 16, 23, 45, 46, 49—53, 55—58, 61, 62, 65, 68, 73, 80, 87, 97). Stoenică Ion (2392, 94, 405—10, 20, 32, 45, 53, 55, 61—63).

CĂLĂRAȘI. Clasa 10. Geacă Despina (2392, 407, 08, 44, 45), Pîrlea Const. (2395, 402, 07, 45, 48, 50, 52, 55—57, 59, 62—64).

CARACAL. Clasa 7. Mihăilescu Stelian (E: 874, 76, 78—80, 83, 84, 901, 905, 07). Clasa 9. Amzu Dumitru (2404, 06, 08, 10—12, 52, 57, 59, 97), Georgescu Mircea (2392, 95, 404—09, 38, 45, 46, 48, 51, 55—57, 61, 62), Stratan Gh. (2379, 86, 92, 96, 408, 09, 36, 38, 45—48, 50, 52, 55—57, 61—63, 77, 89, P).

CÎMPIA TURZII (Turda). Clasa 10. Pick Gheorghe (2392, 95, 99, 402, 04—06, 09—11, 14).

CÎMPULUNG MUSCEL. S.m. 1. Clasa 10. Popescu Spiridon (2431, 38, 45, 48, 50, 53—55, 62, 63, 72, 82, 87).

CÎMPINA (Ploești). Bunea P. Mircea (2404, 10, 12, 15, 46, 47, 50, 55, 62, 72).

CLUJ. Clasa 6. Crișan Daniel (E: 901, 06).

S.m. 4. Clasa 9. Severeanu Adrian (2406, 30, 44, 50—52, 58, 61, 62, 89, 97). Clasa 10. Bîrzan Romanel (2440, 46, 71—73, 79, 83, 84, 97—99, P).

S.m. 6. Clasa 10. Vădan Petre (2405, 33, 38, 44, 52—56, 61, 63).

S.m. 8. Clasa 8. Cimoca Gh. (2462, E: 886, 93, 99, 902, 03, 06, 08, 09, 11, 18).

S.m. 10. Clasa 9. Tăuțan Maria (2405, 38, 44, 48, 52, 54—56, 62).

Șc. pedag. 2. Indoleanu Ioan (2422, 33, 38, 39, 45, 46, 48—57, 61—63, 65, 73, E: 901—03, 06—0,8, 10—42, 15, 17).

COBADIN (Constanța). *Stepan Ionel, zidar* (2418, 19, 24, 28, 32—34, 38, 39, 42—64, 67, 68, 72, 75—81, 86—91, 94—99, P).

CORABIA. Clasa 9. Petcu Alexandru (2391, 92, 95, 404—11, 38, 44—47, 50, 55, 56, 62, P), Truică Marin (2420, 38, 44, 46—48, 50, 52, 58, 68, 82, 91, 97). Clasa 10. Tănase Ion (2357, 95, 404, 10, 24, 44, 45, 47—50, 52, 61, 63, 72), abs. Spaloghe N. (2395, 400, 05—07, 09, 10, 45, 50, 57, 62).

CONSTANȚA. Clasa 10. *Ianuș Stere* (2347, 49, 52, 66, 414, 16, 23, 26, 29, 30, 34, 39, 42, 45, 46, 48, 52, 57, 59, 62, 63, 71, 72, 78, 84, 85, 87, 90, 91, 95, P, N, Despre cercul de matematică pe școală).

CRAIOVA. Abs. Karavias Nicolaos (2395, 404—06, 09, 10, 14, 17—19, 23, 49, 50, 52—54, P). Stud. *Stănculescu Adrian* (an I electrotehnică) (2252, 54, 55, 57, 370—72, 77—80, 86, 87, 92, 95, 97, 404—17, 45—54, P).

S.m. 2 « Frații Buzești ». Clasa 8. Cernău Rodica (2405, 38, 55, E: 886, 87, 93, 901, 09, 11, 18, 19). Clasa 9. Ciocotoiu Mihai (2395, 405, 09, 45, 46, 55, 56, 61, 72, 83, 97), Vasile Florin (2444—46, 48, 50, 51, 55—58, 61, 62).

CURTEA DE ARGEȘ, Clasa 9. Băcăuanu Mihai (2424, 32, 46, 51, 56—58, 62—64, P).

FĂGET (Timișoara). Clasa 10. Antănaș Petru (2472, 77, 81, 83, 87—91, 97).

FĂLTICENI (Suceava). S. m. 2. Clasa 10. Conache Natalia (2445, 46, 48, 50, 53, 63, 68, 70, 71, 87).

FOCȘANI. S.m. « Unirea ». Clasa 10. Birhală Alexandru (2404, 05, 09, 47, 48, 52, 62, 63, 72, 97), Chiciorea Gheorghe (2404, 05, 09, 48, 52, 56, 63, 72, 97), Pranețchi Tudor (2404, 47—49, 53, 59, 62, 63, 72, 77, 90, 97).

GĂEȘTI (Pitești). Clasa 10. Tîrtan Gabriel (2433, 45—47, 60, 64, 72, 74, 75, 77, 87, 90, 91—93), Ilie Lucian (2396, 97, 418, 31—34, 38, 41, 42, 44, 46, 48—50, 52—55, 57, 58, 60, 62).

GALAȚI. S. m. 1, Clasa 10. Chirilă Costică (2437, 38, 42, 68, 71, 72, 77—80, 82, 97), Jukov Mihai (2382, 92, 404, 05, 08, 09, 48, 49, 52, 53, 55, 61, 62). S.m.2. Clasa 10. Strat Victoria (2405, 07, 09, 11, 15, 45, 48, 49, 52, 55, 56, 62, 63, 72, 87).

Lic. mil. de marină. Clasa 10. Tudorache Mihai (2385, 98, 400, 12, 13, 15, 16, 24 27, 31, 32, 38, 42, 47, 48, 50, 52—54, 56—58, 61, 64).

GIURGIU. S. m. 1. Clasa 8. *Drăgan Petre* (2392, 94, 405, 07, 09, 45, 46, 55—58, 61—63, E: 885—90, 93, 94, 97—903, 05, 08, 09), Perșoiu T. Ion (2404, 38, 63, E: 890, 97, 99, 900—03, 08, 09, 57, 58, 61, 62), Popescu Radu (2406, 10, 38, 45, 46, 55—58, 61, 62, E: 891, 99· 900—02, 05, 08, 09), Videanu Marioara (2455, 56, 62, E: 886, 98, 90, 99, 900—03, 05, 07—09, 11, 14, 15, 17, 19). Clasa 9. Crăciunică George (2392, 410, 20, 38, 44, 46, 48, 49, 53, 55—57, 61, 63, 64), Grama Marin (2386, 92, 98, 99, 405, 06, 09, 10, 32, 38, 45—48, 52, 55—58, 61—63). Clasa 10. *Panaitopol Laurențiu* (2420, 22—30, 35, 37—40, 44—64, P), Gebăilă Ștefan (2359, 60, 63, 94, 407, 38, 44—48, 48—50, 52—58, 62, 63).

HOREZU (Pitești). Clasa 10. Mihuț Ion (2395, 404—07, 09, 38, 45, 48, 52, 55, 57, 59, 72, 87), Rădescu Nicolae (2395, 414, 17, 38, 49, 53, 54, 57—60, 72, 87).

HUNEDOARA. S. Tehn. de maiștri, anul II. Crăciun Iacob (2432, 38, 45, 49, 50, 53—56, 61). Clasa 9. Oberländer Horst (2432, 34, 35, 38, 45—47, 51, 55—59, 61, 62).

IAȘI. S.m.1. « M. Sadoveanu ». Clasa 8. Costinescu Dumitru (2392, 456, 62, E: 885, 90, 94, 98, 408, 14, 18), Drăgan Rodica (E: 886, 88, 93, 911, 14), Iancu Zissu (2434, 38, 55, 56, 62, E: 902, 03, 05, 12, 14, 19), Sobol Armand (2392, 456, 62, E: 885, 94, 95, 98, 908, 14, 18). Clasa 9. Păuleț Petru (2439, 92, 94, 95, 405, 06, 10, 45, 48, 50, 55, 61—63).

S.m.2. Clasa 10. *Costinescu Anca* (2389, 414, 17, 21, 23—27, 30, 36, 38, 42, 44—48, 50, 53—56, 58, 59, 61—64, 72, 75, 87—90, 93).

S.m.3. « C. Negruzzi ». Clasa 7. Antohi Dan (E: 888, 89, 93, 94, 97, 99—903). Clasa 9. Caşcaval Adrian (2385, 92, 95, 405, 07, 09, 10, 46, 50, 55, 56, 61, 62), Soimaru Iulian (2405—07, 09—11, 45, 52, 55, 61—63, 97). Clasa 10. Homutescu Adrian (2424, 26, 29—31, 39, 44—57, 60—63), Linhordt Haim (2437, 45—49, 52—57, 59, 62, 63), stud. Costovici Gh. (fac. matem). (2392, 95, 404, 07, 08, 16, 45—48, 55—57, 61, 62).

LUGOJ. S.m.1. Clasa 9. Dorohobscki Gh. (2445, 50, 55—57, 61—63, 84, 97, P), Sufană Const. (2445—48, 50, 55—58, 61—63). Abs. Nemeș A. (2417, 18, 20, 44, 45, 47—49, 52—54, 56, 58, 60—64, P), Balintoiu Gh. (2473).

OCNA MUREȘ (Aiud). Clasa 9. Rusu Stefan (2357, 59, 74, 95, 404, 05, 08—10, 14, 38, 45, 46, 55, 59, 61—63, 97).

ORADEA. S.m.1. Clasa 9. Baciu Ioan (2385, 99, 406, 38, 45—47, 51, 55, 57, 58, 64), Cipău Radu (2392, 404, 05, 07, 10, 46, 47, 55, 56, 97), Pop Corneliu (2394, 406, 07, 11, 38, 46, 47, 55, 56, 58, 62, 64).

ORĂŞTIE (Hunedoara). Abs. Toropu Vasile (2392, 95, 404—06, 08, 09, 38, 53, 61).

ORAŞUL STALIN. S.m. 1. Clasa 9. *Stoian Mircea* (2392, 95, 97, 404—11, 14, 15, 19, 20, 24, 31, 32, 38, 44—50, 52—64, 72, 81, 88, 91, 97, 98). Stud. *Ioniţă Tudor* (2382—87, 89—92, 94—420, 22—35, 37—66, 68, 70—99).

PETROŞANI. S.m. 1. Clasa 8. Popescu Gh. (2455, 56, E: 886, 88—90, 94, 98, 911, 18).

PIATRA NEAMŢ. Abs. Munteanu Lelia (2392, 97, 445, 46, 48, 50, 52—56, 58, 62, 63).

PIATRA OLT (Slatina). Abs. *Ghenca Anghel* (2418, 19, 24, 26, 32—34, 38, 42, 44—46, 48—50, 52—63, 72, 75, 77, 78, 81, 88—91, 97—99, P).

PITEŞTI. Clasa 9. Vlăducă Gh. (P), abs. Ghiţulescu Iulian (2446, 47, 49, 54, 58, 72, 76, 77, 83, 88—90, 97, 99).

PLOEŞTI. S.m. 1. « I. L. Caragiale ». Clasa 7. Nicolăiescu Mitrache (E: 885, 86, 88, 89, 91, 93, 94, 96, 98, 911, 18). Clasa 8. Constantinescu Dumitru (2404, 05, 08, 55, 56, P: 886, 93, 911, 14, 18), Daşoveanu Dumitru (2384, 87, 400, E: 886, 89, 94, 909, 11, 17, 18, 90), *Nicolescu Basarab* (2396, 99, 406, 57, 62, 71, 82, 99, 505, 90, 23, E: 897, 901, 02, 08, 12, 15—17, 19, 21—23, 27—34), Timuş Dan (2405, 55, 56, E: 872, 76, 78—81, 83, 84, 86, 88—90, 92, 94, 97, 98, 901). Clasa 9. Bordeanu Const. (2392, 95, 404, 05, 07—11, 45, 48, 55, 56), Crăciun Nicolae (2396, 426, 27, 38, 44, 45, 47—49, 53, 72, 78, 80, 82, 98). Clasa 10. *Baltag Vasile* (2465, 70—73, 76—78, 80—84, 86, 87, 90, 91, 97—500, 03—05, 07—11, 15, 18—20, 22—25, 28—30, 33—35, P), Banu Const. (2392, 94—96, 98, 406, 07, 10, 17, 44, 45, 49, 54), Boboiceanu A. Crişu (2395, 404—11, 48, 49, 52, 54, 57, 61—63), Circiumaru Liviu (2395, 404, 06, 07, 09—11, 14, 45, 48, 49, 52—58, 62, 63, 72), Standrevici Bogdan (2392, 406, 10, 30, 46, 48—51, 53—58, 60—63, 72).

S.m. 3. Clasa 7. Anghel Octavian (E: 888, 93, 94, 99, 900, 02, 03, 08, 09, 12, 13, 16, 19), Anghelescu Mihai (E: 899, 900—03, 05, 08, 09, 11—13, 19), Borceacu Elena (E: 888, 93, 94, 901, 04, 05, 08, 09, 11, 13, 16, 19), Caliniac Nicolae (2431, 44, 48, 74, 88—91), Cristache Paula (E: 886, 88, 89, 901, 02, 04, 11, 13, 15, 16, 19), Dragomirescu Alexandru (E: 888, 93, 94, 900—03, 05, 08, 09, 11, 16), Florovici Mihai (E: 894, 900—05, 07—09, 11, 13, 16), Petraşanu Const. (E: 888, 93, 94, 900—02, 05, 08, 09, 13, 16, 19), Popescu Mihai (E: 888, 93, 94, 97, 900—03, 08, 09, 11—13, 16), Răcăşanu Cornelia (E: 888, 93, 94, 901, 04, 05, 08, 09, 11, 16, 19), Stamatiu Mircea (E: 893, 99, 900—03, 05, 08, 09, 11—13, 16), Vasilescu Dan (E: 887, 89, 92—94, 96, 98—902, 05, 07, 09), Vasiliu Horia (E: 888, 93, 94, 99, 901—03, 05, 08, 09, 11—13, 16, 19). Clasa 10. Andronie Cristina (2387, 95, 406, 07, 09—11, 24, 25, 37, 38, 44, 46, 52, 57, 72), Georgescu Sebastian (2356, 407, 45, 46, 48, 52, 54, 55, 61—63, 72, 83, 87).

PUCIOASA (Ploeşti). Clasa 8. Niculescu Simona (2438, 55, 56, E: 899—903, 08, 09). Clasa 9. Bănescu Steliana (2395, 438, 45—46, 48, 50, 52, 55, 56, 61, 62), Banu Cornel (2438, 44—46, 48, 52, 55, 56, 58, 61, 62), Dragomir Paul (2392, 404—07, 09, 10, 45, 46, 48, 52, 55, 56, 58, 61), Leotescu Petre (2438, 44—46, 48, 52, 55, 56, 58, 61, 62, 97), Miculescu Simona (2438, 55, 56, E: 899—903, 08, 09), Pătulescu Cornelia (2395, 438, 45, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 61, 62), Petrescu Dionisie (2444—46, 48, 49, 52, 55, 58, 61, 62), Petrescu Ion (2438, 44—46, 48, 52, 55, 56, 58, 61, 62), Rîmbu Gh. (2438, 44, 45, 48, 52, 53, 55, 56, 58, 61, 62).

RĂDĂUŢI. Clasa 9. Ionesi Gh. (2405, 07, 09, 10, 38, 45—47, 55, 61, 62), Rusu Ilie (2438, 45—47, 52, 55, 56, 61—63).

REŞIŢA. Clasa 10. Plopeanu Anton (2312, 94, 95, 404, 05, 08, 09, 14, 15, 38, 41, 45, 46, 48, 52, 53, 55—57, 61, 62, P), Tat Mircea (2431, 32, 38, 41, 42, 45, 46, 48, 49, 52—57, 61—63, 89, 90).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa 8. Homentrovski Dorel (2392, 405, 09, 55, E: 840, 86, 89, 93, 98—902, 09, 11). Clasa 9. Băluţă Marian (2392, 95, 404, 05, 08—10, 38, 55, 56, 61, 63). Clasa 10. Berbece Vasile (2385, 92, 408, 10, 45, 52, 56, 61, 72, 87), Milcovici Nic. (2445, 46, 48, 49, 52, 55—57, 61—63, 72, 97, 99), Petrescu Const. (2395, 404, 09, 15, 54, 57, 63, 73, 87, 90), Smărăndescu Petre (2384, 91, 92, 95—97, 400, 04—11, 13, 15), Teodorescu Al. (2384, 91, 92, 95—97, 400, 04—06, 08, 09, 13—15), Tudor D. (2392, 95, 404—11, 15, 44—47, 55).

ROMAN. Clasa 9. Ricinski Cezar (2392, 95, 405, 06, 09, 10, 38, 46, 55, 57, P). Clasa 10. Adiaconiţei Petru (2392, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 45, 47, 55, 56, 62), abs. Tamba Gh. (2395, 404, 05, 07, 09, 10, 13, 34, 38, 44—46, 49, 53, 55, 57, 58, 61, 63).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa 10. Stafiescu Constanţa (2392, 95, 402, 06, 07, 10, 31—33, 38, 46, 48, 49, 52, 53, 55, 57, 61—63).

SATU MARE. Lic. « M. Eminescu ». Clasa 9. Wiesler Horvat (2383, 95, 98, 405—07, 09, 10, 14, 15, 17). Clasa 10. Ferenți Gh. (2395, 404, 08, 12, 14, 15, 17, 48, 49, 52, 53, 62, 63). Miclăuș Ioan (2395, 404, 05, 07, 09, 10, 45, 48, 49, 52—56, 61—63).

SIGHIȘOARA. S.m. germană. Clasa 8. Langa Pompiliu (E: 903, 11, 14, 17, 18, 45, 62, 56, 63), Clasa 10. Schotsch R. (2414, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 57, 62, 63, 73, 81, 87).

SINNICOLAUL MARE (Timișoara). Clasa 9. Röhrich Horst (2438, 44—47, 55—58, 61, 62).

SLOBOZIA (București), S.m. 1. *Tănase Constantin* (2418—20, 31, 33, 38, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 53, 55—57, 61, 62, 72, 77, 87—91, 93, 97, 99).

TECUCI. S.m. 1. Clasa 8. Costea Marin (2400, 38, 62, E: 889, 91, 98, 901, 04, 08, 11), Urtoiu Ermina (2405, 09, 10, 45, 55, 56, 61, 62, E: 893, 94, 909). Clasa 9. Duță Ioan (2392, 404, 06—08, 10, 11, 55, 62, 63, P), Vidrașcu Traian (2404, 14, 25, 34, 45—48, 50, 52, 54—59, 61—63, P).

S.m. 2. Clasa 8. Bujor Marin (2400, 55, 62, 90, 91, E: 886, 89—91, 93, 98—901, 11, 12, 14), Grigoriu Teodor (2438, 55, E: 886, 88, 90, 92, 97, 98, 100, 02, 05, 11), Marinescu Nicolae (2455] E: 884, 87—89, 93, 901, 02, 05, 07, 11), Mihail Scarlat (2438, 41, E: 886, 89—91, 98, 901, 02, 09), Sandu Eugeniu (2438, 55, E: 886—90, 92, 97, 98, 901, 02, 81). Clasa 9. Diaconu Neculai (2404, 05, 08—10, 45, 46, 55, 56, 61—63), Vasilică Const. (2406, 07, 10, 19, 38, 44—46, 48—50, 55, 72, 77, 90, 91). Clasa 10. Catană Costică (2392, 95, 404—11, 14, 17).

TIMIȘOARA. Stud. Cismariu Ionică (Fac. mat. fiz.) (2405, 09, 53—59, 61—63).

S.m. 1. Clasa 8. Pîrvu Dorel (2455, 56, 61, 63, E: 902, 03, 05—07, 11, 14, 17). Clasa 9. Gruiu Aurel (2392, 95, 405—07, 09, 17, 45, 48, 49, 55, 62, 63), Marinescu Dumitru (2392, 95, 405, 06, 09, 09, 46, 55, 56), Toma Corneliu (2420, 24, 34, 38, 43—48, 50—59, 61—63), Zavulan Aurel (2405—07, 10, 27, 32, 45, 46, 48, 55, 62). Clasa 10. *Mihăileanu Const.* (2444—63), Poraicu Theodor (2387, 96, 99, 404—07, 10, 11, 14, 15, 17).

S. m. 3. Clasa 10. Muțaina Doina (2445, 46, 50, 54—57, 61—63).

S. m. 5. Clasa 10. Ghițan Virgil (2404, 06, 08, 09, 48, 50, 52, 54, 61, 62), Grăjdeanu Stelian (2395, 404—09, 48, 50, 52, 54, 62), Ispas Radu (2395, 404—09, 48, 61, 62).

TÎRGOVIȘTE. S.m. 3. Clasa 9. *Cîrnu Mircea* (2347, 53, 56, 78, 83, 84, 92, 94, 95, 404, 05, 07—11, 14, 15, 17, 18, 20, 24, 32—34, 38, 44—48, 50, 52—56, 58, 59, 61—64, 70, 71, 74, 76, 80—82, 85, 87—92, 95, 97, 98).

TÎRGU-JIU. S.m.1. Clasa 7. *Cancer Anca* (2387, 92, 404, 06—08, 13, 20, 38, E:885—44, 96—901, 03, 06—09). S.m.3. Clasa 7. Petrescu Ștefan (2404, E: 885—91, 93, 94, 96—98). Clasa 10. Hoară Horațiu (2426, 38, 54, 70, 72, 80, 81, 83, 87, 90, 91, 97, 98).

TÎRGU MUREȘ. S. m. « F. Bolyai ». Clasa 8. Verga Alexandru (2391, 92, 400, 03, 05, 07—10, E: 885, 86, 88—98). Clasa 10. *Peterfy Attila* (2425, 30, 39, 44—59, 61—64, 70—72, 75—78, 80—84, 87—91, 95, 97—99).

S.m.1. Clasa 8. Antoniuc Bogdan (2404—06, 08, 20, 38, 55, 56, 62—64, E: 890, 903), Neagu Victor (2438, 55, E: 899, 911, 23, 30, 32, 33). Clasa 9. Fleșeriu Călin (2384, 86, 87, 92, 94—97, 99, 400, 03—10, 13, 16), Motronea Valer (2384, 92, 94—96, 400, 03, 05—07, 09, 10, 13), Stan Mircea (2386, 87, 92, 95, 99, 404, 07, 08, 10, 16, 46, 55), abs. *Matei Aurel* (2423—27, 30, 32—39, 44—51, 53—64, 71—85).

TÎRGU-NEAMȚ (Bacău). Clasa 10. *Becupanu Theodor* (2392, 95, 404, 05, 07, 08, 10, 15, 17, 24, 36, 38, 45, 48, 49, 52, 54—59, 61—63, 72, 73, 83, 97, 98).

TURNU SEVERIN. Clasa 10. Caragioiu Mircea (2431, 38, 44, 47, 53, 58, 63, 71, 72, 78, 81, 82, 89, 97, 99), Rusu Const. (2400, 38, 44, 46—58, 63, 71, 72, 97). Sc. prof. anul I. Hotăranu Dumitru (E: 886, 93, 97, 98, 900, 01, 09, 11, 12, 14, 15, 19). Absolvenți: Albu Dumitru (2418, 19, 21, 24, 31, 33, 41, 42, 44, 45, 48, 49, 52, 55—57, 61—63), Petre Titus, caporal (2424, 26, 30, 35, 45, 48, 50, 52—55, 57, P).

ZALĂU. S.m.1. Clasa 10. Mastan Ioan (2424, 44, 45, 47—50, 52—57, 60—63).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă «Redactarea soluțiilor».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957, G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis* volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline, și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat *generalizări* și observații interesante sub formă de *note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor *de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a *«Olimpiadelor de matematică și de fizică»* pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei se vor *face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

—Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARCUŞEVICI	Şiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerile lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. ŞOMINSKI	Metoda inducţiei matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităţilor.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARCUŞEVICI	Arii şi logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice şi alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime şi minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele şi observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calculul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVŢEV	Experienţe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente de teoria congruenţelor de drepte.
20. GH. ŢIŢEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuaţilor diferenţiale.
22. NICOLAE STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORŞ	Noţiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate

C. 617. — Întreprinderea Poligrafică nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1120 d

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII — august 1957

8

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VIII, nr. 8 — august 1957

SUMARUL

Pag.

1. *« 23 August » 1957* 393
2. *Sistemele de numeraţie şi mijloacele de calcul, de Florea Gh. Neagu* 394
3. *Descoperirea şi proprietăţile particulelor elementare noi, de Claudiu Orşivski* 402
4. *O relaţie între numerele întregi neprime şi progresii aritmetice de prof. univ. I. Voicu* 407
5. *Phytotronul — aport preţios al fizicii în domeniul agrotehnicii de conf. univ. V. Pavlu* 409
6. *Caleidoscop fizic* 411
7. *Probleme rezolvate (1959; 2017; 2166; 2218; 2219; 2237; 2244; 2266; 2292; 2295; 2297; 2299; 2303; 2306; 2315; 2317; 2321; 2323; 2339; 2387; E: 852; 855; 866; 871)* 415
8. *Probleme propuse (2737 — 2771).* 432
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 984—1012)* 436
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme.* 439

Anul VIII — 8 — august

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovan A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ. redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.** conf. univ.

REDACŢIA; Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articole, note, recenzii, probleme propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia G.M.F.-B se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Múzeum Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VIII Nr. 8 august 1957

«23 AUGUST 1957»

SE împlinesc 13 ani de cînd, datorită ofensivei eliberatoare a Armatelor Sovietice pe teritoriul ţării noastre, Partidul Comunist Romîn a înfăptuit acţiunea coordonată a forţelor patriotice populare şi soldaţilor, ofiţerilor şi grupurilor patriotice din armată, acţiune care a dus la ieşirea din războiul hitlerist.

Ziua de 23 August, a devenit marea sărbătoare naţională a poporului nostru, ziua eliberării Romîniei de sub jugul fascist. Ea constituie expresia hotărîrii neclintite a poporului de a lua în propriile mîini soarta sa şi viitorul patriei.

În această zi, oamenii muncii din ţara noastră, au prilejul să treacă în revistă succesele obţinute în opera de construire a socialismului, au prilejul să facă bilanţul realizărilor.

Deşi 13 ani reprezintă o perioadă scurtă în viaţă unui popor, totuşi sub înţeleapta conducere a partidului, s-au înfăptuit transformări revoluţionare cu uriaşe repercursiuni pe tărîm politic, economic şi social, ceea ce constituie o vie ilustrare a forţei creatoare a poporului nostru, care s-a smuls din lanţurile exploatării. Entuziasmul şi avîntul cu care oamenii muncii din patria noastră întîmpină ziua de 23 August 1957 sînt o mărturie vie a încrederii în tăria şi înţelepciunea partidului, forţa călăuzitoare în lupta pentru construcţia socialistă a ţării.

În cei 13 ani de la eliberare, ţara noastră a străbătut un drum uriaş devenind dintr-o ţară « eminamente agricolă », o ţară industrial-agricolă în plină dezvoltare. Întreaga faţă a patriei noastre s-a schimbat, transformîndu-se într-un imens şantier al construcţiei paşnice, al unei vieţi noi, socialiste. Succesele istorice obţinute în ultimii ani pentru transformarea radicală a economiei ţării pe drumul industrializării şi dezvoltării tuturor ramurilor de activitate sînt rezultatul politicii partidului, care are la bază învăţătura marxist-leninistă şi foloseşte în mod creator experienţa glorioasă a Partidului Comunist al Uniunii Sovietice.

Astfel, o deosebită dezvoltare a luat industria construcţiilor de maşini şi de prelucrare a metalelor. S-a creat şi dezvoltat în anii regimului democrat-popular industria electrotehnică, capabilă să producă o gamă largă de produse electrotehnice necesare industriei, agriculturii, necesităţilor de viaţă şi cultură a oamenilor muncii, se înfăptuieşte cu succes planul de electrificare a ţării, a fost realizată în ţara noastră prima staţie de televiziune. Dezvoltarea industriei grele a făcut cu putinţă înzestrarea industriei uşoare şi alimentare, şi pe această bază, creşterea producţiei bunurilor de larg consum. S-a întărit baza tehnică materială a agriculturii noastre, se întăreşte permanent sectorul socialist în agricultură. Ţării

noastre i se deschid largi perspective de dezvoltare a cercetărilor de fizică atomică datorită construirii reactorului nuclear și a acceleratorilor de particule din cadrul Institutului de Fizică Atomică al Academiei RPR.

În fiecare an, crește nivelul de trai al celor ce muncesc. Statul cheltuiește sume importante pentru asigurări sociale, ocrotirea sănătății, odihna oamenilor muncii etc.

Paralel cu revoluția politico-economică s-a realizat revoluția culturală. Reforma învățămîntului din august 1948 a marcat hotarul dintre școala veche burgheză și școala nouă, a regimului nostru democrat popular.

Prin reforma învățămîntului, prin școală, au fost larg deschise porțile culturii poporului muncitor, s-a rezolvat pozitiv problema școalei în limba maternă pentru minoritățile naționale, învățămîntul a devenit realist-științific, curățit de misticism, constituind unul din factorii importanți ai construcției socialismului.

De la reforma învățămîntului noua școală a înregistrat continuu progrese atît în ce privește baza materială, cît și în ce privește conținutul și calitatea învățămîntului.

Ca urmare a dezvoltării continue a învățămîntului a luat o mare dezvoltare construcția de localuri pentru școli, instituții de învățămînt superior, internate și cămine.

*Sărbătorind cea de a 13-a aniversare a eliberării patriei noastre, cadrele didactice se pregătesc să înceapă cu forțe sporite un nou an școlar, hotărîte să traducă în viață directivele privitoare la învățămînt **adoptate de Congresul al II-lea al P.M.R., să înfăptuiască învățămîntul politehnic,** condiție esențială pentru realizarea educației comuniste a elevilor.*

Marea sărbătoare națională a poporului romîn va fi întîmpinată de către toți lucrătorii din învățămînt, profesori și elevi — ca dealtfel de toți oamenii muncii — cu noi succese în muncă, pentru o viață nouă și fericită al cărui drum luminos a fost deschis de 23 August.

SISTEME DE NUMERAȚIE ȘI MIJLOACELE DE CALCUL

FLOREA GH. NEAGU, student Leningrad

SISTEMUL de numerație binar pe care filozoful Leibniz (1646—1716) îl prețuia mult este apreciat în ultima vreme, în mod deosebit. Este vorba de prioritatea aritmeticii binare în construirea și exploatarea mașinilor universale de calcul cu memorie; mai mult, sistemul de numerație binar ocupă un loc central în teoria informației, respectiv cibernetica este direct interesată în folosirea acestui sistem de numerație.

Practica ultimilor ani în domeniul ciberneticii tehnice confirmă importanța sistemului binar de numerație. Se pune întrebarea: dacă sistemul binar este atît de recunoscut, de ce în viața curentă nu se introduce această aritmetică. Istoria e cea mai indicată a ne da răspunsul corespunzător.

E neîndoielnic faptul că a fost o vreme cînd în conștiința oamenilor, în sens istoric, nu exista noțiunea de număr. Apariția acestei noțiuni a reprezentat un salt serios în sensul abstractizării și generalizării lumii exterioare, în sensul cunoașterii.

Numărul este baza matematicii contemporane și după cum am amintit reprezintă un rezultat al abstractizării cantitative. Numărul nu depinde deci,

de loc de proprietățile specifice ale obiectelor considerate și nici de semnele folosite pentru reprezentarea acestui număr. Pentru operațiile efectuate cu numerele ca noțiuni abstracte se cere materializarea într-un oarecare sens a acestor noțiuni abstracte. În acest scop în decursul vremurilor oamenii au recurs la diferite mijloace (bețișoare, pietricele, răbojuri, jetoane, mașini de calcul etc.).

Partea descriptivă a acestor mijloace este destul de interesantă, de data aceasta nu ne preocupă însă. Ne interesează o altă latură a reprezentării numerelor: e vorba de sisteme de numerație și de baza acestor sisteme.

Ne-am obișnuit a reprezenta numerele cu ajutorul semnelor scrise — cu simboluri. E necesar însă, să facem distincție bine conturată între număr și simbolul de care ne folosim în reproducerea în scris a acestui număr (adică între numărul abstract cinci și semnele corespunzătoare în scrierea lui: arabii scriu 5, romanii scriau V, slavii vechi ѕ.

În sistemul nostru zecimal, zero și nouă numere întregi din șirul natural se înseamnă, după cum știm, cu semnele arabe 0, 1, 2, ..., 9. Numerele mai mari decît zece, cum ar fi «șapte sute patruzeci și doi» se reprezintă astfel:

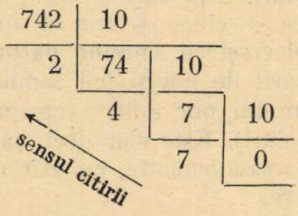
$$700 + 40 + 2 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

și în sistemul zecimal scriem: 742.

Esențialul în cazul de față este faptul că valoarea de număr a cifrelor 7, 4, 2 depinde de poziția pe care o ocupă în șirul reprezentat. Dacă schimbăm locul cifrei 7 și 2 obținem 247 ceea ce înseamnă cu totul alt număr. Avem deci, de a face cu un criteriu pozițional de reprezentare a numărului scris. Folosind criteriul pozițional de reprezentare a numerelor în scris avem posibilitatea să reprezentăm orice număr din șirul natural cu ajutorul numai a zece semne în diferite combinații. Regula generală de reprezentare a oricărui număr în sistemul pozițional cu baza zece se poate da sub forma:

$$Z = a_1 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n \cdot 10^1 + a_{n+1} \cdot 10^0,$$
$$0 \leqslant a \leqslant 9.$$

Numărul Z în acest caz se va scrie: $a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$. Observăm în treacăt că $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ nu reprezintă altceva decît resturile împărțirii numărului Z la zece, la baza numerației respective.



Așadar, oricare ar fi numărul putem să-l scriem sub forma

$$Z = a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n \cdot 10 + a_{n+1}.$$

De aici e clar că numărul zece reprezintă în acest sens, baza numerației folosită de noi.

Pe de altă parte este iarăşi evident că putem considera sisteme de numeraţie cu orice bază (număr întreg şi mai mare ca unitatea). În sistemul septimal de pildă, orice număr poate fi reprezentat astfel:

$$Z_7 = a_1 \cdot 7^n + a_2 \cdot 7^{n-1} + a_3 \cdot 7^{n-2} + \ldots + a_n \cdot 7^1 + a_{n+1} 7^0$$

unde a poate lua valori întregi între zero şi şase. În acest sistem vom reprezenta numărul, la fel,

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1}.$$

Numărul «o sută nouă» în sistemul septimal, însemnat cu cifre arabe se va scrie 214, pentrucă:

$$109 = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0,$$

109	7		
4	15	7	
	1	2	7
		2	0

sensul citirii

adică: $109_{10} \longleftrightarrow 214_7$.

Cititorul poate încerca, ca exerciţiu, să deducă scrierea oricărui număr din sistemul zecimal în orice sistem doreşte; dacă baza aleasă este mai mică decît zece, atunci se pot folosi semnele arabe, în cazul că baza aleasă este mai mare decît zece, atunci este nevoie de semne proprii de reprezentare.

În lumina acestor exemple se poate vedea că putem construi sisteme de numeraţie în orice bază (de la 1 la ∞). Toate aceste sisteme de numeraţie posibile, în diferite baze, vor fi poziţionale, însemnătatea simbolului ca număr (cantitate) depinde de poziţia pe care o ocupă în şirul considerat.

În afară de sistemul poziţional de reprezentare a numerelor, asupra căruia vom reveni, există sistemul aditiv. Istoria cunoaşte multe exemple de reprezentare a numerelor în acest sistem: la egipteni, la evrei, la greci, la romani — care ne-au lăsat ca moştenire «cifrele romane» — precum şi la alte popoare. Sistemul aditiv, spre deosebire de cel poziţional, cere pentru fiecare număr din şirul natural, semnul său de reprezentare.

«CXVIII» în scrierea aditivă pe care o găsim pînă astăzi — cea romană — însemnează «o sută + zece + cinci + unu + unu + unu», adică 118. Cu cît ne îndepărtăm în sensul creşterii rîndului natural al numerelor, cu atît se măreşte necesitatea inventării de noi şi noi semne de reprezentare a numerelor. Inconvenientul sistemului pur aditiv reprezintă circumstanţa mulţimii neliminate de semne (simboluri). Este clar deci, că dacă pentru reprezentarea numerelor există suficiente inconveniente, cu atît mai mult pentru efectuarea operaţiilor cu aceste numere.

În astfel de sisteme de reprezentare a numerelor (în genul sistemului aditiv roman) procedura operaţiilor cu numerele ar fi fost îngreunătoare (de multe ori imposibilă) nu numai pentru practica generală, dar chiar pentru matematicienii profesionişti.

Aşa dar, pentru sistemele aditive de reprezentare a numerelor, principalul este neoperativitatea specifică lor. Din cauza aceasta practica a renunţat de multă vreme la astfel de sisteme. În locul sistemului aditiv a apărut sistemul

poziţional (acolo unde primul a existat) — operativitatea fiind criteriul hotărîtor pentru alegerea unui sistem sau altul.

Trebuie subliniat că sistemul aditiv n-a fost dezrădăcinat fără urme, acolo unde este comod, el există.

Încă în evul mediu se foloseau jetoanele pentru socoteli aritmetice. Aceste jetoane se aranjau pe table speciale şi în mîna specialiştilor erau folosite la rezolvarea problemelor destul de complexe. Folosirea jetoanelor pentru socoteli este astăzi înlocuită cu metode scrise sau cu metode de modelare (maşini de calculat pe principiul continuu).

Încă în veacul al XVIII, după mărturisirile lui Buffon, în Franţa, jetoanele erau larg folosite. Acum e greu de înţeles scena din comedia lui Molière « Bolnavul închipuit » (Le malade imaginaire), cînd Argan corectează cu jetoanele în mînă pe farmacistul său. Socotelile cu bile sînt cunoscute şcolarilor încă din prima clasă de învăţămînt (Romînia, Rusia etc.). Bilele sînt folosite nu numai în scopuri pedagogice, ci sînt răspîndite în producţie (în instituţii de contabilitate, comerciale, administrative). „Конторские счеты" sînt nelipsite din birourile (конторы) sovietice.

★

Scrierea poziţională sau indiană — cum o mai numesc unii autori — a numerelor şi efectuarea operaţiilor aritmetice în consecinţă, a apărut în Europa în evul mediu, în secolul XV, fiind folosită de toţi filozofii şi matematicienii europeni. În acele vremuri, cu toate că se foloseau cifrele arabe, operaţiile cu cifrele se efectuau după o mulţime de instrucţiuni scrise. Cu excepţia operelor lui Euclid, învăţaţii antici n-au lăsat pentru moştenitori învăţături terminate în domeniul operaţiilor cu numere. În traducerea aritmeticii lui Nicomah, făcută de către Boetius din greceşte, nu există nicio demonstraţie, totul se reduce la exemple particulare. Dacă începînd din evul mediu, sistemul poziţional a fost în general acceptat, se pune întrebarea, de ce matematica s-a oprit la baza zece de numeraţie şi nu la altă bază. Importanţa cifrei zece are rădăcini cu totul îndepărtate în istoria civilizaţiei şi nu încape îndoială că alegerea numărului zece ca bază este legată de existenţa a 10 degete la mîini, cu ajutorul cărora oamenii au socotit. Chiar azi este greu de găsit om care să-şi fi început « studiile » matematice fără să fi socotit pe degete.

O mulţime de fapte indică însă, existenţa şi a altor sisteme de numeraţie, În China, în timpurile îndepărtate se folosea sistemul binar (—, ⊟ . .). linia constituind semnul existenţei, iar punctele reprezentînd cele două capete ale liniei care nu există, cu un cuvînt « da » şi « nu », sau cum se obişnuieşte în terminologia de calcul modernă 1, 0.

Leibnitz a fost tare dezamăgit cînd a aflat de la un prieten orientalist care i-a scris din China, că aritmetica binară pe care Leibnitz o socotea proprie născocire, era folosită încă din vechime de chinezi.

În limbile engleză şi germană, spre exemplu, cuvintele care însemnau « unsprezece » şi « doisprezece » nu sînt constituite pe baza numeraţiei zece; din punct de vedere linguistic sînt independente de cuvîntul zece. Se poate vorbi deci, de o bază de numeraţie duodecimală (0, 1, 2, . . ., 9, 10, 11, 12) fapt care pe mulţi i-ar face să creadă că în ajutorul socotitorului cîndva, pe lîngă cele zece degete de la mîini au venit spre a completa arsenalul de calcul şi cele două picioare.

În limba franceză, cuvintele care înseamnă 20 şi 80 precum şi 90, ne permit să presupunem existenţa unui sistem de numeraţie în baza douăzeci.

Spre aceiaşi idee ne îndeamnă şi cuvîntul « pol » în romîneşte. În limba daneză, « halvfirsindstyve », care însemnează şaptezeci, literalmente se traduce « jumătate de drum de la trei ori douăzeci pînă la patru ori douăzeci ».

Aceste exemple ne conduc la concluzia că existenţa numeraţiei cu baza douăzeci este neîndoielnică; iar faptul că această bază nu se întîlneşte la popoarele care au trăit în condiţii climatice reci ne face să credem că cele zece degete de la picioare, adăugate la cele zece de la mîini poartă vina existenţei bazei de numeraţie douăzeci.

Astronomii babilonieni în parte, se foloseau de sistemul (sexagesimal) sexazecimal (baza 60). Se presupune că în această circumstanţă trebuie căutată explicaţia faptului că unităţile de timp, ora, minutul şi unităţile de arc ca, gradul, minutul, se împart la 60.

În orice sistem de numeraţie cu caracter poziţional regulile de operaţii sînt de sigur, aceleaşi. Tabla adunării şi cea a înmulţirii vor diferi formal de la sistem la sistem. Neobişnuinţa cu alte sisteme decît cel zecimal ne face să credem că ar fi greu de operat în altă bază decît zece. Faptul că în vremurile noastre, marea majoritate a operaţilor cu cifre se face în baza zece se datoreşte, după cum am mai spus, numai împrejurărilor istorice.

Practica ultimului timp arată că necesitatea operativităţii şi marilor viteze în tehnica de calcul, în automatică şi telemecanică, în cibernetica tehnică, a învins inerţia tradiţiei şi, acolo unde este indicat, a înlocuit sistemul de numeraţie în baza zece cu un alt sistem — în particular, cu sistemul binar (baza 2).

Baza de numeraţie 2 nu s-a ales desigur, la întîmplare. Înainte de a vorbi despre avantajele acestui sistem pentru automatică şi cibernetică este bine să exemplificăm identitatea operaţiilor cu numere în orice bază de numeraţie. Pentru a nu ne îngreuna reprezentarea scrisă a numerelor ne vom folosi de scrierea arabă, considerînd o bază mai mică decît zece pentru a avea suficiente semne. Fie ea, 7.

Vom efectua adunarea şi înmulţirea în baza de numeraţie poziţională 7.

Adunare

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

Inmulţire

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Tot în baza şi reprezentarea adoptată, vom înmulţi numerele 265 cu 24, ceea ce în sistemul zecimal se scrie $145 \times 18 = 2610$.

$$\begin{array}{r} 265 \\ 24 \\ \hline 1456 \\ 563 \\ \hline 10416 \end{array} = 1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0.$$

Numărul 10416 din sistemul septimal se scrie în sistemul zecimal, 2610.

Exemplul particular de mai sus ne arată că regulile operațiilor cu numere sînt aceleași pentru orice bază de numerație. Pentru sistemul de numerație cu baza 2, care este folosit în ultima vreme în teoria informației și în cibernetică, sînt valabile aceleași reguli. Sistemului de numerație binar i se dă atîta atenție datorită avantajelor sale față de celelalte sisteme în ceea ce privește cerințele progresului științific. Mijloacele moderne de calcul sînt construite pe baza numerației binare. Aceasta înseamnă că sistemul binar este cel mai operativ și cel care dă cele mai puține erori.

Înainte de a trece la examinarea celor două condiții de eficacitate ale numerației binare, adică în ce măsură acest sistem satisface condiția de operativitate și de minim de erori, trebuie amintite cîteva elemente din teoria informației. Operativitatea unui mijloc de calcul sau de informație este cantitatea de operații, respectiv, informații pe care le dă mijloacele respective în unitate de timp. Această caracteristică depinde nu numai de viteza de lucru a aparatului ci și de principiul de traducere și analiză a noțiunilor și operațiilor abstracte cu care lucrează aparatul considerat (transmisii-radio, transmisii codate, programele pentru automate de cibernetică etc.).

Pentru mai multă claritate amintim că pentru operativitatea transmiterii unei telegrame nu este suficient să folosim aparatul electromagnetic al telegrafului (care are viteza impulsului maximă posibilă), ci și de traducerea rațională a telegramei în limba telegrafului (a telegrafului Morse).

Este cunoscut faptul, că alfabetul Morse a fost inventat pentru limba engleză în care litera e este cea mai frecventă (și în limba romînă litera cea mai frecventă este *e*) și a fost însemnată în acest alfabet cu un punct pentru a ocupa cît mai puțin aparatul — în favoarea operativității. Este clar deci, că dacă s-ar însemna litera *e* în «limba telegrafului» cu cîteva linii și puncte (la care s-ar adăuga și pauzele respective între semne) telegraful englezesc ar transmite în unitate de timp mult mai puține telegrame decît în alfabetul adoptat (Morse). Faptul că alfabetul Morse a fost adoptat fără schimbări pentru limba rusă, spre exemplu, unde succesiunea literelor după frecvența lor este alta decît în limba engleză (în limba rusă cea mai frecventă literă fiind *o*, ocupă mai mult telegraful decît *e*) duce la micșorarea operativității telegrafului în limba rusă. Așadar, codificarea informației influențează direct operativitatea mijlocului de informație.

O primă și nemijlocită concluzie de aici este faptul că fiecare limbă trebuie să-și adopte alfabetul propriu de telegraf, «Morse național», adică literelor celor mai des întîlnite să le corespundă cele mai scurte semne, în prealabil stabilindu-se frecvența literelor în limba respectivă.

Pentru mijloacele moderne ale ciberneticii, cea mai efectivă traducere este cea discretă, spre deosebire de modelarea care este de asemenea folosită în mijloacele de calcul. Exemplu de aparate de calcul construite pe principiul modelării poate servi rigla de calcul, unde mărimile abstracte se traduc în lungimi. În unele mașini electrice, unde mărimile se traduc în tensiuni sau curenți, avem de-a face cu modelarea electrică. Principiul modelării se mai numește și principiul acțiunii continui, spre deosebire de principiul discontinuu sau discret; pe ultimul se bazează mașinile universale (cu cifre) de calculat cu memorie. Operativitatea mașinilor universale este asigurată de viteza curentului electric și de lipsa de inerție a celulelor electronice pe deoparte, iar pe de altă parte, de caracterul discret al operațiilor în aceste mașini. Cu

un exemplu concret vom încerca să lămurim avantajul principiului discret față de cel continuu.

Problema: să se măsoare tensiunea unui generator electric care se găsește la distanță de aparatul de măsurat (voltmetru). Precizia ± 1 V. Aceasta reprezintă un tip cunoscut de probleme de telecomandă. Neglijînd căderea de tensiune pe fir vom măsura tensiunea cu un voltmetru care din punctul acesta de vedere este un aparat de măsurat construit pe principiul modelării (continuu) (fig. 1). Pe voltmetru se vede că tensiunea este cuprinsă între 100 V și 150 V, precis însă nu se poate spune; citiri vor fi multe: 105 V, 108 V, 109 V, 110 V, 120 V etc. Deci, în măsurătoarea de față există multă subiectivitate. Vom repeta măsurătoarea cu un aparat de măsură cu caracter discret. Aceasta înseamnă, că vom pune întrebarea: — Există 100 V? Răspuns: — da! Există 200 V? Răspuns: — nu! Pentru noi e clar că tensiunea generatorului este cuprinsă între 100 V și 200 V. Micșorînd treapta de măsurare și repetînd această operație de întrebare și răspuns vom ajunge la concluzia că tensiunea este cuprinsă între 105 V și 110 V. Alegînd ultima treaptă (diviziune) de 1 V vom primi informația că 108 V există și că 110 V nu există. Avînd în vedere condiția problemei unde precizia este de ± 1 V ne putem mulțumi cu valoarea 108 V sau 109 V. Dacă dorim precizie mai mare putem repeta operațiile pînă la treapta de precizie dorită. Pe baza principiului discret precizia poate fi oricît de mare, spre deosebire de principiul continuu care limitează precizia la nivelul valorii ultimii diviziuni de pe cadran (indicată de scară).

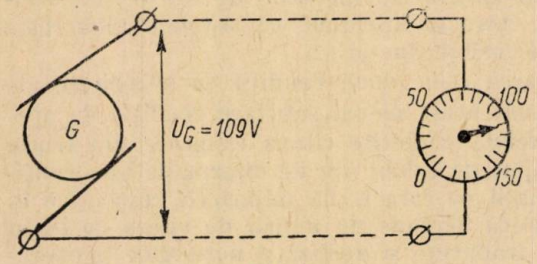


Fig. 1

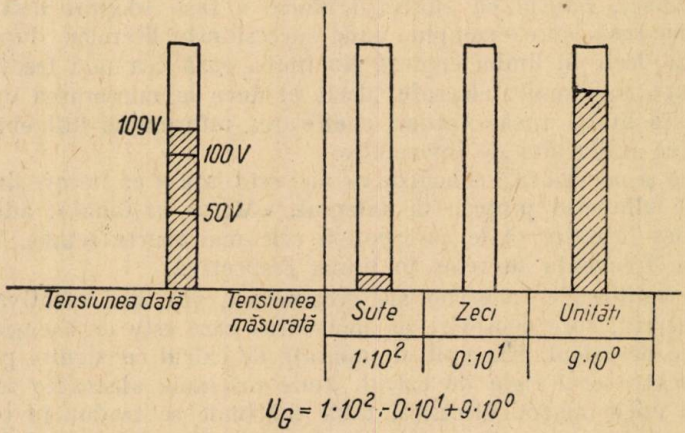


Fig. 2

În graficul alăturat, în stînga, este reprezentată măsurătoarea cu aparatul de modelat bazat pe principiul continuu, iar în dreapta, principiul discontinuu (discret) cu zece diviziuni în fiecare grupă (grupa unităților, a zecilor, a sutelor) — sistem zecimal (fig. 2).

Folosind tot reprezentarea grafică, vom scurta raționamentul prin reprezentarea măsurătorii în sistemul binar, urmînd ca la sfîrșit să subliniem precizia acestui sistem.

În timp ce reprezentarea zecimală are zece poziții posibile pentru fiecare grupă (pentru grupa zecilor, sutelor etc.), reprezentarea binară are numai două poziții posibile pentru fiecare grupă («este» și «nu este», «da

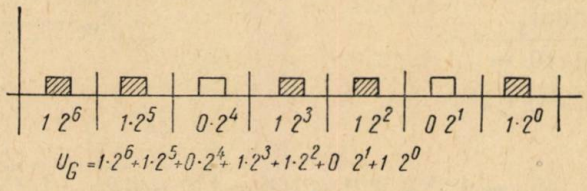


Fig. 3

și «nu»). Pentru prima dată vom observa că în timp ce în sistemul zecimal avem probabilitatea erorii proporțională cu zece, în sistemul binar probabilitatea erorii este cea mai mică posibilă.

Acest lucru este riguros demonstrat de teoria informației, unde teorema entropiei informației (teorema lui Shannon [5], dă acestei noțiuni forma funcției logaritmice, entropia sau conținutul de informații fiind cel mai mare atunci cînd baza logaritmului va fi cea mai mică, adică doi. Această teoremă este unul din argumentele teoretice de bază în favoarea sistemului de numerație în bază 2.

În afară de argumentele teoretice oferite de teoria informației, au fost aduse și confirmări practice tot în favoarea sistemului de numerație binar — ca cel mai efectiv sistem pentru mijloacele moderne de calcul și dirijare. Sistemul nervos uman lucrează pe baza «da» și «nu», aceasta constituind pentru N. Wiener, o confirmare serioasă a concluziilor lui teoretice în domeniul cibernetici, al cărei fondator este considerat.

Așadar, mașinile de calculat universale (cu cifre), mașinile cu program de dirijare a anumitor procese logice, rezolvă probleme complicate reducîndu-le la operații cu cifre. Sistemul de numerație în aceste mașini are baza 2, ceea ce dă posibilitatea acestor mașini să lucreze cu minimum de greșeli și maximum de operativitate, aceasta din urmă fiind un rezultat al vitezei proceselor electrice. Mașina reduce toate operațiile cu mărimi și funcții la însumare (scăderea fiind însumare cu sens schimbat, înmulțirea — adunare succesivă, împărțirea — inversul înmulțirii sau scădere succesivă, integrarea — adunare etc.).

Din punct de vedere teoretic, sistemul pozițional binar se deosebește de celelalte sisteme prin aceea că are baza cea mai mică. În reprezentarea arabă vom avea: 0,1. Operațiile în aritmetica binară se reduc la două reguli:

$$1 + 1 = 10 \quad \text{și} \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

În viața și practica curentă această bază nu poate fi folosită din cauza marelui volum de operații și expresii; 79 în sistemul binar se va scrie 1001111,

$$79 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0.$$

Desigur că viteza impulsului nervos (8 m/s) nu poate asigura operativitatea acestui sistem pentru a fi introdus în folosința generală. Pentru mașinile

electronice însă, care practic, sînt lipsite de inerţie şi au viteza impulsului maximă posibilă, volumul expresiilor nu este un impas.

În încheiere vom da cîteva exemple de operaţii cu sistemul poziţional cu baza 2 *).

Adunare

5_{10} ——— 101_2
9_{10} ——— 1001_2

$14_{10} \longleftrightarrow 1110_2 =$
$= 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$

Inmulţire

5_{10} ——— 101_2
9_{10} ——— 1001_2

101
000
000
101

$45_{10} \leftarrow 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.21 + 1.2^0 = 101101$

BIBLIOGRAFIE

1. Поль Таннери, *Исторический очерк развития естествознания в Европе*, Москва. (Traducere din limba franceză)
2. Ampère A. M., *Essai sur la philosophie des sciences*, seconde partie, Paris 1848.
3. Courant R., Robbins G., *Mathematics*, New-York, 1943.
4. Wiener N., *Cybernetics*, New-York, 1948.
5. Shannon C. E., *A mathematical theory of communication*, Bell System, Tehnical Journal, v. 27, 1948.
6. Харткевич А. А., *Очерки общей теории связи*, Москва, 1955.
7. Kolman E., *Ce este cibernetica*. Probleme de filosofie, 4/1955.

DESCOPERIREA ŞI PROPRIETĂŢILE PARTICULELOR ELEMENTARE NOI

CLAUDIU ORŞIVSKI, profesor Tecuci

În ultimii ani fizica atomică şi în special fizica nucleului s-a dezvoltat uimitor de repede, acumulînd date şi cunoştinţe într-un număr extraordinar de mare. Datorită metodelor moderne de cercetare, care folosesc aparate perfecţionate, a fost posibil să se construiască o bază experimentală solidă, pe care se sprijină teoria atomului şi nucleului.

Fizicienii sovietici deţin iniţiativa în numeroase ramuri ale fizicii nucleare şi scot la lumină chiar în zilele noastre fapte de importanţă covîrşitoare mai ales în domeniul noilor particule elementare, a căror existenţă a fost dovedită în ultimii ani. Acest capitol al fizicii se dezvoltă sub ochii noştri şi desigur nu va trece mult pînă cînd structura nucleului şi fenomenele ce se petrec în el să fie complet clarificate.

Pînă acum cîteva decenii era unanim recunoscut, că electronul, protonul şi apoi neutronul sînt particule elementare din care este construită materia întregului univers. Cu timpul s-au descoperit însă, alte particule care au modificat concepţiile asupra structurii materiei.

*) Indicele inferior indică sistemul de numeraţie.

Pentru o prezentare rezumativă a descoperirilor şi proprietăţilor noilor particule, trebuie să amintim în cîteva cuvinte despre o radiaţie descoperită în ultimul timp şi cunoscută sub numele de radiaţie cosmică, al cărui studiu a dus la multe descoperiri importante. Se ştie azi, că asupra pămîntului cade permanent un flux de particule care produc în atmosferă fenomenul ionizării. Pentru studierea acestor radiaţii s-au efectuat numeroase ascensiuni în straturile înalte ale atmosferei, începînd cu fizicianul Gockel (1909), apoi Hess şi Kohlhörster (1911—1914). Mai tîrziu Millikan a lansat balonul sondă prevăzut cu aparate înregistratoare; trebuie să amintim de ascensiunea eroică a lui Prokofiev şi alţi colaboratori sovietici care în 1933 s-au ridicat la înălţimea de 19.000 m. Misovski, Turim şi Verigo au studiat efectul acestor radiaţii în ape şi sub gheţari, obţinînd date preţioase asupra naturii lor.

În primul rînd, razele cosmice au origina în afara sistemului solar, sînt formate din particule foarte penetrante de energii foarte mari. Ele sînt încărcate cu electricitate, lucru dovedit prin aceea că sînt deviate de cîmpul magnetic al pămîntului (experienţele lui Compton-Turner — 1936 — precum şi a lui S. N. Vernov).

Experienţele lui S. N. Vernov din 1948—1950, au dovedit că razele cosmice care pătrund în straturile superioare ale atmosferei sînt particule încărcate pozitiv şi sînt, în marea majoritate, protoni. Această radiaţie s-a denumit primară. S-a constatat mai tîrziu că în razele cosmice primare se întîlnesc nuclee rapide de heliu, precum şi nuclee ale altor elemente noi, grele, posedînd de asemenea energii foarte mari.

Problema esenţială în cercetări a fost determinarea naturii particulelor care ajung la suprafaţa pămîntului, denumite raze cosmice secundare, particule care au proprietăţi diferite de cele ale radiaţiei primare.

În cercetările sale, A. Anderson a folosit metoda fizicianului sovietic D. V. Scobelţîn, care a întrebuinţat primul (1926) camera Wilson în cîmp magnetic.

Camera Wilson folosită de Anderson, a fost aşezată în cîmp magnetic foarte intens (24 000 Oe). Anderson a obţinut numeroase fotografii şi a observat pe acestea urmele unor particule care au trecut printr-o placă de plumb, fiind astfel deviate de cîmpul magnetic, încît rezulta că o particulă are o sarcină pozitivă. Impulsul măsurat arată clar că aceasta nu este un proton cum s-a crezut iniţial, ci o altă particulă cu masa egală cu aceea a electronului şi în felul acesta s-a descoperit o particulă nouă care a fost denumită *pozitron* (1932).

Existenţa pozitronului a fost dovedită şi pe cale de laborator de către Frederic şi Irène Joliot-Curie, la interacţiunea unui foton cu energie mai mare de 1,02 MeV cu un nucleu, fenomen care duce de obicei la formarea unei perechi electron-pozitron.

Studiindu-se repartizarea energiilor s-a observat că din energia totală ($h\nu$) a fotonului, 1,02 MeV a fost cheltuită pentru formarea perechii electron-pozitron, iar restul reprezintă energia cinetică a perechii, precum şi energia de recul.

Urmele celor două sau trei particule rezultate se văd clar în numeroasele fotografii obţinute în camera Wilson. O pereche electron-pozitron poate da fenomenul de anihilare cu emisia a unui sau doi fotoni.

În afară de naşterea pozitronului cu ajutorul unei radiaţii (cosmice sau γ) aceste particule apar şi la bombardarea unor substanţe (bor, aluminiu ş. a.)

cu particule α de mare energie. După bombardare se constată că emisia pozitronilor continuă un timp relativ îndelungat. Acest fenomen, descoperit de Frederic şi Irène Joliot-Curie în 1934, a fost denumit radioactivitate artificială.

Fenomenul se explică prin aceea că în timpul bombardării nucleele sufăr o transmutaţie, nucleele rezultante emiţînd apoi electroni pozitivi sau negativi; ele sînt radioactive, adică sufăr o dezintegrare β^+ (sau e^+) sau o dezintegrare β^- (sau e^-).

Cîteva exemple de transmutaţii nucleare cu emisie de electroni pozitivi. Izotopii ${}_7N^{12}$, ${}_7N^{13}$, ${}_9F^{17}$, ${}_9F^{18}$ sînt instabili şi se dezintegrează după schemele

$$
\begin{aligned}
{}_7N^{12} &\rightarrow {}_6C^{12} + e^+ + \nu \\
{}_7N^{13} &\rightarrow {}_6C^{13} + e^+ + \nu \\
{}_9F^{17} &\rightarrow {}_8O^{17} + e^+ + \nu \\
{}_9F^{18} &\rightarrow {}_8O^{18} + e^+ + \nu
\end{aligned}
$$

Se vede că după transmutaţii iau naştere izotopii ${}_6C^{12}$, ${}_6C^{13}$, ${}_8O^{17}$, ${}_8O^{18}$, care sînt elemente stabile. Alături de acestea se formează nişte particule noi: ν numite *neutrino*, despre care va fi vorba mai departe.

În general, pentru emisia pozitronilor avem schema:

$$
{}_ZX^A \rightarrow {}_{Z-1}Y^A + e^+ + \nu.
$$

Se ştie că pozitronii nu există nici în nucleu, nici în învelişul electronic, ei se creează în timpul dezintegrării prin transformarea unui proton în neutron, adică după schema

$$
p \rightarrow n + e^+ + \nu.
$$

Caracteristicile electronului pozitiv sînt aceleaşi ca şi ale electronului negativ.

La cercetări amănunţite asupra dezinvegrării β^+, s-a observat de mulţi fizicieni, că aparent legea conservării energiei nu se aplică, deşi există dovezi categorice că această lege este valabilă în toate domeniile. Impasul la care s-a ajuns a fost înlăturat admiţîndu-se existenţa unei particule noi, uşoare şi fără sarcină (ipoteza lui Pauli). S-au efectuat multe experienţe, prin care s-a dovedit în mod convingător că o astfel de particulă există; recent ea a putut fi observată direct. Această particulă este numită neutrino.

Ea se întîlneşte şi cu prilejul studiului altor particule elementare, despre care va fi vorba mai jos, şi anume *mezonii*.

Introducerea la început ipotetică a mezonilor, a fost o urmare a necesităţii de a se explica forţele nucleare.

Într-adevăr, se ştie că în nucleu există pe lîngă particule neutre şi particule încărcate — protonii, situate la distanţe extrem de mici unele de altele. Este natural să se pună întrebarea din ce cauză între nucleonii încărcaţi nu se manifestă forţa coulombiană de respingere reciprocă.

Între nucleoni există forţe numite forţe nucleare care acţionează pe distanţe extrem de scurte.

Primii care au studiat problema acestor forţe au fost fizicienii I. E. Tamm şi D. D. Ivanenco, care au considerat că forţele nucleare

sînt legate de schimbul unor particule uşoare între nucleoni după schema:

$$n \rightleftarrows p + e + \nu.$$

Neutronul se transformă în proton, iar protonul în neutron cu emisie, respectiv absorbţie, a electronului şi a neutrinului. Fenomenul stabilităţii nucleelor se explica, însă valoarea forţei calculată prin astfel de considerente era de aproximativ 10^{10} ori mai mică decît cea reală, cunoscută din multe experienţe.

Pe urma acestui fir Yukawa (fizician japonez) a emis o altă ipoteză şi anume că schimbul dintre nucleoni nu se realizează prin electroni aşa cum au presupus I. E. Tamm şi D. D. Ivanenco, ci prin nişte particule pe care le-a denumit fotoni grei; această denumire era justificată prin faptul că particulelor nou introduse li se atribuia o masă de repaus diferită de zero, spre deosebire de fotonii obişnuiţi.

Cunoscîndu-se raza de acţiune a forţelor nucleare ($r = 1{,}5.10^{-13}$ cm) şi că această rază se poate exprima prin formula $r = \frac{1}{mc}$ se obţine pentru «fotonul greu» $m = 23.10^{-26}$ g, adică faţă de electron o masă de 260 ori mai mare, iar faţă de proton o masă de aproximativ 6 ori mai mică. Aceste particule au primit apoi denumirea de mezoni. Curînd s-a descoperit în radiaţia cosmică existenţa a două categorii de mezoni: mezoni π pozitivi, negativi şi neutri precum şi mezoni μ cu sarcină pozitivă sau negativă (π^+, π^-, π^0, μ^+, μ^-).

În afară de aceştia mai există încă o serie de mezoni pe care îi vom aminti mai jos.

Mezonii π par a fi legaţi direct de forţele dintre nucleoni.

Un neutron emite un mezon π^- transformîndu-se într-un proton, iar acest proton absoarbe mezonul π^- devenind un neutron, sau schematic

$$n \rightarrow p + \pi^-; \quad p + \pi^- \rightarrow n'.$$

În mod analog, un proton emite un mezon π^+ transformîndu-se în neutron în timp ce un alt neutron absoarbe mezonul π^+ devenind proton, adică:

$$p \rightarrow n + \pi^+; \quad n' + \pi^+ \rightarrow p'.$$

Existenţa mezonilor a fost dovedită experimental de către Anderson şi Neddermeyer prin observaţii asupra razelor cosmice în care iau naştere mezonii în cursul ciocnirii nucleonilor de mare energie. Într-adevăr, studiind razele cosmice şi urmele lăsate în camera Wilson de particulele care le compun, Anderson a obţinut numeroase fotografii ale urmelor unor particule încărcate. Dintre acestea unele au atras atenţia prin caracteristicile neîntîlnite la celelalte particule cunoscute. Astfel pe fotografii se observă, că una dintre particule trece prin straturi groase de materie pierzînd o mică parte din energia sa, ceea ce dovedeşte că este extrem de penetrantă. Aceste particule prezintă multe din însuşirile mezonilor propuşi de Yukawa şi s-a căutat să se vadă, dacă nu cumva aceste particule descoperite în radiaţia cosmică nu sînt tocmai mezonii care erau necesari pentru a explica forţele nucleare. Răspunsul a fost afirmativ. Într-adevăr s-au descoperit mezoni π pozitivi şi negativi şi în afară de aceştia încă o serie de alţi mezoni pe care îi vom aminti pe scurt.

Mai întîi au fost descoperiţi mezonii μ, care nu sînt activi din punct de vedere nuclear. După mai multe determinări s-a găsit că masa mezonului μ este de 207 mase electronice.

O caracteristică a mezonilor este instabilitatea. Mezonii π încărcaţi se dezintegrează dînd naştere la mezoni μ după schema: $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$, iar mezonii π neutri se dezintegrează în doi fotoni: $\pi^{\circ} \rightarrow 2h\nu$. Mezonii μ sînt şi ei instabili şi se dezintegrează după schema:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \nu.$$

Durata medie de viaţă a unui mezon μ este foarte scurtă, aproximativ $2{,}15.10^{-7}$ s.

În afară de observarea mezonilor proveniţi din razele cosmice, în ultima vreme s-au obţinut mezoni π şi în laborator prin bombardarea diferitelor substanţe cu particule α sau cu protoni de mare energie. Cu ajutorul acceleratorilor, în special a fazotronului, proprietăţile mezonilor au fost studiate în condiţii de laborator. Astfel s-a constatat că mezonii π au o durată medie de viaţă de 2.10^{-8} s pînă la 3.10^{-8} s, iar masa lor este de 273 mase electronice.

Pe lîngă mezonii π^+, π^-, Björklund a descoperit (1950) mezoni π neutri (π°), cu viaţa medie de $2{,}5.10^{-14}$ s, deci cu mult mai scurtă decît a celorlalţi mezoni.

Mezonii π pozitivi, negativi şi neutri au fost observaţi în natură, dar au fost produşi şi pe cale artificială ca urmare a interacţiunii dintre particule şi nucleoni. Pentru a se construi o teorie completă asupra forţelor nucleare, care sînt o consecinţă a schimbului de mezoni dintre particulele nucleare, prima problemă de rezolvat este descoperirea tuturor tipurilor de mezoni care pot exista.

Într-adevăr, în ultimul timp atenţia fizicienilor a fost îndreptată în această direcţie, descoperindu-se şi alte tipuri de mezoni cu proprietăţi diferite de cele enumerate mai sus. Un loc special îl ocupă hiperonii, particule mai grele decît nucleonii, care par a reprezenta un fel de stări excitate ale nucleonilor.

Dăm mai jos un tablou rezumativ al particulelor elementare cunoscute

Clasa	denumirea	masa (m_e)	schema de dezintegrare	viaţa medie
Leptoni	e^+, e^-	1	—	stabili
	$h\nu$	0	—	stabili
	ν	0	—	stabili
Mezoni L (uşori)	$\pi^{\pm}$	273	$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$	$\sim 10^{-8}$ s
	π°	268	$\pi^{\circ} \rightarrow 2h\nu$	$\sim 10^{-15}$ s
	$\mu^{\pm}$	207	$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + 2\nu$	$\sim 10^{-6}$ s
	$\theta^{\pm,0}$	965	$\pi^{\pm} + \pi^{\mp,0}$	$\sim 10^{-10}$ s
Mezoni K (grei)	$\tau^{\pm,0}$	965	$\pi^{\pm} + \pi^{+} + \pi^{-,0}$	$\sim 10^{-8}$ s
	K_{μ_2}	965	$K^{\pm}_{\mu_2} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$	
	K_{μ_3}	965	$K^{\pm}_{\mu_3} \rightarrow \mu^{\pm} + \pi^{\circ} + \nu$	
	K_β	965	$K^{\pm}_{\beta} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \pi^{\circ}$	
Nucleoni	p, $\tilde{p}$	1836	—	∞
	n, $\tilde{n}$			

Hyperoni	Λ°	~ 2200	$\Lambda^\circ \to p + \pi^-$	$\sim 10^{-10}$ s
	$\Sigma^{\pm,0}$	~ 2360	$\Sigma^\pm \to p + \pi^\circ$	$\sim 10^{-10}$ s
			$n + \pi^\pm$	
	Ξ^-	~ 2500	$\Sigma^\circ \to \Lambda^\circ + h\nu$	$\sim 10^{-23}$ s
			$\Xi^- \to \Lambda^\circ + \pi^-$	$\sim 10^{-10}$ s

Producerea mezonilor în natură se face pe scară largă datorită razelor cosmice şi anume a componentei primare formată din protoni, nuclee de heliu şi nuclee grele.

Aceste particule provoacă în atmosferă dezintegrări al căror produs sînt şi mezonii π, care apoi se dezintegrează fie în mezoni μ, fie în cuante. Mezonii μ la rîndul lor emit electroni negativi, pozitivi sau negativi şi neutrino, iar cuantele convertesc în perechi electron-pozitron formînd radiaţia secundară care ajunge la suprafaţa pămîntului.

Fenomenele care se produc datorită radiaţiei cosmice sînt numeroase şi complexe, constituind şi ele un capitol al fizicii moderne. Este sigur că pe lîngă aceste particule amintite mai sus există şi altele pe care fizicienii negreşit le vor descoperi şi studia.

Astfel s-a descoperit protonul negativ (antiprotonul), precum şi alţi mezoni şi diferite particule. Problema principală este construirea acceleratorilor uriaşi, care sînt indispensabili în astfel de cercetări. Toate descoperirile împreună cu cele viitoare, vor ajuta la cunoaşterea şi a altor fenomene şi legi ale naturii, care vor ridica ştiinţa şi tehnica la un grad din ce în ce mai inalt.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O RELAŢIE ÎNTRE NUMERE ÎNTREGI NEPRIME ŞI PROGRESIILE ARITMETICE

Prof. univ. IULIUS VOICU

CONSIDERĂM o progresie aritmetică $a, b, c, \ldots, l$ avînd n termeni ($n \geqslant 3$) întregi pozitivi. Suma progresiei este

$$S = \frac{(a+l)n}{2}$$

şi este tot un număr pozitiv Fie factorul $a + l$, fie factorul n, este divizibil cu 2 şi vom putea scrie sau $S = \frac{a+l}{2} \cdot n$, sau $S = (a+l) \cdot \frac{n}{2}$. Numărul S apare deci *ca un produs de doi factori.*

Reciproc, dacă ni se dă un număr S scris ca un produs de doi factori, ne putem pune problema să-l scriem sub forma sumei unei progresii aritmetice.

Aici ne vom ocupa în special cu progresiile aritmetice de *numere impare consecutive* (raţia egală cu 2). Notăm:

$$m + 1,\ m + 3,\ m + 5 \ldots, m + 2n - 1,$$

termenii progresiei, unde m este un număr par. Suma ei este:

$$S = \frac{(2m + 2n)\, n}{2} = (m + n)\, n.$$

Pentru a scrie un număr dat ca sumă a unei progresii aritmetice de termeni impari consecutivi, trebuie să-l scriem sub forma $(m+n)\, n$; factorul al doilea n trebuie să fie mai mare decît 2, iar factorul întîi, $m+n$, trebuie să fie mai mare decît al doilea sau egal cu el (în cazul $m = 0$). Deci, nu putem face această descompunere dacă numărul dat este prim sau este dublul unui număr prim. Dacă numărul dat este compus şi se poate scrie în mai multe feluri sub forma $(m + n)\, n$, $(n > 2)$, vom putea scrie numărul în mai multe feluri ca suma unei progresii aritmetice de termeni impari consecutivi.

Exemplul 1. Fie $N = 225 = 3^2 \cdot 5^2$. El poate fi scrie $N = 75 \cdot 3 = 45 \cdot 5 = 25 \cdot 9 = 15 \cdot 15$. Avem deci, patru progresii aritmetice de termeni impari consecutivi avînd ca sumă pe 225 şi anume:

1) $n = 3$, $m = 72$ $\quad N = 73 + 75 + 77$

2) $n = 5$, $m = 40$ $\quad N = 41 + 43 + 45 + 47 + 49$

3) $n = 9$, $m = 16$ $\quad N = 17 + 19 + \ldots + 33$

4) $n = 15$, $m = 0$ $\quad N = 1 + 3 + 5 + \ldots + 29$

Exemplul 2. $N = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. El poate fi scris $N = 70 \cdot 2 = 35 \cdot 4 = 28 \cdot 5 = 20 \cdot 7 = 14 \cdot 10$. Descompunerea $10 \cdot 2$ nu ne duce la o progresie propriu zisă, căci avem $n = 2$; celelalte ne dau fiecare soluţii.

Interpretare geometrică. Să considerăm un produs de doi factori întregi. Unităţile produsului pot fi aşezate în formă de dreptunghi; de exemplu, numărul $35 = 7 \cdot 5$ poate fi figurat ca în fig. 1:

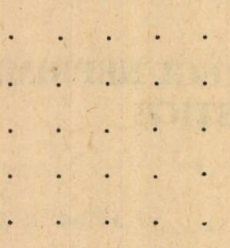


Fig. 1

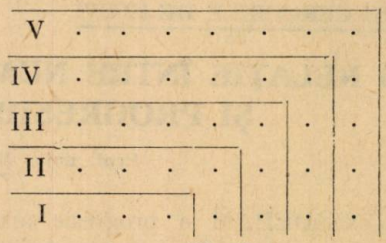


Fig. 2

Dacă unităţile care formează un unghi drept ca în fig. 2, le considerăm ca formînd un termen, vom avea numărul 35 ca sumă a unei progresii aritmetice cu raţia 2 şi anume $3 + 5 + 7 + 9 + 11$.

Să presupunem acum, că numărul dat este o putere. Scriind această putere sub forma de produs de doi factori, vom putea găsi progresiile care au ca sumă puterea dată. Fie, de exemplu, $N = 5^8$.

Avem $N = 5^7 \cdot 5 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^5 \cdot 5^3 = 5^4 \cdot 5^4$.

Deci, N poate fi scris ca suma unei progresii aritmetice de raţie 2 avînd 1) 5 termeni, primul egal cu $5^7 - 5 + 1$; 2) 25 termeni, primul $5^6 - 5^2 + 1$; 3) 125 termeni, primul $5^5 - 5^3 + 1$; 4) 625 termeni, primul egal cu 1.

Cazuri particulare. 1) Fie $N = n^2$. Scriind $N = n \cdot n$ găsim $N = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$. Regăsim teorema că suma primelor n numere impare este

un patrat. (geometric, ea se interpretează ca în fig. 1 și 2, unde în loc de un dreptunghi avem un patrat).

2) Fie $N = n^3$. Scriind $N = n^2 \cdot n$ obținem

$$N = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 - n + 2n - 1).$$

Fie, $N' = (n + 1)^3$. Scriind $N' = (n + 1)^2 (n + 1)$, obținem primul termen al progresiei egal cu $(n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$. Observăm că el este cu 2 mai mare decît ultimul termen din progresia ce dă pe N.

Găsim că cuburile numerelor naturale pot fi scrise ca progresii de termeni impari consecutivi astfel încît primul termen al unei progresii urmează imediat (este cu 2 mai mare) față de ultimul termen al progresiei precedente:

$$\frac{1^3}{1}, \quad \frac{2^3}{3+5}, \quad \frac{3^3}{7+9+11}, \quad \frac{4^3}{13+15+17+19}, \quad \frac{5^3}{21+23+25+27+29}.$$

Să facem acum legătura între cazurile 1 și 2. Dacă, de exemplu, adunăm primele 5 cuburi obținem o sumă egală cu suma primelor 29 numere impare care este, conform cazului 1, egală cu 15^2. În general, suma primelor n cuburi ne dă un patrat.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (n^2 + n - 1).$$

În membrul doi avem $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ termeni.

Găsim că $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

PHYTOTRONUL — APORT PREȚIOS AL FIZICII ÎN DOMENIUL AGROTEHNICII

VIRGIL PAVLU conf. univ.

PROGRESELE realizate în agrotehnică cum sînt de exemplu, cele obținute în lupta împotriva paraziților, asolamentele, irigațiile, îngrășămintele, selecțiunile etc. au un rol deosebit în asigurarea recoltelor bogate, dar climatul joacă rolul hotărîtor.

Climatul însă este un element dificil, căci el acționează și prin diversitatea factorilor care-l determină: umezeală, temperatură, insolație, vînt etc., dar și prin periodicitatea, durata și intensitatea lor, factorii climatului condiționîndu-se reciproc.

Variațiile anuale ale climatului pot fi foarte mari, cum spre exemplu au fost la noi în ultimul timp, fie ierni extrem de friguroase sau cu puțină zăpadă, fie veri foarte secetose. Un studiu de aclimatizare făcut asupra unor sorturi de plante în perioade de timp scurte poate da rezultate cu totul greșite, așa că pentru obținerea unor rezultate valabile, experiențele de aclimatizare trebuie extinse pe o perioadă suficient de lungă, pentru ca să fie luată în considerație valoarea medie a factorilor ce determină climatul. Durata minimă pentru studii

de aclimatizare se apreciază a fi cca 25 ani, mult prea lungă în raport cu necesităţile sociale şi chiar cu viaţa experimentatorului.

Phytotronul rezolvă această problemă.

Mai întîi să vedem ce înseamnă şi pentru ce a fost numit aşa. Se ştie că ciclotronul este un accelerator de particule cu care urmează să fie bombardate nucleele unor atomi pentru a provoca transmutaţii. Phytotronul (phyto înseamnă în limba greacă, plantă) ar fi prin analogie un accelerator pentru studiile care se fac asupra plantelor. Această denumire a fost propusă de fizicianul Milikan. El permite realizarea climatelor artificiale medii după dorinţă, permiţînd efectuarea în cele mai bune condiţii, în intervale de timp mult mai scurte, a diverselor studii ce se fac asupra plantelor, în special asupra posibilităţilor de aclimatizare.

Serviciile meteorologice cunosc bine şi posedă statistici asupra valorilor medii anuale pe perioade lungi asupra factorilor climatologici, pe care phytotronul urmează să le realizeze în mod stabil pe durata mai scurtă a experimentării.

Existau şi mai înainte aşa numitele « super-sere » unde se puteau varia parţial factorii climatologici, datorită cărora s-au obţinut rezultate frumoase. Acestea însă nu permiteau precis controlul tuturor parametrilor climatologici. Putem totuşi spune că aceste super-sere realizau în parte ceea ce se înţelege azi prin phytotron; erau nişte « semi-phytotroni ».

« Phytotronul, spune Milikan, va diseca mecanismul vieţii vegetale aşa cum ciclotronul dezvăluie secretele atomului, datorită creerului său electromecanic şi programării ». El va permite să se realizeze în diversele sale încăperi climatele tuturor punctelor de pe glob şi să se cultive indiferent ce plante, prezervîndu-le în acelaşi timp de acţiunea nocivă a paraziţilor. Precauţiile care se iau în cadrul phytotronului pentru prezervarea plantelor de contaminare sînt extreme. Cei care intră în phytotron sînt trecuţi mai întîi prin unităţile de decontaminare. Ei îşi înlocuiesc hainele cu pijamale şi bonete speciale sterilizate, îşi spală faţa, mîinile şi unghiile mai ales, în mod chirurgical. Îşi lasă la intrare chiar port-ţigaretul care ar putea propaga virusul mozaicului tutunului. Aerul însuşi este sterilizat. Un precipitator-ionizator înlătură toate pulberile, impurităţile mecanice, polen, spori, gaze vătămătoare industriale. Pentru mai mare siguranţă se realizează în interior, ca şi în adăposturile împotriva gazelor de luptă, o mică supra-presiune, pentru ca prin eventualele neetanşări să fie exclusă intrarea aerului nesteril din afară. Absolut totul este sterilizat, pămînt, seminţe, pueţii înşişi, iar soluţiile nutritive care vin prin conducte speciale sînt aseptice.

Phytotronul realizează climate artificiale constante cu ajutorul dispozitivelor automate electronice. El conţine camere obscure cu lumină artificială, camere luminoase cu lumină solară, căldări cu vapori pentru reglatul temperaturii, ventilatoare pentru aer, pompe, laboratoare, birouri, servicii administrative.

Condiţionarea aerului în ceea ce priveşte compoziţia, umiditatea şi temperatura este realizată într-un grad incomparabil celei mai bune condiţionări dintr-o sală de spectacol, unde aerul parcurge circuitul de condiţionare în circa 12 minute, în timp ce aici durează 3 minute.

Datorită posibilităţilor lui, phytotronul nu poate fi exclus din nici un studiu serios care se face asupra planetelor.

Activitatea phytotronului, strîns legată de agrotehnică şi de economia ţării, trebuie să meargă mînă în mînă cu aceea a altor stabilimente ştiinţifice

de acelaşi resort: laboratoare de fotosinteză, hidrobiologie etc., permiţînd rezolvarea în ansamblu a marilor probleme agrotehnice al căror secret îl păstrează natura cu gelozie şi valorificarea prin studiile de aclimatizare a pămînturilor secetoase, deschizînd la rîndul său probleme şi perspective nebănuite în domeniul agrotehnicii.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Tăierea sticlei cu foarfeca.** Putem tăia cu ajutorul unor foarfeci obişnuite o foaie de sticlă, de exemplu o bucată de geam, tot aşa de uşor, ca şi cum s-ar tăia o foaie de carton (fig. 1).

Tot secretul constă în a cufunda într-o găleată cu apă sticla, foarfecele şi mîinile; sticla se taie în linie dreaptă sau curbă fără să se spargă sau să crape; aceasta se explică prin faptul că apa amortizează vibraţiile foarfecelor şi ale plăcii de sticlă.

Fig. 1

Dacă vom lăsa să iasă din apă cea mai mică parte a foarfecelor vibraţiile vor fi de ajuns pentru a împiedica succesul experienţei.

Se poate tăia de asemenea o sticlă subţire cu foarfecele şi fără cufundare în apă, însă trebuie să se acopere sticla cu fîşii de hîrtie bine lipite şi dispuse în toate sensurile; aceste fîşii amortizează îndeajuns vibraţiile pentru a împiedica spargerea sticlei; procedeul cu găleata cu apă este totuşi mai sigur.

2. **Divizibilitatea corpurilor** (lacrimile de crocodil). Puterea colorantă a culorilor de anilină este un exemplu de divizibilitate foarte mare a unor corpuri. Un decigram de violet sau de verde de anilină ajunge pentru a da unui litru de apă sau de alcool o coloraţie destul de închisă la culoare, pentru a face să dispară toată transparenţa lichidului. Însă printre aceste culori, una din cele mai curioase este, fără îndoială, floureseeina, remarcabilă prin culoarea verde pe care o comunică apei dîndu-i o aparenţă fosforescentă deosebită. Un gram de substanţă colorantă dizolvată în 20 000 litri de lichid poate fi recunoscută.

Experienţa următoare ne poate demonstra acest fenomen interesant. În acest scop luaţi un borcan de sticlă şi-l umpleţi cu apă. Preparaţi o soluţie foarte diluată de floureseeină în care muiaţi o bucată de sugativă. Lăsaţi să se usuce sugativa, iar apoi tăiaţi din ea mici pătrate cu latura de un centimetru. Puneţi cîteva din aceste pătrăţele pe suprafaţa apei din borcan, care trebuie să fie perfect liniştită (fig. 2). Veţi vedea că floureseeina iese de îndată ce apa a îmbibat hîrtia şi coboară în borcan sub formă de picături lunguieţe verzi,

cu reflexe fosforescente. După puţin timp toată apa din borcan ia o frumoasă coloraţie de smarald.

3. **Pendului lui Foucault.** În timpul desertului puteţi repeta la masă cu ajutorul unui măr sau a unei portocale, experienţa pendulului lui Foucault, executată în anul 1851 sub cupola Pantheonului.

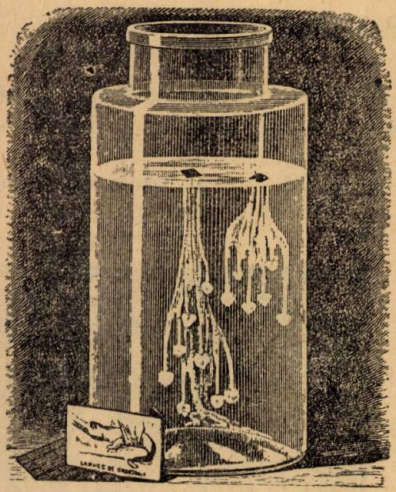


Fig. 2

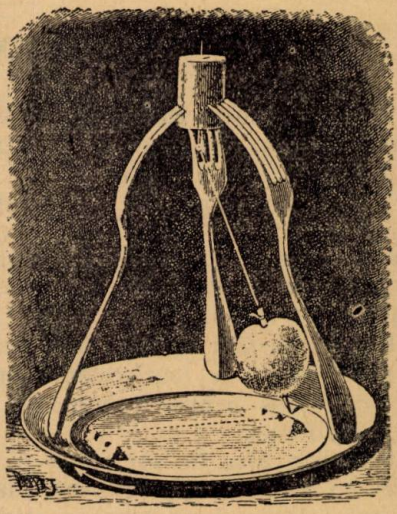


Fig. 3

Străbateţi mărul cu un beţişor ascuţit la un capăt şi legaţi de un capăt a beţişorului un fir de aţă; s-a constituit astfel un pendul.

Legaţi cealaltă extremitate a firului de capătul unui ac cu gămălie înfipt într-un dop, care este susţinut de trei furculiţe aşezate cu cozile pe marginea unei farfurii (fig. 3). Faceţi acum să oscileze pendulul după ce s-a aranjat lungimea firului astfel, încît vîrful beţişorului care străbate mărul să ajungă aproape de fundul farfuriei, putînd să marcheze drumul său în două mici grămăjioare de zahăr pudră destinate să figureze cercul de nisip, pe care Foucault l-a folosit în experienţa sa.

Farfuria reprezintă pămîntul. Cît timp rămîne fixă, vîrful beţişorului, la fiecare oscilaţie a pendulului, trece exact pe urmele pe care le-a trasat în cele două grămăjioare de zahăr.

Dacă, pentru a ilustra mişcarea de rotaţie a pămîntului, învîrtim, fără a zdruncina, farfuria şi deci furculiţele şi dopul, constatăm că aceasta nu influenţează cu nimic asupra direcţiei pendulului, care continuă să oscileze în acelaşi plan ca şi mai înainte, şi avem astfel, proba, văzînd beţişorul că trasează în grămăjioara de zahăr, la fiecare oscilaţie, o mică brazdă distinctă faţă de precedenta. Putem astfel să demonstrăm într-un mod simplu şi practic, principiul invariabilităţii planului de oscilaţie a pendulului, principiu pe care se bazează celebra experienţă a savantului francez.

4. **Cufundătorul automat.** Luaţi un borcan plin cu apă şi introduceţi în această apă o mică cutie cilindrică de carton confecţionată în modul următor:

Fundul va fi găurit astfel ca el să fie străbătut de un număr mare de găurele mici, iar capacul va fi prevăzut în centrul său, cu un orificiu circular. La acest orificiu se va adapta o supapă dublă, alcătuită dintr-o rondelă de carton groasă aşezată spre interiorul capacului, şi dintr-o bucată de plută (un dop mai gros) la exterior, aceste două piese fiind reunite printr-o tijă oarecare, cum se arată în fig 4a.

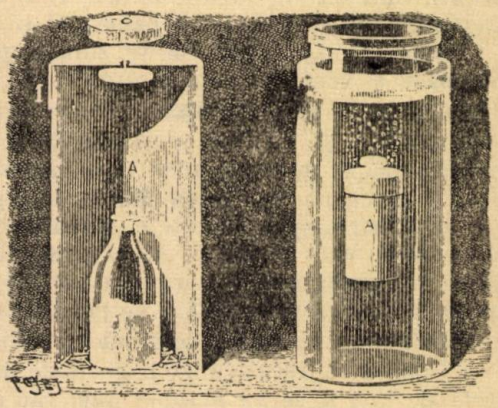


Fig. 4

Între cele două rondele trebuie să existe un spaţiu de grosimea degetului. La fundul cutiei se pun cuie drept lest şi se aşază pe acest fund o sticluţă conţinînd un amestec de praf fin de bicarbonat de sodiu şi acid tartric. Se astupă sticluţa cu un dop găurit (perforat) cu un orificiu larg şi se pune apoi capacul cutiei,la care s-a adaptat supapa. Îndată ce este pusă în apă, cutia se scufundă, deoarece apa pătrunde în ea prin găurelele de la fund. După aceea apa intră în sticluţă unde produce o mare cantitate de acid carbonic (bioxid de carbon), care prin ieşirea sa alungă apa din cutie; cutia urcă îndată (fig. 4b), iar presiunea gazului acţionează asupra rondelei de carton şi aceasta asupra capacului, tija supapei ridicînd dopul de plută. Însă, de îndată ce capacul ajunge la suprafaţa apei din borcan, bucata de plută nemai fiind susţinută de apă, coboară datorită greautăţii sale, rondela de carton împinsă prin tija supapei părăseşte orificiul capacului şi gazul scapă afară. Iată deci, dispozitivul în aceiaşi situaţie ca la început; apa intră din nou în cutie, aceasta se cufundă într-un timp destul de lung.

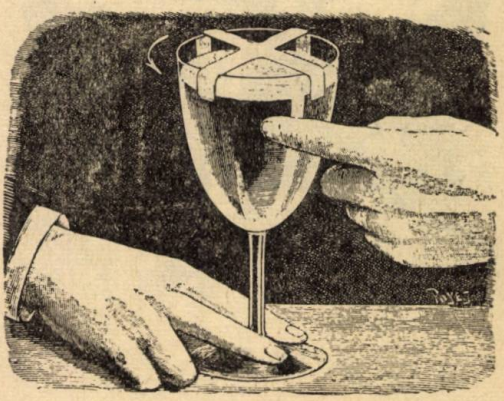


Fig. 5

Dacă dispunem de un iaz această experienţă va fi încă mai interesantă; se va ţine cutia printr-un fir pentru a nu o pierde şi va putea fi văzută afundîndu-se şi ieşind la suprafaţă de circa 50 de ori.

5. **Vibraţiile unui pahar de cristal.** Luaţi un pahar de cristal subţire care să sune bine. Se toarnă apă în el pînă aproape de margine (cca 1 cm) şi se aşază pe margine, după ce a fost bine şters, o cruce cu braţe egale, confecţionată din hîrtie. Se îndoaie în unghi drept extremităţile braţelor acestei cruci, în scopul de a împiedica alunecarea laterală (fig. 5).

Dacă facem să vibreze paharul frecîndu-l cu degetul ud într-un loc oarecare de pe suprafaţa sa exterioară, se va auzi un sunet, şi mai mult, dacă degetul

care produce frecarea paharului se află sub unul din braţele crucii de hîrtie, această cruce va rămîne nemişcată, iar dacă dimpotrivă, se freacă partea din pahar situată între două braţe ale crucii, atunci crucea începe să se rotească încet, ca şi cum s-ar supune unei influenţe magice şi nu se va opri decît atunci, cînd extremitatea unui braţ va fi ajuns deasupra părţii frecate de deget. Deplasînd degetul în jurul paharului se va face rotirea crucii după dorinţă.

Această experienţă foarte simplă permite să se demonstreze existenţa nodurilor şi ventrelor care se produc la vibraţia corpurilor sonore; nodurile — acolo unde se opresc braţele crucii — sînt punctele unde marginile paharului sînt imobile şi ventrele — situate între noduri — sînt dimpotrivă, cum le indică numele, punctele unde vibraţia marginilor este mai puternică şi pe care braţele crucii nu vor putea rămîne în repaus.

6. **Electroscopul.** Îndoiţi o sîrmă de fier în *Z*, avînd două unghiuri drepte, aşa cum se vede în fig. 6. Aşezaţi braţul orizontal superior pe marginea unui pahar şi puneţi deasupra o placă sau un taler de metal. Braţul vertical nu va trebui să atingă paharul, iar de porţiunea orizontală inferioară se va suspenda o mică bandă de hîrtie de staniol îndoită în formă de *V* întors.

Dacă se va freca acum o baghetă de sticlă sau un baston de ceară roşie cu o stofă de lînă şi se va apropia unul sau celălalt de marginea talerului (plăcii) se va vedea îndată că cele două foiţe de staniol se depărtează mult una de alta, la fel cum se produce acest fenomen cu ajutorul aparatului bine cunoscut din laboratorul de fizică: electrometrul sau electroscopul cu foiţă de aur.

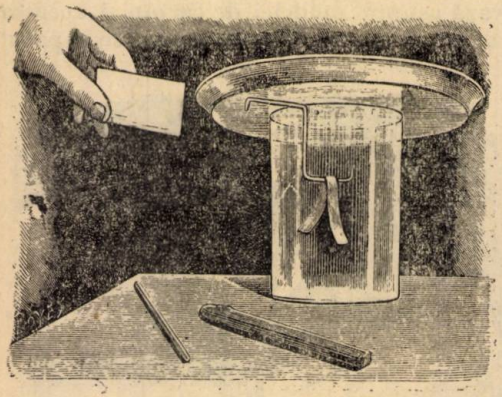


Fig. 6

Acest excelent electroscop, care a fost improvizat, permite nu numai să se constate dacă un corp este sau nu electrizat, dar el poate indica şi felul electricităţii, pozitivă sau negativă, cu care a fost încărcat corpul.

Apropiem de exemplu, de talerul metalic o bucată de hîrtie foarte uscată pe care am electrizat-o prin frecare cu o perie, şi în timp ce foiţele electroscopului nostru se depărtează sub influenţa acestei hîrtii electrizate, atingem talerul cu degetul. Foiţele se reapropie, însă dacă vom retrage degetul, apoi bucata de hîrtie, ele se depărtează din nou. Aparatul este astfel încărcat cu electricitate contrară aceleia a hîrtiei. Pentru a constata ce fel de electricitate este aceasta, apropiem încet de talerul metalic bagheta de sticlă frecată cu postavul de lînă; vom vedea că divergenţa foiţelor se măreşte. Aceasta ne arată că electricitatea electroscopului nostru este de acelaşi fel cu aceea a sticlei, adică pozitivă. Foaia de hîrtie era deci încărcată cu electricitate contrară, adică negativă.

Invers, dacă divergenţa s-ar fi micşorat aceasta ar fi însemnat că obiectul cercetat era încărcat cu electricitate pozitivă.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1959

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC. Pe cateta AB se ia un punct M astfel ca $AC^2 = AM \cdot AB$ și se notează cu P proiecția punctului M pe ipotenuza BC. Se cere să se găsească locul geometric al punctului P cînd vîrful B al unghiului se mișcă pe dreapta AB. Să se arate că dreapta MP trece printr-un punct fix.

* * *

Soluție. — Fie $AC = a = \text{const}$, $AB = \lambda$. Avem $a^2 = AM \cdot \lambda$ de unde $AM = \dfrac{a^2}{\lambda}$.

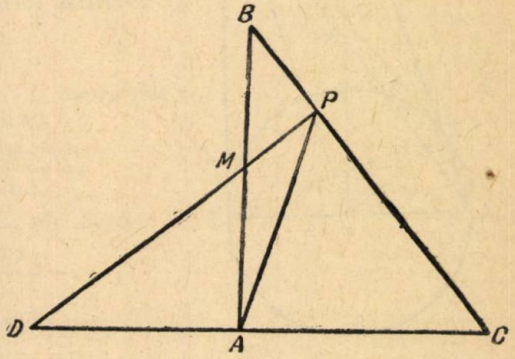
Din asemănarea triunghiurilor BPM și ABC rezultă:

$$\frac{MP}{a} = \frac{BP}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - a^2}{\lambda\sqrt{a^2 + \lambda^2}},$$

de unde:

$$BP = \frac{\lambda^2 - a^2}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}},$$

$$PC = \sqrt{a^2+\lambda^2} - \frac{\lambda^2 - a^2}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}.$$



Aplicăm relația lui Stewart în triunghiul ABC pentru ceviana AP și avem:

$$a^2 \cdot BP + \lambda^2 \cdot CP - PA^2\sqrt{a^2 + \lambda^2} = BP \cdot PC\sqrt{a^2 + \lambda^2}$$

sau

$$\frac{a^2(\lambda^2 - a^2)}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} + \frac{2a^2\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} - \overline{PA}^2\sqrt{\lambda^2 + a^2} = \frac{2a^2(\lambda^2 - a^2)}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}.$$

De aici rezultă: $PA = a = \text{constant}$.

Vîrful A al triunghiului ABC fiind fix, rezultă că locul geometric al punctului P este un cerc cu centrul în punctul A și de rază AP.

Din asemănarea triunghiurilor AMD și ABC rezultă $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$, de unde $AD = \dfrac{AB \cdot AM}{AC} = \dfrac{AC^2}{AC} = AC = a = \text{constant}$.

Prin urmare: $AD = a$, adică dreapta MP trece prin punctul D, simetricul punctului C față de punctul A, adică printr-un punct fix.

Problema 2017

Dintr-un punct C, exterior cercului O (R), se duc tangentele CB, CT și se notează cu A punctul diametral opus lui B. Perpendiculara în centrul O pe diametrul AB intîlnește dreptele AC, TC, AT respectiv în M, P, D. Notînd $\dfrac{CO}{2R} = k$, să se arate că

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{PD} = \frac{16k^4 - 4k^2 - 1}{(2k^2 - 1)OD}$$

și

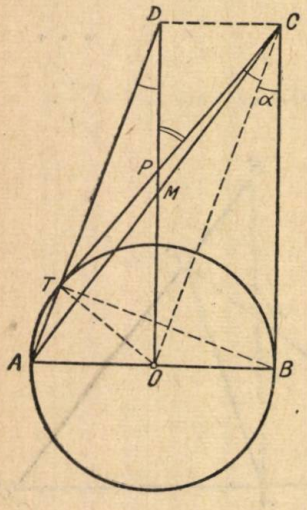
$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OD} = \frac{6k^2}{(4k^2 - 1)OP}.$$

D. C. Panu

Soluție și generalizare. — Notăm $\sphericalangle BCO = \alpha$. Segmentul OM este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci

$$OM = \frac{CB}{2} = \frac{R \operatorname{cotg} \alpha}{2}.$$

Din $DO \parallel CB$ (perpendiculare pe AB) și $DA \parallel CO$ (perpendiculare pe BT) rezultă $\sphericalangle ODA = \sphericalangle BCO$. Avînd și $AO = OB = R$, triunghiurile dreptunghice ODA și BCO sînt egale, deci $DA = CO$.



Patrulaterul $DAOC$ este paralelogram avînd laturile opuse DA și CO paralele și egale.

În triunghiul dreptunghic DPC:

$$PD = R \operatorname{ctg}(DPC) = R \operatorname{ctg}(TCB) = R \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1)}{2 \operatorname{cotg} \alpha}.$$

Mai avem:

$$MP = MD - PD = OM - PD = \frac{R \operatorname{cotg} \alpha}{2} - \frac{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1)}{2 \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{R}{2 \operatorname{cotg} \alpha},$$

$$OD = BC = R \operatorname{ctg} \alpha;\ OP - OD - PD = R \operatorname{ctg} \alpha - \frac{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1)}{2 \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1)}{2 \operatorname{cotg} \alpha}.$$

Ținînd seama că $CO = 2kR$, avem:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{\sqrt{CO^2 - OB^2}}{OB} = \sqrt{4k^2 - 1}$$

și prin urmare:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{PD} = \frac{2}{R \operatorname{cotg} \alpha} + \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{R} + \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1)} = \frac{2}{R \operatorname{cotg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{cotg}^4 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1} = \frac{2}{OD} \cdot \frac{16k^4 - 4k^2 - 1}{4k^2 - 2} = \frac{16k^4 - 4k^2 - 1}{(2k^2 - 1)\, OD}$$

și

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OD} = \frac{2}{R \operatorname{cotg} \alpha} + \frac{1}{R \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{3}{R \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{R(\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1)} \cdot \frac{3(\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1)}{2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \frac{1}{OP} \cdot \frac{3 \cdot 4k^2}{2(4k^2 - 1)} = \frac{6k^2}{(4k^2 - 1)\, OP}.$$

Problema 2166

Să se arate că dacă

$$\frac{\cos x}{A} = \frac{\cos 3x}{B} = \frac{\cos 5x}{C},$$

atunci $A(A - B + C) = B^2$ *și să se deducă de aici o relație între mărimile* L, M, N *din proporțiile:*

$$\frac{\sin x}{L} = \frac{\sin 3x}{M} = \frac{\sin 5x}{N}.$$

* * *

Soluție dată de **Alex. Emanoil, Gh. Mavrogheorghe, Lucian Cipere**, București. — Avem, conform proprietăților unui șir de rapoarte egale, următoarele egalități:

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{A + C} = \frac{\cos 3x}{B} \text{ și } \frac{\cos 3x + \cos x}{A + B} = \frac{\cos x}{A},$$

de unde:

$$\frac{2\cos 3x \cdot \cos 2x}{A + C} = \frac{\cos 3x}{B}, \text{ deci } \cos 2x = \frac{A + C}{2B}; \tag{1}$$

$$\frac{2\cos 2x \cos x}{A + B} = \frac{\cos x}{A}, \text{ deci } \cos 2x = \frac{A + B}{2A}. \tag{2}$$

De unde se obține:

$$\frac{A + C}{2B} = \frac{A + B}{2A}, \quad A^2 + AC = AB + B^2,$$

adică relația cerută:

$$A(A - B + C) = B^2.$$

Să stabilim acum o relație între L, M, N. Avem:

$$\frac{\sin x + \sin 5x}{L + N} = \frac{\sin 3x}{M},$$

de unde

$$\frac{2\sin 3x \cos 2x}{L + N} = \frac{\sin 3x}{M}, \text{ deci } \cos 2x = \frac{L + N}{2M}$$

și

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{M}{L}, \text{ deci } \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x} = \frac{M - L}{L}.$$

De unde:

$$\frac{2\cos 2x \sin x}{\sin x} = \frac{M - L}{L} \text{ și } \cos 2x = \frac{M - L}{2L}.$$

Egalînd, se obține relația:

$$\frac{L + N}{2M} = \frac{M - L}{2L}, \text{ deci } L^2 + NL = M^2 - ML$$

sau

$$L(L + M + N) = M^2.$$

Problema 2218

Se consideră un triunghi ABC, pe laturile lui se iau în același sens lungimile egale BD și CE; pe latura AB începînd din B spre A se așează $BF = AC$, iar pe AC la fel $CG = AB$.

a) *Să se arate că FG trece prin intersecția dreptelor BE și CD.*

b) *Să se arate că mijloacele segmentelor AF, AG, BE și CD sînt colineare.*

* * *

Soluție. — a) Triunghiul ADC tăiat de transversala BOE ne dă după teorema lui Menelaus

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{OC}{OD} = 1,$$

însă $DB = EC$, atunci avem

(1)
$$\frac{AE}{AB} \cdot \frac{OC}{OD} = 1.$$

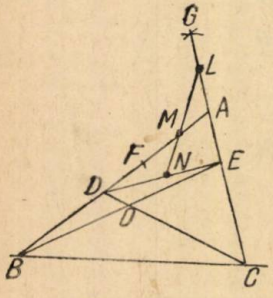
Pentru ca O, F şi G să fie coliniare trebuie să demonstrăm

$$\frac{GC}{AG} \cdot \frac{AF}{DF} \cdot \frac{OD}{OC} = 1,$$

însă

$$AG = CG - AC = AB - AC,$$

$$AF = AB - BF = AB - AC,$$



deci $AG = AF$.

Atunci trebuie să arătăm că:

$$(2) \qquad \frac{GC}{DF} \cdot \frac{OD}{OC} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{AB}{DF} \cdot \frac{OD}{OC} = 1,$$

însă

$$DF = BF - BD = AC - BD,$$

$$AE = AC - EC = AC - BD,$$

$$DF = AE.$$

Relaţia de demonstrat (2) este echivalentă cu (1).

b) Trebuie să demonstrăm:

$$\frac{ND}{EN} \cdot \frac{MA}{DM} \cdot \frac{LE}{AL} = 1.$$

Avem

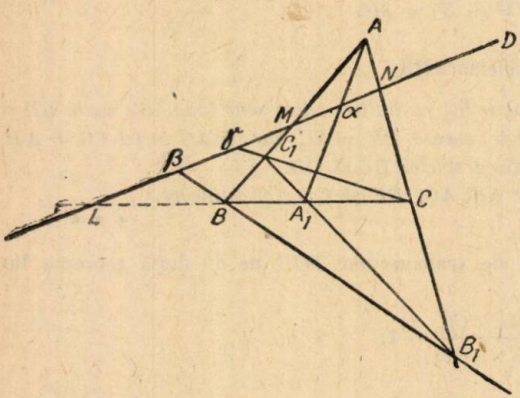
$$\frac{DN}{NE} = 1 \; ; \quad AM = LA \; ; \quad DM = EL.$$

Problema 2219

Se consideră un triunghi şi o dreaptă D. Fie α mijlocul segmentului determinat pe dreapta D de unghiul BAC, şi A_1 punctul în care $A\alpha$ taie latura BC. Analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Să se arate că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

***

Soluţie. — Notăm punctele analoge cu β şi γ. Teorema lui *Menelaus* pentru γ C aplicată triunghiurilor LMB şi MAN dă respectiv



$$BC \cdot L\gamma \cdot MC_1 = LC \cdot \gamma M \cdot C_1B$$

şi

$$CN \cdot AC_1 \cdot \gamma M = AC \cdot MC_1 \cdot N\gamma.$$

Facem raportul şi găsim

$$(1) \qquad \frac{LC \cdot C_1B}{CN \cdot AC_1} = \frac{BC}{AC}.$$

Din triunghiurile NLC şi LMB tăiate de AA_1 obţinem:

$$AN \cdot CA_1 \cdot L\alpha = AC \cdot A_1L \cdot \alpha N$$

şi

$$A_1B \cdot L\alpha \cdot MA = A_1L \cdot M\alpha \cdot AB,$$

de unde

$$(2) \qquad \frac{CA_1 \cdot AN}{A_1B \cdot MA} = \frac{AC}{AB}.$$

Din triunghiurile NLC și AMN tăiate de BB_1 obținem

$$B_1C \cdot N\beta \cdot LB = B_1N \cdot BL \cdot BC,$$

$$B_1A \cdot MB \cdot N\beta = B_1N \cdot AB \cdot M\beta,$$

de unde

$$\frac{B_1A \cdot MB}{B_1C \cdot LB} = \frac{AB}{BC}. \tag{3}$$

Înmulțim (1) cu (2) și cu (3) și avem

$$\frac{LC \cdot C_1B \cdot CA_1 \cdot AN \cdot B_1A \cdot MB}{CN \cdot AC_1 \cdot A_1B \cdot MA \cdot B_1C \cdot LB} = 1.$$

Din triunghiul ABC tăiat de transversala D avem

$$MB \cdot AN \cdot LC = CN \cdot MA \cdot LB.$$

Rezultă:

$$\frac{C_1B \cdot CA_1 \cdot B_1A}{AC_1 \cdot A_1B \cdot B_1C} = 1,$$

adică A_1, B_1, C_1 sînt colineare.

Problema 2237

Să se determine parametrul a, întreg pozitiv, pentru ca sistemul

$$x^3 + y^3 = axy, \tag{1}$$

$$(a - 2x)\, y^2 = (2a + x)\, x^2 \tag{2}$$

să aibă soluții în numere întregi.

N. C. Ciomu

Soluție. — Notăm $y = tx$; sistemul devine:

$$x^3 (1 + t^3) = atx^2; \qquad (a - 2x)\, t^2x^2 = (2a + x)\, x^2,$$

iar după simplificare cu x^2:

$$x(1 + t^3) = at, \tag{3}$$

$$(a - 2x)\, t^2 = 2a + x. \tag{4}$$

Din (3) avem:

$$x = \frac{at}{1 + t^3}, \tag{5}$$

iar din (4)

$$x = \frac{a(t^2 - 2)}{2t^2 + 1}. \tag{6}$$

Comparînd (5) cu (6) avem:

$$\frac{t}{1 + t^3} = \frac{t^2 - 2}{2t^2 + 1},$$

sau

$$2t^3 + t = t^2 + t^5 - 2t^3 - 2$$

și în fine:

$$t^5 - 4t^3 + t^2 - t - 2 = 0,$$

care se mai poate scrie:

$$t^2 (t^3 + 1) - 4 (t^3 + 1) - (t - 2) = 0$$

sau

$$(t^3+1)(t^2-4)-(t-2)=0;$$
$$(t-2)[(t^3+1)(t+2)-1]=0;$$
$$(t-2)(t^4+2t^3+t+1)=0,$$

(7)

de unde $t=2$.

Din (5) rezultă: $x=\frac{2a}{9}$, deci $a=9a_1$, $x=2a_1$, $y=4a_1$. Înlocuind în (1) avem: $8a_1^3+64a_1^3=72a_1^3$, iar în (2):

$$(9a_1-4a_1)16a_1^2=(18a_1+2a_1)4a_1^2,$$
$$5a_1\cdot 16a_1^2=20a_1\cdot 4a_1^2,$$

identităţi evidente. Prin urmare, pentru $a=9a_1$ obţinem soluţiile: $a=2a_1$, $y=4a_1$, unde a_1 este întreg pozitiv.

Din (7) mai avem:

$$t^4+2t^3+t+1=0,$$

(8)

ecuaţie care nu e satisfăcută pentru $t=\pm 1$ (divizori ai termenului liber), deci nu e satisfăcută pentru nicio valoare raţională a lui t. Cum însă $t=\frac{y}{x}$, iar x şi y sînt întregi. t trebuie să fie raţional. Prin urmare, ecuaţia (8) nu dă nici o valoare acceptabilă pentru t,

Pentru $t=2$, avem: $a=9a_1$, $x=2a_1$, $y=4a_1$.

a_1	1	2	3	4	5	...
a	9	18	27	36	45	...
x	2	4	6	8	10	...
y	4	8	12	16	20	

Notă. — Există şi valori fracţionare pentru a_1 care dau valori întregi pentru x şi y:

$$x=\frac{2}{9}a=\frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}a_1\right)=a_1,$$

unde a_1 este un număr întreg; atunci $y=2a_1$. Deci, dacă $a=\frac{9}{2}a_1$, sistemul admite de asemenea soluţii întregi pentru orice a_1 întreg.

Problema 2244

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{S_n}{a_1a_n},$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt nişte numere pozitive în progresie aritmetică, iar S_n suma lor.

N. Gheorghiu

Soluţia I. — Demonstraţie prin inducţie. Pentru $n=1$, este evident. Presupunînd inegalitatea adevărată pentru n şi adăugînd în ambii termeni $\frac{1}{a_{n+1}}$ urmează:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\leqslant\frac{S}{a_1a_n}+\frac{1}{a_{n+1}},$$

Dar $\frac{S_n}{a_1a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\leqslant\frac{S_{n+1}}{a_1a_{n+1}}$ sau

$$a_{n+1}S_n+a_1a_n\leqslant a_n(S_n+a_{n+1}) \quad \text{sau} \quad (a_{n+1}-a_n)S_n\leqslant a_n(a_{n+1}-a_1).$$

Dar $a_{n+1} - a_n = r$ şi $a_{n+1} - a_1 = nr$, unde r este raţia. Deci $S_n \leqslant n a_n$ care este adevărată, progresia fiind crescătoare.

Soluţia II. — Fie $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ sau

$$T_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1},$$

adunînd rezultă:

$$2\,T_n = \frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n} + \frac{a_2 + a_{n-1}}{a_2 a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n} = (a_1 + a_n)\left(\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_n}\right).$$

Dar $$\frac{1}{a_p a_{n-p+1}} \leqslant \frac{1}{a_1 a_n} \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Inegalitatea de mai sus se scrie:

$$a_1 a_n \leqslant a_p a_{n-p+1}$$

sau $$a_1 [a_1 + (n-1) r] \leqslant [a_1 + (p-1) r]\,[a_1 + (n-p) r].$$

înmulţind avem:

$$a_1^2 + (n-1) a_1 r \leqslant a_1^2 + (n-p) a_1 r + (p-1) a_1 r + (p-1)\,(n-p) r^2$$

sau

$$(n-1) a_1 \leqslant (n-p) a_1 + (p-1) a_1 + (p-1)\,(n-p) r,$$

adică

$$(p-1)\,(n-p) r \geqslant 0,$$

$$(p-1)\,(n-p) \geqslant 0,$$

care este adevărată dacă ţinem seamă de valorile pe care le ia p.

Deci:

$$2\,T_n \leqslant (a_1 + a_n)\,\frac{n}{a_1 a_n}.$$

Cum $$\frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = S_n, \quad \text{avem:} \quad T_n \leqslant \frac{S_n}{a_1 a_n}.$$

Problema 2266

Să se rezolve sistemul:

$$\log_x y + \log_{3x} y^2 = 4,$$

$$\log_y x + \log_{3y} x^2 = \frac{7}{6}.$$

N. C. Ciomu

Soluţie. — Notăm: $\log_x y = \alpha$; deci $y = x^\alpha$. Ecuaţia primă devine:

$$\alpha + \log_{3x} x^{2\alpha} = 4,$$

de unde: $\log_{3x} x^{2\alpha} = 4 - \alpha$, deci $x^{2\alpha} = (3x)^{4-\alpha}$ şi în fine:

$$x = 3^{\frac{4-\alpha}{3\alpha-4}}, \quad \text{iar} \quad y = 3^{\frac{\alpha(4-\alpha)}{3\alpha-4}}.$$

Ecuaţia a doua devine:

$$\log_{3^{\frac{\alpha(4-\alpha)}{3\alpha-4}}} 3^{\frac{4-\alpha}{3\alpha-4}} + \log_{3^{\frac{-\alpha^2+7\alpha-4}{3\alpha-4}}} 3^{\frac{2(4-\alpha)}{3\alpha-4}} = \frac{7}{6},$$

sau

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{2(4-\alpha)}{-\alpha^2+7\alpha-4}=\frac{7}{6},$$

de unde:

$$-6\alpha^2+42\alpha-24+48\alpha-12\alpha^2=-7\alpha^3+49\alpha^2-28\alpha,\ 7\alpha^3-67\alpha^2+118\alpha-24=0.$$

Se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&7(\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8)-25\alpha^2+34\alpha+32=0,\\
&7(\alpha-2)^3-25(\alpha^2-4\alpha+4)-66\alpha+132=0,\\
&7(\alpha-2)^3-25(\alpha-2)^2-66(\alpha-2)=0,\\
&(\alpha-2)\,[7(\alpha-2)^2-25(\alpha-2)-66]=0.
\end{aligned}\qquad (1)$$

O primă soluție a ecuației (1) este $\alpha=2$, pentru care $x=3^{\frac{4-\alpha}{3\alpha-4}}=3$, $y=x^{\alpha}=9$ care verifică sistemul. Mai obținem din (1):

$$7(\alpha-2)^2-25(\alpha-2)-66=0,$$

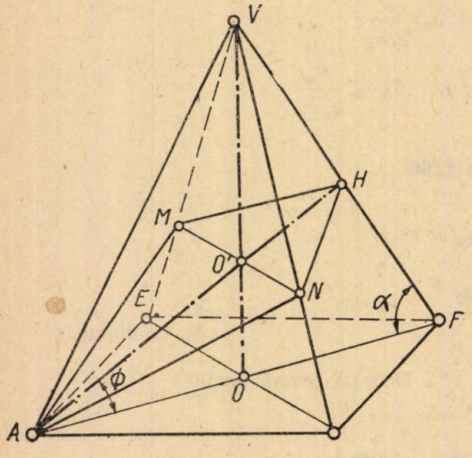
de unde:

$$\alpha-2=\frac{25\pm\sqrt{625+1848}}{14}\ ;\ \alpha=\frac{53\pm\sqrt{2473}}{14}.$$

Problema 2292

Se dă o piramidă regulată cu baza un patrat a cărei muchie laterală face cu planul bazei un unghi α. Secționînd această piramidă cu un plan inclinat cu unghiul φ față de bază, să se afle aria secțiunii obținute în funcție de unghiurile α și φ și latura a a patratului de bază.

Soluție, dată de **Lucia Both**, studentă Timișoara.



$$S=S_{AMN}+S_{MNH}=\frac{MN\cdot AO'}{2}+\frac{MN\cdot O'H}{2};$$

$$S=\frac{MN}{2}(AO'+O'H)=\frac{MN\cdot AH}{2};$$

însă $MN=2\,O'M$.

În triunghiurile $MO'V$ și VOE (dreptunghice cu vîrf comun):

$$\frac{MO'}{OE}=\frac{VO'}{VO};\ VO=OE\operatorname{tg}\alpha\ \text{(tr. dr. } VOE)$$

sau

$$VO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$VO'=VO-OO';\qquad OO'=AO\operatorname{tg}\varphi;$$

$$OO'=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi;\quad VO'=\frac{a\sqrt{2}}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi).$$

Rezultă:

$$MO'=\frac{a\sqrt{2}}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{ctg}\alpha$$

și

$$MN=a\sqrt{2}\,(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{cotg}\alpha.$$

În triunghiul oarecare AHF aplicăm teorema sinusurilor: $AF = a\sqrt{2}$;

$$H = 180 - (\alpha + \varphi); \quad \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin[180^\circ - (\alpha + \varphi)]}; \quad AH = a\sqrt{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)};$$

de unde

$$S = \frac{a^2}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Problema 2295

Să se construiască triunghiul ABC înscris într-un cerc dat, cunoscînd unghiul A, care satisface şi relaţia: $\cos^2 A = \cos B \cdot \cos C$.

Gh. Bazacov

Soluţie. — Presupunem construit triunghiul ABC în cercul dat. Fie H ortocentrul triunghiului şi OM perpendiculara dusă din centrul O pe latura BC. Înălţimea AA_1 este împărţită de H în două segmente: HA şi HA_1. Se ştie că $HA = 2\,OM$ şi că raza cercului circumscris triunghiului AHB este egală cu aceia a triunghiului ABC.

Din triunghiul AHB obţinem $AH = 2R\sin B_2 = 2R\cos A$. (1)

În triunghiul HBC, segmentul HA_1 este înălţime şi atunci, conform unei teoreme cunoscute, putem scrie:

$$2R \cdot HA_1 = HB \cdot HC,$$

dar $HB = 2R\sin C_1 = 2R\cos B$ şi $HC = 2R\sin B_1 = 2R\cos C$, atunci

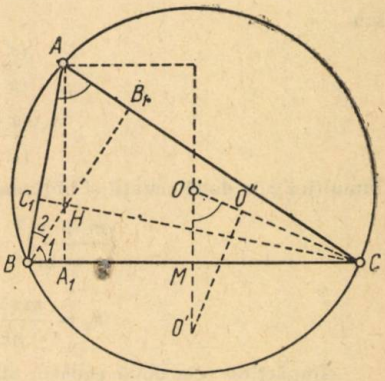
$2R \cdot HA_1 = 4R\cos B\cos C$ sau $HA_1 = 2R\cos B\cos C$.

Ţinînd seama de relaţia (1) şi de relaţia dată în enunţul problemei, avem:

$HA_1 = 2R\cos^2 A = 2R\cos A \cdot \cos A = HA\cos A$.

Deci am obţinut o legătură între HA_1 şi HA:

$$HA_1 = HA\cos A.$$



Construcţia triunghiului. În cercul dat construim un unghi cu vîrful în centrul O de mărime egală cu unghiul A dat, adică $\sphericalangle COC'$.

Din C ducem o perpendiculară pe OC' care taie pe OC' în M, iar cercul în B. În felul acesta am construit latura BC şi distanţa $OM = \frac{AH}{2}$; rezultă că AH este construit.

Să determinăm prin construcţie şi pe HA_1. Ne folosim de relaţia $HA_1 = HA\cos A$. Construim simetricul lui O faţă de BC, adică O'; din O' ducem perpendiculară pe OC care taie pe OC în O''. Rezultă că $OO'' = HA\cos A = HA_1$

Astfel, înălţimea AA_1 este construită, cunoscînd cele două segmente ale ei, pe HA şi HA_1

Problema revine acum la o construcţie cunoscută şi anume, la construirea triunghiului cînd cunoaştem pe R_1, $\sphericalangle A$ şi h_a.

Notă. Ţinînd seamă de relaţiile $HA = 2R\cos A$, $HB = 2R\cos B$ şi $HC = 2R\cos C$, relaţia din enunţ devine $HA^2 = HB \cdot HC$.

Problema 2297

Dacă $\alpha + \beta = 45^\circ$, *să se arate că*

$$\sec^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\beta)^2 + \sec^2\beta(1 + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 2(\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\beta).$$

N. Păun, R. Vîlcea

Soluție — Avem:

$$\sec^2\alpha\,(1+\operatorname{cotg}\beta)^2+\sec^2\beta\,(1+\operatorname{cotg}\alpha)^2=\sec^2\alpha\,(\operatorname{cotg}45^\circ+\operatorname{cotg}\beta)^2+$$

$$+\sec^2\beta\,(\operatorname{cotg}45^\circ+\operatorname{cotg}\alpha)^2=\frac{\sec^2\alpha\sin^2(45^\circ+\beta)}{\sin^2 45^\circ\sin^2\beta}+\frac{\sec^2\beta\sin^2(45^\circ+\alpha)}{\sin^2 45^\circ\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sec^2\alpha\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}\sin^2\beta}+\frac{\sec^2\beta\cos^2\beta}{\frac{1}{2}\sin^2\alpha}=2\,(\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta).$$

Problema 2299

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{nx+my}{xy+mn}=\frac{a^2-1}{a^2+1},$$

$$\frac{my-nx}{xy-mn}=\frac{b^2-1}{b^2+1}.$$

Gh. Nicoară, București

Soluție. — Folosind o proprietate a proporțiilor avem:

$$\frac{nx+my+xy+mn}{xy+mn-nx-my}=a^2,$$

$$\frac{my-nx+xy-mn}{xy-mn-my+xn}=b^2$$

sau

$$\frac{(x+m)(y+n)}{(x-m)(y-n)}=a^2;$$

$$\frac{(x+m)(y-n)}{(y+n)(x-m)}=b^2.$$

Înmulțim cele două ecuații și obținem:

$$\left(\frac{m+x}{x-m}\right)^2=a^2b^2\quad;\quad\frac{m+x}{x-m}=\pm ab;$$

$$x_1=\frac{m(1+ab)}{ab-1}\quad;\quad x_2=\frac{m(ab-1)}{1+ab}.$$

Împărțind cele două ecuații, obținem:

$$\left(\frac{n+y}{y-n}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\quad;\quad\frac{n+y}{y-n}=\pm\frac{a}{b}\quad;\quad y_1=\frac{n(b+a)}{a-b}\quad;\quad y_2=\frac{n(a-b)}{b+a}.$$

Problema 2303

Să se rezolve sistemul:

$$xy=2,$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{4}.$$

Gh. Călugăriță

Soluția autorului. — Notăm

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}=u\ \text{și deci}\ \operatorname{tg}u=\frac{x}{\sqrt{2}},\quad\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{y}=v\ \text{și deci}\ \sin v=\frac{1}{y};\ \cos v=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.$$

Ecuația a doua se scrie:

$$2u - v = \frac{\pi}{4} \text{ sau } 2u = \frac{\pi}{4} + v$$

și deci

$$\operatorname{tg} 2u = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + v\right)$$

sau încă,

$$\frac{2\operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} = \frac{1 + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} v} = \frac{\cos v + \sin v}{\cos v - \sin v},$$

deci

$$\frac{2\sqrt{2}\,x}{2 - x^2} = \frac{\sqrt{y^2 - 1} + 1}{\sqrt{y^2 - 1} - 1}$$

și ținînd seama că $xy = 2$, ecuația devine

$$\frac{2\sqrt{2}\,y}{y^2 - 2} = \frac{y^2 + 2\sqrt{y^2 - 1}}{y^2 - 2}\ ;\ \text{de unde } x = y = \sqrt{2}.$$

o soluție care verifică sistemul dat.

Problema 2306

Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ cu centrul de greutate G și un punct Z din spațiu. Să se stabilească relația:

$$\sum \overline{ZA_1}^2 = 4\overline{ZG}^2 + \sum GA_1^2.$$

M. D. Zigulescu, student București

Soluție. — Fie MN bimediana corespunzătoare muchiilor A_1A_2, A_3A_4. Aplicînd teorema medianei în triunghiurile ZA_1A_2, ZA_3A_4, GA_1A_2, GA_3A_4, ZMN, avem respectiv:

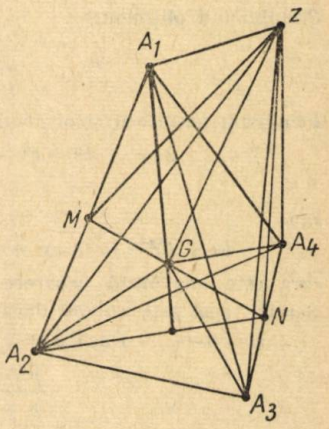
(1) $$ZA_1^2 + ZA_2^2 = 2ZM^2 + \frac{1}{2} \cdot A_1A_2^2,$$

(2) $$ZA_3^2 + ZA_4^2 = 2ZN^2 + \frac{1}{2} \cdot A_3A_4^2,$$

(3) $$GA_1^2 + GA_2^2 = 2GM^2 + \frac{1}{2} \cdot A_1A_2^2,$$

(4) $$GA_3^2 + GA_4^2 = 2 \cdot GN^2 + \frac{1}{2} \cdot A_3A_4^2,$$

(5) $$ZM^2 + ZN^2 = 2ZG^2 + \frac{1}{2} MN^2.$$



Aducînd (1) cu (2) și scăzînd (3) și (4), avem:

$$\sum ZA_1^2 - \sum GA_1^2 = 2\,(ZM^2 + ZN^2) - 2\,(GM^2 + GN^2).$$

Ținînd seamă de (5) avem

$$\sum ZA_1^2 = 4 \cdot ZG^2 + MN^2 + \sum GA_1^2 - 2\,(GM^2 + GN^2).$$

Cum se știe că $GM = GN = \frac{MN}{2}$, rezultă relația din enunț.

Problema 2315

Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, să se arate că:

$$\frac{15}{4} \leqslant \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} \leqslant \frac{9}{2},$$

unde $2p$ este perimetrul triunghiului.

N. Ciorănescu

Soluție. — Deoarece $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$ sau $a - b - c < 0$, $b - a - c < 0$, $c - a - b < 0$; $\frac{p+a}{b+c} = \frac{3a+b+c}{2(b+c)} = \frac{3a}{2(b+c)} + \frac{1}{2}$,

$$\frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} = \frac{3a}{2(b+c)} + \frac{3b}{2(a+c)} + \frac{3c}{2(a+b)} + \frac{3}{2}.$$

Inegalitatea a doua devine

$$\frac{3a}{2(b+c)} + \frac{3b}{2(a+c)} + \frac{3c}{2(a+b)} + \frac{3}{2} < \frac{9}{2}.$$

După reduceri și simplificări obținem:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2,$$

care se transformă în

$$a^3 + b^3 + c^3 - abc - a^2 b - a^2 c - ab^2 - b^2 c - ac^2 - bc^2 < 0$$

sau

$$a^2(a - b - c) + b^2(b - a - c) + c^2(c - a - b) - abc < 0,$$

care este negativă căci este formată din părți negative.

Prima inegalitate devine

$$\frac{3a}{2(b+c)} + \frac{3b}{2(a+c)} + \frac{3c}{2(a+b)} + \frac{3}{2} \geqslant \frac{15}{4}.$$

Simplificînd obținem:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Eliminăm numitorii și obținem

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) \geqslant$$
$$\geqslant 3(a^2b + a^2c + bc^2 + ab^2 + ac^2 + b^2c)$$

sau

$$(a + b)^3 + (a + c)^3 + (b + c)^3 \geqslant 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ac(a + c);$$

care este adevărată deoarece $(a + b)^2 > 4ab$, deci și $(a + b)^3 > 4ab(a + b)$, etc. ....
Semnul egal este valabil dacă triunghiul este echilateral.

Observare. — Dacă $a = 2b = 2c$, atunci

$$\frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} = 4 < \frac{9}{2}.$$

Problema 2317

Să se rezolve ecuația:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

* * *

Soluție dată de **Bușilă Ioana** (s.m. 7 București). — Pentru $x = 1$ membrul întîi al ecuației este egal cu zero, deci polinomul $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1$ se împarte exact cu $x - 1$. Deci una dintre soluții este $x = 1$. Avem:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = (x - 1)(16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1).$$

Deci, $16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$. Împărțim această ecuație cu x^2 și avem:

$$16x^2 + 16x - 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Mai putem scrie:

$$\left(16x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(4x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0. \tag{1}$$

Punem

$$4x - \frac{1}{x} = y. \tag{2}$$

Avem: $16x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 8$, înlocuind în (1) avem:

$$y^2 + 8 + 4y - 4 = 0 \quad \text{sau} \quad y^2 + 4y + 4 = 0,$$

— ecuație care are rădăcină dublă $y = -2$. Înlocuind în (2) obținem:

$$4x - \frac{1}{x} = -2 \quad \text{sau} \quad 4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

deci:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

fiecare din ele este rădăcină dublă.

Rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \quad x_{4,5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Problema 2321

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) + \operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\gamma) + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha) \geqslant 6$$

unde α, β *și* γ *sînt unghiurile unui triunghi.*

Soluție dată de **Th. Schein** (s.m. 1. București). — La rezolvarea acestei probleme ne folosim de faptul că media aritmetică a două numere este mai mare decît media lor armonică.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \tag{1}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4. \tag{2}$$

Înlocuind: $a = \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{1}{a} = \operatorname{cotg}\alpha$; $b = \operatorname{tg}\beta$; $\frac{1}{b} = \operatorname{cotg}\beta$, relația (2) devine:

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) = 2 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\alpha \geqslant 4,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\alpha \geqslant 2. \tag{3}$$

Prin permutări circulare obținem:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\alpha > 2, \\ &\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg}\gamma > 2, \\ &\operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{tg}\beta > 2. \end{aligned}$$

Adunînd aceste ultime relații din (4) obținem relația din enunț.

Problema 2323

Într-un triunghi în care centrul de greutate este coliniar cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, există relația

$$\cos\frac{C-B}{2} = 3\cos\frac{C+B}{2};$$

laturile cu punctele de tangență sînt cele ce formează unghiul A.

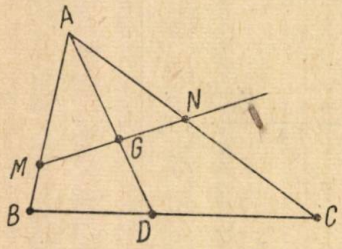
I. Hodîrcă, Breaza

Soluție. — Fie M și N puncte de tangență ale cercului înscris. Pentru D oarecare și MN oarecare există relația

$$BD \cdot \frac{AC}{AN} + DC \cdot \frac{AB}{AM} = BC \cdot \frac{AD}{AG}$$

(a se vedea Nota matematică asupra problemei 1301, GMF (B) nr. 1/956).

Ținînd seamă că AD este mediană, iar G centru de greutate obținem:



$$\frac{BC}{2\,AN}(AB + AC) = BC\,\frac{AD}{\frac{2}{3}AD}.$$

După simplificare rămîne

$$\text{(1)} \qquad AB + AC = 3\,AN \qquad (AM = AN).$$

Dar

$$AN = \frac{AB + AC - BC}{2},$$

așa că relația (1) devine

$$\text{(2)} \qquad AB + AC = 3\,BC.$$

Punînd $AB = 2R \sin C$; $AC = 2R \sin B$ și $BC = 2R \sin A = 2R \sin (B + C)$, deoarece $A + B + C = 180$, obținem

$$\text{(3)} \qquad \sin C + \sin B = 3 \sin (B + C)$$

sau

$$2 \sin\frac{C+B}{2}\cos\frac{C-B}{2} = 3 \cdot 2 \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

deci

$$\cos\frac{C-B}{2} = 3\cos\frac{C+B}{2}.$$

Observare. — Pentru determinarea triunghiului se pot pune condiții.

Se poate calcula ușor că triunghiurile dreptunghice ce satisfac condiția: centrul de greutatea să fie coliniar cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, au laturile

de forma: $a = 5k$, $b = 4k$ și $c = 3k$ ($k > 0$), adică multipli ai laturilor triunghiului folosit de egipteni.

2° Se vede că perimetrul unui triunghi mai sus amintit, are valoare egală cu de patru ori latura ce se opune unghiului A:

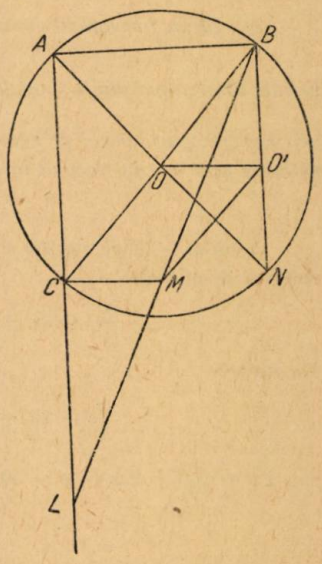
$$p = 4\ BC.$$

Problema 2339

Într-un cerc de rază R se ia o coardă fixă AB și o coardă mobilă AC. Se prelungește AC cu $CD = AC$. Mijlocul dreptei BD este M. Să se găsească locul geometric al punctului M.

* * *

Soluție dată de **Bușilă A. Ioana** (s.m. 7 București). — Diametrul AO taie cercul a doua oară în N. Unim BN și prin O ducem o paralelă OO_1 la AB; $CM = \frac{AB}{2}$ și paralel cu AB; $OO_1 = \frac{AB}{2}$ și paralel cu AB, deci $CM = OO_1$ și paralel cu OO_1. Figura $OO_1\,CM$ este un paralelogram:



$$O_1 M = OC = R.$$

Locul geometric al punctului M este un cerc cu centrul în O_1 și de rază egală cu R.

Problema 2387

Să se arate că expresia:

$$E = \frac{1 - 2x^m + 2x^{3m} - x^{4m}}{1 - 4x^{2n} + 2x^{3n} + 3x^{4n} - 2x^{5n}}$$

pentru $x = 1$ are valoare $\frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3$.

C. Ionescu—Țiu

Soluție. — Expresia se mai scrie:

$$E = \frac{(1 - x^m)^3 (1 + x^m)}{(1 - x^n)^3 (1 + x^n)(1 + 2x^n)}.$$

Cum

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}),$$

avem:

$$E = \frac{(1 + x + \cdots + x^{m-1})^3 (1 + x^m)(1 - x)^3}{(1 + x + \cdots + x^{n-1})^3 (1 + x^n)(1 + 2x^n)(1 - x)^3}$$

care se simplifică cu $(1 - x)^3$.

Pentru $x = 1$ avem:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x + \cdots + x^{m-1})^3 (1 + x^m)}{(1 + x + \cdots + x^{n-1})^3 (1 + x^n)(1 + 2x)} = \frac{m^3\,2}{n^3\,2 \cdot 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

Problema E: 852

Diferența a două numere este 118. Împărțind numărul cel mare la cel mic obținem citul 2 și restul 47. Să se afle cele două numere.

* * *

Soluție. — Dacă notăm cu N numărul cel mare, numărul cel mic va fi $N - 118$, și avem, ținînd seama de identitatea fundamentală a împărțirii,

$$\frac{N - 47}{N - 118} = 2 \; ; \quad (D = I \cdot C + R)$$

$$N - 47 = 2N - 236,$$

$$N = 236 - 47,$$

$N = 189$, numărul mai mare,

$N - 118 = 71$, numărul mai mic.

Problema E: 855

Un țăran întovărășit consumă jumătate plus $\frac{1}{4}$ *quintale din grîul recoltei anului pentru nevoile casei; apoi vinde jumătate din rest plus* $\frac{13}{4}$ *quintale pentru a-și instala o baie și pentru a-și cumpăra un aparat de radio. Știind că i-au mai rămas* 112,50 *kg grîu se întreabă, ce cantitate de grîu a avut țăranul la început?*

Domide Leontin, Rodna

Soluție. — Dacă notăm cu x cantitatea de grîu ce a avut țăranul la început, sîntem conduși la ecuația:

$$\frac{x}{2} + 25 + \left[x - \left(\frac{x}{2} + 25\right)\right]\frac{1}{2} + 325 + 112{,}50 = x.$$

De unde:

$$\frac{x}{2} + 25 + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{25}{2} + 325 + 112{,}50 = x,$$

sau $2x + 100 + 2x - x - 50 + 1300 + 450 = 4x$, de unde $x = 1800$ kg.

Problema E: 866

Dacă $a + b + c = 0$, *atunci* $\dfrac{(a + b - 2c)^4 + (b + c - 2a)^4 + (c + a - 2b)^4}{(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4} = 9.$

Gh. I. Stoian, student București

Soluție. — Avem:

$$\begin{aligned}
&A^4 + B^4 + C^4 = A^4 + (B^2 + C^2)^2 - 2B^2C^2 = \\
&= A^4 + [(B + C)^2 - 2BC]^2 - 2B^2C^2 = \\
&= A^4 + (A^2 - 2BC)^2 - 2B^2C^2 = \\
&= A^4 + A^4 - 4A^2BC + 2B^2C^2 = \\
&= 2A^2(A^2 - 2BC) + 2B^2C^2 = \\
&= 2A^2[(B + C)^2 - 2BC] + 2B^2C^2 = \\
&= 2A^2(B^2 + C^2) + B^2C^2 = 2(A^2B^2 + B^2C^2 + C^2A^2) = \\
&= 2[(AB + BC + CA)^2 - 2ABC(A + B + C)] = \\
&= 2(AB + BC + CA)^2.
\end{aligned}$$

Fie E_1 și E_2 respectiv numărătorul și numitorul expresiei date.
Avem:

$$(a + b - 2c) + (b + c - 2a) + (c + a - 2b) = 0.$$

Prin urmare, putem aplica relația stabilită mai sus la calcularea expresiei.

$$E_1 = 2\,[(a+b-2c)(b+c-2a)+(b+c-2a)(c+a-2b)+(c+a-2b)(a+b-2c)]^2 =$$
$$= 2\,[(b+c-2a)(a+b-2c+c+a-2b)+(c+a-2b)(a+b-2c)]^2 =$$
$$= 18\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)^2;\ (a-b)+(b-c)+(c-a)=0;$$
$$E_2 = 2\,[(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)]^2 =$$
$$= 2\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2).$$

Deci,

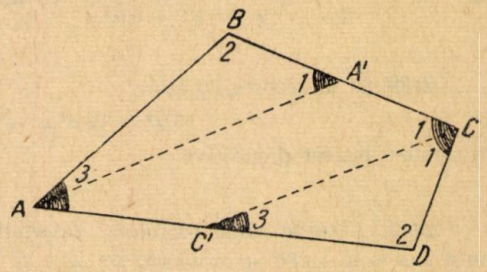
$$E = \frac{E_1}{E_2} = \frac{18\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)}{2\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)} = 9.$$

Problema E: 871

Într-un patrulater bisectoarele a două unghiuri opuse sînt paralele. Ce legătură există între celelalte două unghiuri?

* * *

Soluție. — Se observă că $\sphericalangle BA'A = \sphericalangle BCC'$ ca unghiuri corespondente, dreptele AA' și CC' fiind paralele tăiate de secanta BC; rezultă că $\sphericalangle BA'A = \sphericalangle C'CD$, egalul unghiului BCC' (CC' e bisectoarea unghiului BCD). Totodată $\sphericalangle A'AC' = CC'D$ ca unghiuri corespondente formate de aceleași paralele tăiate însă de secanta AD. Deci $\sphericalangle CC'D$ va fi egal și cu $\sphericalangle BAA'$. Triunghiurile $AA'B$ și $CC'D$ sînt asemenea avînd două unghiuri egale. Rezultă că unghiuri le ABC și ADC sînt egale.



REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă «Redactarea soluțiilor».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957, G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și mențiuni.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor.

PROBLEME PROPUSE*

2737. O bară AB omogenă de lungime l este articulată la capătul A, iar în capătul B este prevăzută cu un scripete fără frecare. Din punctul C situat pe verticală deasupra punctului A la distanța $AC=d$ este ancorat un cablu flexibil, care este trecut apoi peste scripete și de care este suspendată o greutate G. Greutatea barei AB fiind p kg/ml, iar greutatea scripetului și a cablului fiind neglijabile, să se studieze poziția de echilibru a sistemului.

Caz particular: $l=8$m, $d=5$m, $p=30$ kg. $G=960$ kg. Să se afle cea mai mică valoare a greutății G pentru ca bara să cadă.

C. Ionescu — Țiu

2738. La o piramidă regulată notăm cu α unghiul diedru de la bază, cu β unghiul diedru a două fețe laterale adiacente și cu γ unghiul a două muchii laterale vecine. Să se stabilească relațiile:

(1) $$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}=\sqrt{1+2\cos\gamma}$$ pentru piramida triunghiulară;

(2) $$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}=\sqrt{\cos\alpha}$$ patru piramida patrulateră.

Corneliu Georgescu, Craiova

2739. Să se rezolve ecuația:

$$5x^3-10x^2y^2+6xy^4-y^6=0$$

în numere întregi și pozitive.

V. Baltag, elev Ploești

2740. Laturile unui patrulater inscriptibil $ABCD$ sînt $AB=4a$, $BC=3a$, $CD=2a$ și $DA=a$. 1) Să se arate că: $\sin A=\operatorname{tg} B$;

2) cum se poate contrui un asemenea patrulater cunoscînd una din laturi?

Gh. Bazacov, profesor Turnu Severin

2741. Să se arate că $E=14973^{11654}+11654^{14973}+1$ este divizibilă cu 63.

I. Ciolac, profesor Craiova

2742. Pentru fierberea apei dintr-un ceainic s-a întrebuințat o lampă de gătit cu petrol, avînd randamentul de 30%. Dacă am fi avut la îndemînă un fierbător electric cu rezistența de 10 ohmi, pus la priza de curent de 120 V, apa ar fierbe în 10 minute.

Știind că apa se află la temperatura de 10°C, randamentul fierbătorului electric este de 85%, iar puterea calorică a petrolului este 11 000 cal/g, se cere:

a) cantitatea apei din ceainic, *b)* cantitatea de petrol consumată de lampă

* * *

2743. Fie ABC un triunghi oarecare și AD, $B\beta$, $c\gamma$ ceviene în triunghi. Dreptele $D\gamma$, $D\beta$, $\beta\gamma$ taie respectiv pe $B\beta$, $C\gamma$, CB în punctele M,N,α. Să se arate că punctele α, M,N sînt colineare.

* * *

2744. Fie cercul O circumscris triunghiului oarecare ABC, iar I un punct variabil în plan. Dreptele CI și BI taie cercul în M și N, iar pe AB și AC respectiv în E și F. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor MN și EF.

Marcel Bărbulescu, elev Slatina

---

* Clasa VIII-a: 2741; 2742; 2744; 2749; 2757; 2759; 2762; 2764; 2765; 2766; 2767; 2770.

2745. Într-un tub Crookes și la temperatura de 20°C, un fascicul de raze catodice acționează timp de un minut asupra unei plăci de platină cu suprafața de 1 cm^2 și cu grosimea de 0,1 cm și o topește. Știind că temperatura de topire a platinei este de 1764°C, iar viteza electronilor 0,1 din viteza luminii, se cere:

a) masa tuturor electronilor care bombardează platina știind că masa unui electron este de 9.10^{-28} g.

b) Care este numărul electronilor ce formează fasciculul?

Date suplimentare: densitatea platinei 21,5g/cm^3, iar căldura specifică a platinei 0,03 cal/g.

Cercul de fizică cl. X s.m. 2, Constanța

2746. Dacă într-un triunghi dreptunghi unghiul $ABC = 15°$ să se demonstreze că $BD^2 + DC^2 = 14\ BD.DC$, punctul D fiind piciorul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei BC.

Anton Grecu, elev Roșiori de Vede

2747. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ și o dreaptă care întîlnește dreptele AB, BC, CD, DA în punctele L, M, N, P respectiv. Să se arate că $AP.BL.CM.DN = AL.BM.CN.DP$.

C. Albuleț, profesor Alexandria

2748. La dizolvarea a 4,28 g de glicol în 400 g apă punctul de solificare a scăzut cu 0,319°C. Constanta crioscopică a apei fiind egală cu 1,86°C să se determine greutatea moleculară a substanței de disociere a substanței dizolvate.

Chiril Delighioz, elev Brăila

2749. Un aerostat cu volumul $V = 150\ m^3$ este umplut cu hidrogen de greutate specifică 0,09 kg/m^3. La părăsirea terenului aerostatul are o forță ascensională $F = 20$ kgf. Dîndu-se greutatea specifică $\gamma_0 = 1{,}3$ kg/m^3 și presiunea $p^0 = 760$ mm coloană de mercur ale aerului la suprafața pămîntului, se cere:

1) greutatea proprie a aerostatului (înveliș, nacelă și accesori exclusiv greutatea hidrogenului);

2) înălțimea de ridicare a aerostatului admițînd că la fiecare 10 m înălțime presiunea aerului scade cu 1 mm coloană de mercur.

C. Necșoiu

3750. Într-un circuit electric de curent continuu s-a intercalat un voltametru cu soluție de $CuSO_4$, cu rezistența de 2,4 Ω, un voltmetru shuntat în paralel avînd rezistența shuntului de 1 Ω, iar a voltametrului de 100 Ω, și o bobină pe care s-a înfășurat sîrmă de cupru avînd diametrul de 1,2 mm.

Date suplimentare: $\rho = 0{,}017\ \frac{mm^2}{m}$; $k = 0{,}33\ \frac{mg}{C}$; diametrul bobinei este de 4 cm.

Să se calculeze: 1) intensitatea curentului din circuit dacă la catod se depun 3,3 g cupru metalic în timp de 20 minute.

2) rezistența bobinei dacă e formată din 3 straturi în serie și coaxiale, suprapuse, totalizînd 400 spire izolate;

3) tensiunea pe care o arată voltmetrul;

4) tensiunea la bornele generatorului;

5) intensitatea cîmpului creat de curent în centrul bobinei;

6) pe ce lungime s-a bobinat sîrma.

V. Dragu, profesor Constanța

2751. În triunghiul ABC se înseamnă cu I centrul cercului înscris, cu I' complementarul reciprocului punctului I și cu K punctul simedian.

1) Să se arate că punctele I, I', K sînt colineare.

2) Să se calculeze raportul $I'I:I'K$, în funcție de elementele triunghiului.

3) Să se calculeze distanța OI', O fiind centrul cercului circumscris triunghiului, în funcție de elementele triunghiului.

Cezar Coșniță

2752. Se formează un șir de numere în care un termen oarecare este dat prin expresia:

$$U_n = ax_1^n + bx_2^n,$$

a și b fiind niște constante date, iar x_1 și x_2 rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 - x - 1 = 0$.

1) Să se demonstreze că în șirul de numere astfel format:

(1) $$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$$

orice termen este egal cu suma celor doi termeni precedenți:

$$(U_n = U_{n-1} + U_{n-2}).$$

2) Să se determine a și b astfel ca primii doi termeni ai șirului (1) să fie 0 și 1. ($U_0 = 0$, $U_1 = 1$); în acest caz să se dea formula generală pentru un termen oarecare U_n și să se demonstreze că:

$$U_n^2 - U_{n+1} \cdot U_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

3) Să se demonstreze că orice doi termeni consecutivi ai șirului detrminat sub 2) sînt numere prime între ele.

4) Dacă a și b sînt două segmente date, să se indice o metodă de construcție cu rigla și compasul, succesiv termenii șirului

$$U_n = ax_1^n + bx_2^n.$$

O. Sacter

2753. *a)* O lentilă plan-concavă are raza de curbură a feței concave de 10 cm. Un obiect de 6 cm se află la 20 cm de lentilă. Care sînt poziția și mărimea imaginii?

b) Se alătură la lentila de mai sus, o alta egală cu ea, așezîndu-le cu concavitățile față în față; se lipește de jur împrejur o panglică de material impermeabil lăsînd în partea de sus o mică deschidere prin care se toarnă apă în golul rămas între lentile. Care va fi acum, poziția și mărimea imaginii?

Cercul de fizică din Capitală

2754. Într-un bloc mare de ghiață se face o scobitură adîncă; apoi se fac următoarele experiențe:

a) Într-o primă experiență se încălzește o bucată de bismut de 5 g pînă la temperatura de topire și bucata de bismut astfel încălzită este aruncată în scobitura blocului de gheață. După un timp, se scoate bucata de bismut, se scurge apa formată și se cîntărește, constatîndu-se că s-au format 508 g apă. Ce se poate deduce din această experiență?

b) Într-o a doua experiență se topește într-un vas de fontă, o cantitate mai mare de bismut, iar după ce tot bismutul este topit se lasă să se răcească pînă ce o parte din el se solidifică. În acel moment se scurge restul de bismut în scobitura blocului de gheață. După un timp se cîntărește bismutul și apa din scobitură, găsindu-se 1439 g bismut și 380 g apă. Ce se poate deduce din aceată a doua experiență?

(se dă temperatura de topire a bismutului: 271°C)

Cercul de fizică din Capitală

2755. Într-un patrulater convex ortodiagonal $ABCD$ de laturi $AB=a$, $BC=b$, $CD=a$, $DA=d$ să se stabilească relația:

$$a^2 b^2 (a^2 - b^2) + b^2 c^2 (b^2 - c^2) + c^2 d^2 (c^2 - d^2) + d^2 a^2 (d^2 - a^2) = 0.$$

C. Bulucea, elev R. Vîlcea

2756. Să se construiască triunghiul cunoscînd R, r și mediatoarea corespunzătoare laturii BC.

Const. Cotfas, profesor Giurgiu

2757. Să se construiască paralelogramul $ABCD$ cunoscînd latura AB și bisectoarele AE și DF.

Tiberiu Zorapapel, elev București

2758. Se ia în ordine pe o dreaptă, punctele M, P, N. Să se determine pe dreaptă punctul Q astfel ca să avem $\frac{MQ}{NQ} = \frac{MP^2}{NP^2}$.

Paul R. Popescu, student București

2759. Distanța Galați — Sulina pe Dunăre, este de 80 mile marine. O navă A, avînd viteza de 8 mile/oră pleacă din Galați spre Sulina; o navă B, avînd viteza de 7 mile/oră pleacă din Sulina spre Galați. Viteza curentului este 1 milă/oră.

Dacă navele pleacă în același moment, după cît timp se află ele la 10 mile una de alta?

C. V. Costăchescu

2760. În triunghiul oarecare ABC ($B > A > C$) dreapta lui Euler face cu tangenta în vîrfurile triunghiului la cercul circumscris, unghiurile α, β, γ. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} \geqslant \frac{7}{2}.$$

Radu Stroe, student București

2761. Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctele M, N, P și Q luate de o parte și de alta a vîrfurilor B și C, așa încît $BM = BN = BA$ și $CP = CQ = CA$.

Se proiectează M și N în M' și N' pe AC, iar P și Q în P' și Q' pe AB. Să se arate

1) Figura $M'P'N'Q'$ este un patrat;

2) suprafața patratului $M'P'K'Q'$ este constantă dacă A este fix, iar B și C se deplasează pe o dreaptă Δ fixă.

Theodor Gh. Cocea

2762. Să se arate că dacă

$$\frac{a+b}{x+c} + \frac{a+c}{x+b} + \frac{b+c}{x+a} = \frac{x+c}{a+b} + \frac{x+b}{a+c} + \frac{x+a}{b+c}$$

atunci:

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

* * *

2763. Să se arate că notînd cu O și I centrele cercurilor circumscris și înscris triunghiului oarecare ABC, dacă segmentul OI este perpendicular pe una din bisectoare, triunghiul are laturile în progresie artimetică și reciproc.

I. Hadîrcă, prof. Breaza

2764. Sora mea este cu atîția ani mai mică decît mine de cîte ori tatăl meu e mai mare decît mine. Cînd sora mea va avea vîrsta mea de acum, noi vom avea împreună cu 10 ani mai puțin decît vîrsta pe care o va avea tatăl meu; iar cînd eu voi avea vîrsta pe care o va avea tatăl meu cînd sora mea va avea vîrsta mea de acum, noi vom avea împreună cu 10 ani mai mult decît vîrsta pe care o va avea tatăl nostru. Care e vîrsta mea de acum?

Ștefan Marică, Turnu Severin

2765. Să se construiască un triunghi cunoscînd în plan:
1) picioarele a două înălțimi și piciorul unei mediane,
2) picioarele a două mediane și piciorul unei înălțimi.

Gh. Buiclin

2766. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{b+c}{x-a}+\frac{a+c}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3.$$

Alex. Iorgulescu, student București

2767. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ facem notațiile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = e$, $AC = f$. Să se demonstreze relația:

$$\frac{ade}{a+d+e}+\frac{bce}{b+c+e}=\frac{abf}{a+b+f}+\frac{cdf}{c+d+f}.$$

Gh. I. Bercea, Timișoara

2768. Să se sezolve ecuația:

$$(a\cdot\sin x)^{b\sin x}=(b\sin x)^{a\sin x}.$$

Eugen Șt. Iacob

2769. Două drepte D_1 și D_2 se rotesc în jurul unui punct fix C, așa fel ca unghiul θ dintre ele să fie constant. Cele două drepte intersectează un sistem xoy de axe oblice fixe în A și B. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC. Cazul particular $\sphericalangle xoy = \sphericalangle ACB$.

H. Dăscălescu

2770. Să se determine numerele de trei cifre pătrate perfecte cărora scăzîndu-le cîte o unitate din primele două cifre si adunînd două unități ultimei cifre, să ne dea tot patrate perfecte.

Istodor C. Valentin

2771. — Fie H ortocentrul unui triunghi ABC și R_1, R_2, R_3 razele cercurilor înscrise în triunghiurile BAC, CHA, AHB. Să se arate că

$$R_1+R_2+R_3=2p-4R-r.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI*

E: 984. Să se arate că:

$$\frac{m+n}{mn}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\frac{n+p}{np}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{p^2}.$$

Anton Grecu, elev Roșiorii de Vede

E: 985. Mama este de patru ori mai mare decît fiica; iar fiica este cu 35 ani și 3 luni mai mică decît mama. Care este vîrsta fiecăreia?

B. I. Baieră

E: 986. Suma a trei numere este 57. Dublul primului număr adunat cu triplul celui de-al treilea fac 97. Care sînt numerele dacă ultimele două sînt consecutive.

B. I. Baieră

E: 987. Din tabla găsită într-un atelier se puteau face 174 găleți și 210 bidoane, dar s-au făcut numai bidoane. Știind că pentru 5 bidoane trebuie tablă cît pentru 3 găleți, cîte bidoane s-au făcut din toată tabla?

* * *

---

* Clasa V: (E: 986; 987; 989; 1001; 1002; 1006; 1008)

E: 988. Dacă $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$ să se arate că

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(A + B + C + D)(a + b + c + d)}.$$

* * *

E: 989. Cu 105 lei s-au cumpărat 15 kg marmeladă de două calităţi: de 8 lei kg şi de 5 lei kg. Cîtă marmeladă s-a cumpărat din fiecare calitate?

* * *

E: 990. Şase muncitori lucrează normal în 5 zile 300 piese. Cu ce procent au depăşit norma dacă în 4 zile au lucrat 288 piese?

Z. Murăreci, elev C. de Argeş

E: 991. În ce bază de numeraţie numerele 40 şi 100 sînt două puteri consecutive ale lui 2 şi care sînt aceste numere în sistemul zecimal?

* * *

E: 992. Să se determine întregii a şi b astfel ca împărţirea $\frac{x^4 - ax^3 + bx + 3}{x + a}$ să se facă exact.

Indicaţie. Se face împărţirea şi se anulează restul, a şi b fiind numere întregi.

I. Strătescu, elev Călăraşi

E: 993. Să se construiască grafic triunghiul ABC la care cunoaştem $BC = 6$ cm, înălţimea $AD = 4$ cm şi mediana $CM = 5$ cm.

C. I. Ţ

E: 994. Să se construiască grafic triunghiul ABC în care se cunoaşte $BC = 6$ cm, înălţimea $CE = 3$ cm şi mediana $AF = 7$ cm.

C. I. Ţ.

E: 995. Desenaţi un poligon oarecare şi luaţi un punct P în interior, pe care-l uniţi cu toate vîrfurile poligonului. Să se demonstreze că dacă se unesc mijloacele segmentelor ce pleacă din P unul după altul, se obţine un alt poligon cu laturile paralele cu ale primului poligon şi cu aria $\frac{1}{4}$ din aceea a poligonului mare.

* * *

E: 996. Fără a se extrage rădăcina patrată şi să se verifice egalitatea:

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{\sqrt{9 + \sqrt{17}}} = \frac{1 + \sqrt{33}}{\sqrt{17 + \sqrt{33}}}.$$

Dorin Tomoiagă, elev Sighet

E: 997. Se amestecă 30 kg apă la temperatura de 50° cu 50 kg apă la temperatura de 70°. Care va fi temperatura amestecului?

* * *

E: 998. Dacă $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 1$, atunci

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) = \\ = (a+b+c)^3 (ab-c)(bc-a)(ca-b).$$

Al. Emanoil, student Bucureşti

E: 999. Pentru care valori întregi şi pozitive ale lui x fracţia $\frac{5x + 4}{x - 3}$ se reduce la un întreg pozitiv?

Ion Corbu, absolvent Bucureşti

E: 1000. Să se calculeze expresia:

$$(7x^5 - 3x^4 + x^2 - 5x + 12)^2 + (7x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 12)^2 +$$
$$+ (7x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 12)(-14x^5 + 6x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 10x - 24).$$

Simon Șt. Petre

E: 1001. Care este cel mai mic număr cu care trebuie să înmulțim pe 1958 pentru a obține un patrat perfect? dar cub perfect?

C. I. Ț.

E: 1002. Un elev spune colegului său: «Dacă ți-aș da un sfert din nucile mele după ce mai întîi mi-ai dat tu una, am avea amîndoi la fel, iar dacă mi-ai da tu un sfert din nucile tale după ce mai înainte ți-am dat eu una, aș avea de două ori cît tine». Cîte nuci are fiecare?

Dan Neculoiu, elev București

E: 1003. Să se verifice identitatea:

$$a(a+1)(a+2) + (a+1)(a+2)(a+3) + (a+2)(a+3)(a+4) +$$
$$+ (a+3)(a+4)(a+5) + (a+4)(a+5)(a+6) + 5(a+3) =$$
$$= (a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 + (a+4)^3 + (a+5)^3.$$

Răsceanu Radu, elev București

E: 1004. Să se verifice identitatea:

$$(a+b-c-d)^2 + (b+c-d-a)^2 + (c+d-a-b)^2 + (d+a-b-c)^2 =$$
$$= 4[(a+c)^2 + (b-d)^2].$$

* * *

E. 1005. Fie un triunghi ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiul format de bisectoarele unghiurilor ABC. Să se arate că

$$S_{ABC} \geqslant 4S_{A_1B_1C_1}.$$

N. Teodorescu, elev București

E: 1006. Un lucrător ar termina singur o lucrare în 6 ore și 12 minute, iar un altul în 9 ore și 45 minute. Ei lucrează împreună și încasează în total 241, 80 lei. Să se afle:

a) cît se cuvine fiecăruia dintre cei doi lucrători și

b) în cît timp au executat lucrarea împreună.

(Olimpiada 1957, lucrare scrisă cl. VI)

E: 1007. Un cub de plumb cu densitatea de 11 și cu latura de 9 cm se află într-un vas cu alcool de densitate 0,8 la o adîncime de 2,5 metri față de suprafața lichidului.

a) Care este forța necesară ridicării cubului spre suprafața lichidului.

b) Care este puterea folosită dacă ridicarea cubului pînă la suprafața lichidului s-a făcut în timp de 4 secunde?

(Olimpiada 1957, lucrare scrisă pentru cl. VI)

E: 1008. S-au cumpărat 2 covoare și 3 covoraşe cu 3939 lei. După ce prețul covoarelor a scăzut cu 30 % și prețul covoraşelor a scăzut cu 20 %, s-au cumpărat încă 5 covoare și un covoraș plătindu-se 5536 lei.

Să se afle prețul unui covor înainte de reducere și prețul unui covoraș înainte de reducere.

C.I.Ț.

E: 1009. Pentru o legătură telefonică între două localități se întinde un fir de cupru lung de 20 km, avînd o secțiune de 6 mm^2.

a) Să se calculeze rezistența electrică a acestei linii telefonice.

b) Cît cupru a fost necesar la fabricarea firului întrebuințat. (Se dă densitatea cuprului = 8,9, iar rezistivitatea = 0,017).

(Olimpiada 1957, cl. VII)

E: 1010. Să se determine x, y, z numere raționale așa încît:

$$(x + y + z)^2 + 86 = x(6 - x) + y(20 - y) + z(22 - z).$$

* * *

E: 1011. Dacă cercurile O de rază R și O_1 de rază r ar fi tangente exterior, ar avea linia centrelor de 9 m, iar dacă ar fi tangente interior ar avea linia centrelor de 5 m. Ele sînt însă exterioare.

Știind că suprafața patratului format de linia centrelor, tangenta exterioară și cele două raze R și r este 38,971143 m^2.

Să se calculeze:

a) lungimea tangentei comune exterioare la cele două cercuri date O și O_1;

b) lungimea liniei centrelor cercurilor OO_1.

I. Munteanu, Zăpodeni

E: 1012. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{(x + a)^3 + (x + b)^3 + (x + c)^3 - 3(x + a)(x + b)(3 + c)}{a(a - b) + b(b - c) + c(c - a)} = 1.$$

A. Iorgulescu, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚII

Pînă la 1 aprilie 1957 au mai fost evidențiați următorii:

Ionescu Dan (student electronică București), *Rădulescu Marin* (clasa X s.m.1 Pitești), *Gheorghe Cezar* (clasa VIII-a s.m.1 Buzău), *Bușilă Ioana* (clasa X s.m.7 «I. L. Caragiale» București), *Popescu Paul* (student electronică București), *Rădulescu Constantin* (clasa X s.m.4 «Aurel Vlaicu» București), *Răşcanu Radu* (clasa VIII s.m.1 «Nicolae Bălcescu» București), *Mihalache Adrian* (clasa X s.m.2. «Costache Negruzzi» Iași), *Tofan Liliana* (studentă matematici București), *Landmann Alexandru* (student energetică București), *Anghel Constanța* (clasa X Constanța), *Dincă Gheorghe* (clasa IX s.m.1 Caracal), *Rusu Mihai* (clasa X s.m. Ocna Mureșului), *Bulucea Constantin* (clasa X s.m.1 R. Vîlcea), *Gervescu Ion* (clasa IX Piatra Neamț), *Klecner Adrian* (clasa X s.m.1 «Nicolae Bălcescu» București), *Vișinescu Mihai* (clasa IX s.m.1 Giurgiu), *Lupaș Laurențiu* (clasa VIII s.m.1 «Nicolae Bălcescu» București), *Isbășescu Mihai* (clasa IX-a s.m.1 «N. Bălcescu» București), *Florea Dorel* (clasa X s.m.1 Slatina), *Popescu Victor* (clasa X s.m.1 «Nicolae Bălcescu» București), *Dițu Emil* (clasa X s.m.2 «Costache Negruzzi» Iași), *Manole Corneliu* (clasa IX s.m.1 «Mihail Sadoveanu» Iași), *Neaga Viorel* (clasa VIII s.m.1 Ploești), *Anițescu Nicolae* (clasa IX s.m.2 Tg. Jiu), *Ciortan Vasile* (clasa IX s.m.1 Ploești), *Dorobanțu Valeriu* (clasa X s.m.1 Slatina), *Ciobanu Romeo* (clasa IX s.m.1 Ploești), *Șerbulescu Vasile* (clasa X s.m.2 Tg. Jiu), *Lungu Liviu* (clasa X s.m.1 Ploești), *Bozdog Ion* (clasa IX s.m.2 Tg. Jiu), *Stoica Horia* (clasa IX s.m.4 Cluj).

Pînă la 1 aprilie 1957 s-au mai primit soluții bune de la următorii rezolvitori de probleme:

ALBA IULIA. Cl. 10. Goia Cornel (2407, 10, 45, 50, 56, 58, 60, 521, 23, 36).

ALEXANDRIA. Cl. 9. Lupaș Alexandru (2438, 45, 46, 48, 50, 52 55—58, 61, 62, 72). Cl. 10. Hididiș Ana Doina (2444—46, 48, 49, 52, 53, 55—57, 72, 82, 83), Snaps Ilie (2386, 87, 92, 95, 96, 99, 405, 07, 09, 10). Anul II. Popa Mihai (2356, 95, 407, 515, 21, E: 885, 86, 90, 932).

BACĂU. Școala medie. Clasa 9. Alexandru Gh. V. (2424, 38, 45, 46, 48—51, 53, 55—58, 61, 62, 82, 97, 98, P). Absolvent Puiu C.A. (2445, 48, 54, 56, 61, 62, 72).

Școala pedagogică. Anul II. Apetrei Gh. (2490, E: 911, 14, 19, 22, 23, 28, 30, 32, 34), Cucoș Const. (2490, E: 911, 14, 19, 22, 23, 28, 30, 32, 34).

Școala de 7 ani Păunești (Bacău). Cl. 5. Apostu Ion (E. 874, 76, 84, 93, 94, 901, 09, 12, 15, 19), Ignat Gheorghe (E: 874, 76, 80, 88, 93, 901, 09, 12, 15, 19), Marinov Costică (2406, E: 874, 76, 84, 93, 94, 901, 09, 12, 15), Novac Aurel (2406, E: 874, 76, 80, 84, 93, 94, 901, 09, 15, 19), Novac Felicia (2406, E: 874, 76, 80, 84, 93, 94, 901, 09, 12, 15, 19), Ștefan Felicia (E: 874, 76, 79, 84, 93, 94, 901, 09, 12, 15, 19), Vaideș Gh. (2406, E: 874, 76, 80, 84, 93, 94, 901, 09, 19). Cl. 7. Novac Gheorghe (2462, E: 899, 908, 10, 11, 15,

17—19, 33, 34), Panait Adrian (E: 893, 94, 99, 903, 12, 15, 17, 19, 22, 33, 34), Pintilie Florica (E: 901, 03, 05, 11, 12, 15, 17—19, 33), Vasilache Zarafina (2462, E: 899, 903, 08, 10—12, 15, 17—19).

BAIA MARE. Clasa 10. Mureșan Dumitru (2423, 28, 39, 44—50, 52—58, 61—63), Vasiloiu Benone (2424, 39, 45, 46, 48, 52, 53, 55—57, 61—63).

BÎRLAD. Clasa 8. Arghirescu Doina (E: 886, 88—91, 93, 94, 97—900, 02, 03, 08, 09, 11—15, 18, 19,) Diaconu Veronica (E: 886, 89, 90, 93, 94, 98, 99, 902, 03, 11—14, 18, 19), Guțu Tana (E: 886, 88—91, 93, 94, 97—903, 08, 09, 11—15, 18, 19), Hamza Nansica (E: 886, 89, 90, 93, 94, 98, 903, 09, 11—14, 18, 19). Cl. 9. Spulber Dorina (2407, 23, 28, 38, 39, 44, 45, 48, 50, 57, 62, 80).

BRĂILA. S.m.1 Cl. 10. Gomolea A. Aurelia (2421, 24, 52, 53, 83, 515, 18, 23, 33, 30, 51). S.m.2. Cl. 9. Martiniuc Laurențiu (2404, 05, 09, 10, 45, 46, 55, 56, 61, 62). Cl. 10. Cheroglu Hristos (2392, 95, 405, 07, 09, 10, 17, 44—46, 48, 50, 55, 56, 61—63), Ciocan D. Mihai (2392, 97, 404, 05, 07, 09, 10, 27, 38, 42, 45, 46, 48—50, 52—58, 61—63), Ciocan N. Mihai (2394, 415, 24, 27, 42, 44—46, 48—50, 52, 53, 55—58, 61—63, 72, 77, 78, 81, 90, 92), Daniel Constantin (2395, 97, 407, 10, 42, 47, 49—51, 53, 55, 56, 58, 61, 62), Dumitru Mircea (2442, 45, 46, 48, 49, 52, 55, 57, 62, 63, 72, 77, 90), Jeles Nicolae (2395, 404—07, 09, 10, 45, 52, 62, 63).

BREAZA (Ploești). L.m. «D. Cantemir». Cl. 8. Grosescu Radu (2405, 09, 55, 56 62, E: 886, 90, 98, 99, 903, 08, 09, 11, 14), Mărăcineanu Viorel (2405, 09, 55, 56, 62, E: 886, 90, 98, 99, 902, 03, 09, 11, 14). Cl. 10. Lache Florică (2392, 405, 09, 10, 33, 53, 58, 87, 99, 515, 36), Moraru Marin (2420, 26, 33, 44—53, 55—58, 60—63).

BUCUREȘTI. Studenți: Borș Rodica (2383, 84, 86, 87, 90, 94, 95, 402, 04, 05, 08—10, 12, 14, 15, 17, 18, 26, 33, 34, 38, 44, 48, 50, 52, 55—57, 61—64, 72, 75—77, 91, 95, 97, 99, 515, 18), Ghițulescu Virgil (I.C.F.) (2398, 419, 20, 38, 56, 57, 61—64, 518, 19), *Ionescu Dan* (electronică) (2386, 87, 95, 407, 09, 10, 14, 17—19, 26, 30, 31, 33, 34, 38, 42, 44—49, 51—58, 61—64, 71, 72, 76—78, 80—83, 89—91, 97—500, 09, 12, 15, 18, 19, 21, 23, 26, 30, 31, 33, 35, 36, P), *Landmann Alexandru* (Energetică) (2418, 19, 24, 31—33, 43, 44, 46, 49—51, 53, 54, 56, 58, 59, 70—72, 75977, 80, 82, 83, 86, 88—91, 93, 97,—99, 506, 10, 15, 20, 22—24, P), *Popescu Paul* (Electronică) (2390, 93, 94, 419, 24, 31, 32, 34, 42, 43, 47, 50, 60, 64, 68, 74, 76, 88, 89, 92, 94, 95, 98—500, 04—07, 09—15, 18—21, 23, 25—36, P), Stan Dumitru (Ac. Teh. Mil.) (2424, 25, 29, 34, 38, 44—63, 71, 72, 83, 99, P), *Tofan Liliana* (Mat.) (2418, 32—34, 44, 47, 49, 58, 59, 64, 72, 75, 77, 78, 81, 87, 90, 91, 97—99, 503, 15, 18, 21, 23, 25, 26, 30, 31, 34, 35, 39, 42, 49, 50, 67, 68, 70, 78, 79).

Absolvenți: Buriman Adrian (2418, 32, 45, 46, 50, 57, 61—63, 72—75, 83, 88, 89, 91, 97), Harmata L. Mihai (2500, 01, 07, 15, 18—21, 23, 29—31, 33, 34, 36), Ionescu N. Mihai (2405, 09, 45, 48, 52, 55, 61, 63, 79, 82, 97, 518), Lungulescu Nuțică (2405, 09, 18, 23, 24, 31, 52, 56, 72, 76, 79, 82, 87, 97), Proșcan Ion (2424, 32, 38, 44, 58, 68, 70, 78, 89, 90, 97), Teodorescu Viorica (2395, 405, 07, 09—11, 14, 15, 17, 25, 36).

S.m.1. «N. Bălcescu». Cl 8. Angelescu Mircea (2438, 65, 66, 84, 503, E: 901, 03, 07, 08, 13, 14, 17, 18, 23, 26), Dascălu Dan (2438, 39, 44, 55, 56, 62, 63, 82), Ioachim Alexandru (2470, 99, 503, 09, 11, 15, 20, 23, 28, 32, 33, 36), *Lupaș Laurențiu* (2384, 92, 95, 404—10, 23, 24, 38, 39, 45, 46, 50, 55—57, 61—63, E: 885, 86, 88—900, 02—09), Mareș Mihai (2463, 84, E: 886, 91, 93, 98, 906, 07, 11, 18, 23, 28, 30, 32), Rădăceanu Eduard (2420, 38, 55, 56, 63, 64, E: 899, 902, 07, 08, 09, 11, 12, 14, 17, 18, 21, 22, 23, 32—34). *Răşcanu Radu* (2382, 85, 401, 10, 19, 33—35, 39, 44, 46, 47, 49, 50, 53, 54, 57, 58, 63—65, 82, 99, 503, 05, 36, E: 895, 99, 900—06, 12, 14—16, 20, 22, 23, 25—28, 30, 32, 34, P). Cl. 9, Catrina Dumitru (2432, 38, 44, 50, 53, 57, 63, 72, 80, 98, P), *Isbășescu Mihai* (2419, 20, 23—25, 28—30, 37, 39, 44—59, 61—66, 72), Lupan Mircea (2394, 415, 16, 19, 24, 38, 48, 49, 53, 62, 84), Pașcanu C. (2432, 34, 44, 64, 74, 89, 504, 18, 23, 28, 33, P). Cl. 10. Aldea Alexandru (2419, 20, 31, 44—50, 52, 53, 55—58, 61, 62, 72, 81, 87, 90, 91, 98, 502, 15, 18, 19, 21, 29, 30, 36), Boldea Vasile (2438, 55, 71, 72, 505, 09, 11, 18, 21, 23, 31, 36), Cocieru Dan (2400, 06, 12, 31, 46, 48, 51, 53, 55, 56, 58, 61, 72, 97), Datcu Virgil (2424, 27, 34, 44, 46—49, 52, 55, 56, 63), Doniga Nicolae (2402, 18, 23, 26, 28, 31—33, 35, 38, 39, 45—58, 61—65, 71, 72), *Klecner Adrian* (2408, 26, 27, 35, 38, 40—42, 78, 87, 89, 500—03, 15, 18, 20, 21, 23, 30—36, 39, 65, 67, 68, 71, 74, 77—80, P), Martin Traian (2472, 77, 83, 87, 90, 97, 98, 518, 21, 23—25, 36), Miulescu Alexandru (2392, 95, 404—11, 14, 38, 44—46), Moldoveanu Călin (2471, 72, 81, 83, 87, 97, 414, 15, 23, 28, 33), Pătrășcoiu Adrian (2419, 20, 23, 24, 26, 27, 30—32, 34, 38, 42, 44—64), Popa Mircea (2471, 72, 77, 81, 90, 91, 97—99, 509, 18, 23), *Popescu Victor* (2420, 24, 26, 27, 30—32, 34, 38, 42, 44—49, 61, 63, 65, 72, 74, 87, 90), Schatz Werner (2406, 26, 35, 57, 71, 500, 507, 09, 15, 18, 20, 23, 30, 33, 36, P).

S.m.4 «Aurel Vlaicu». Cl. 7. Ionescu Adrian (E: 888, 93, 901, 33, 34). Cl. 8. Galenzovski Paul (E: 888, 98, 902, 11, 21—24, 32—34), Mușat Mihai (2392, 95, 404, 05, 07—10,

44, 49, 50, 53, 62, 63, E: 885, 88, 90, 93, 97—900, 02, 05—07). Cl. 9. Alexe Anghel (2404—11, 15, 45—48, 50, 52, 53, 55, 56, 61, 62,) Dulău Ştefan (2395, 404—11, 15), Muzinchievici Grigore (2357, 63, 64, 71, 72, 77, 84, 95, 405, 07,) Nicolau Cornel (2450, 52, 72, 78, 87, 97, 99, 518—21, 23), Toader Mircea (2395, 404, 05, 07, 09—11, 45, 46, 55—57, 61—63). Cl. 10. Ionescu Mircea (2417, 22, 24, 30, 33, 36, 44—50, 52—63, 68, 72, 73, 78—85, 87, 89, 94, 95, 97, 99), *Rădulescu Const.* (2382, 94, 96, 402, 06, 08, 11, 14—16, 20, 24, 34, 39, 44, 47, 53, 54, 57—60, 73, 83, 87, 90, 97, 98, 505, 09, 11, 15, 18—21, 23, 24, 28, 30—33, 36—38,P).

S.m.7. «I. L. Caragiale». Cl. 8. Grofşoreanu Gelu (2438, 44, 45, 50, 54, 57, 62, 77, 90, E: 901, 02, 05, 09, 12, 14). Cl. 10. *Buşilă Ioana* (2423, 24, 26, 27, 29—34, 39, 42, 44—63, 65, 72, 82—84, 86, 88—91, 93).

S.m.8. Cl. 8. Isbăşescu Mircea (2392, 434, 38, 64, 99, E: 885, 911, 14, 16—18, 13—25, 32).

S.m.10. Cl. 9. Mihăilescu Florina (2340, 56, 57, 72, 77, 78, 405, 07, 48, 52, 56, 61, 62, 79). Cl. 10. Mihăilescu Mihaela (2392, 95, 445—47, 51, 528,—30, 80), Stancu Florica (2390, 92, 94, 95, 407, 12, 42, 44—48, 55, 88, 90).

S. m. 11 «D. Cantemir». Cl. 7. Stoicescu Cristian (E: 885, 86, 89—91, 93, 94, 97—900, 02, 03, 06, 08, 14, 15, 21, 22, 28, 33, 34), Cl. 9. Antoniu Sorin (2426, 60, 63, 77, 88, 97, 518—21).

S.m.12. Cl. 8. Dobrescu Dan (2438, E: 888, 99, 921—23, 30, 22—34).

S.m.13, cl. 8. Antoniu Liviu (2392, 405, 09, 63, E: 886, 88, 89, 91, 93, 902, 05), Dinu Ştefan (2392, 405, 09, E: 886, 88—90, 94, 911, 14, 18), Mereuţă Dan (2424, 45, 55, 56, 62, E: 886, 88—90, 93, 98, 903, 05—09), Sburlan Corneliu (2392, 938, 55, 63, E: 886, 88, 89, 93, 99, 902, 07,)

S. m. 15, cl. 8. Enescu Ana (E, 901—03: 06—09, 11—18, 21—23, 30—34).

S.m. 16. Cl. 8. Berceanu Tedy (2405, 06, E: 886, 87, 91, 93, 94, 97, 99, 900, 02, 06, 08, 11, 12, 14, 15, 17—19, 21—23, 25, 28, 32, 33).

S.m.17. «M. Basarab». Laurescu Const. (E: 899, 900, 02. 06, 11, 12, 14, 15, 17—19).

S.m. 18, cl. 10. Angelescu Valeriu (2448, 49, 52—56, 59, 62, 63).

S.m.20, cl. 10. Alexe Dan (2400, 13, 15, 16, 17, 51, 71, 72, 80, 87, 89), Zorapapel Tiberiu (2385, 90, 404 08, 23—26, 31, 38, 845—57, 61—63, 70, P).

S.m. 22 «Gh. Lazăr», cl. 8. Gheorghiu Aurelia (E: 923, 30, 32), Cl. 10. Butoi Mihaela (2418, 24, 26, 30, 33, 45, 46, 48—50, 52—59, 61—63), Gheorghiţă Mariana (2444, 52, 54, 57, 58, 64, 72, 77, 78, 82, 88, 90, 97—99, 518, 21, 23, 25). Negulescu Petra (2448, 50, 52, 55, 57, 62, 97, 518, 21, 31).

S.m.26. Alexandru Horia (2430, 31, 38, 42, 44—49, 53, 55—57, 61—63).

S. de 7 ani Chitila, cl. 7. Dumitrescu Corneliu (2406, 08, 09, E: 885, 886—98,) Negru Florica (2404, 05, 08, 09, E: 885, 86, 88, 89, 91, 93), Politie Sorana (2404—06, 08, 09, E: 885—88, 90—98).

S. 7 ani nr. 128, cl. 7. Hoffner Horvath (E: 885, 86, 88—91, 93, 97, 902, 06, 11).

S de 7 ani nr. 145 Ghencea, cl. 7. Marin Doina (E: 899—03, 06, 07, 09, 11, 22, 23, 30, 32, 34).

BUZĂU. S.m.1. Cl. 8. *Gheorghe Cezar* (2423, 24, 26, 27, 29, 34, 38, 40, 45,—48 52, 51, 55—59, 61—64, 71, 78, 80, 82, 87, 91, 99, E: 899, 900, 02—09, 11—19, P). Cl. 10. Sîrbu N. Gh. (2481, 97, 98, 505, 15, 17, 18, 20, 23, 28, 29, 33), Toma Nicolae (2392, 405, 45, 48, 53, 68, 511, 19).

BUZIAŞ (Timişoara). S.m.m, cl.8. Avram Ion (2455, E: 921, 32—34).

CALAFAT (Craiova), cl. 8. Petrescu Gheorghe (2455, 62, 63, E: 886, 89, 90, 93, 94, 98, 902, 09, 11, 15, 23, 33, 34, P). Cl. 10. Vişinică Maria (2420, 44, 45, 46, 48—50, 52—58, 60, 62, 63).

CĂLĂRAŞI. S.m.m.1, cl.9. Chiriacescu Sergiu (2405, 09, 10, 32, 45, 48, 55, 57, 61, 62, 64, 521, 23, 36), Cl. 10. Strătescu Ion (2418—20, 24—28, 30—34, 42, 43, 64—66, 70—73, 77, 78, 80—85, 87, 88, 90, 91, 93—95, 97—99, P), Demciuc Anatolie (2420—38, 68, 72, 87—91, 97, 99, 518, 20, 21, 23, 35)

CARACAL, cl. 9. *Dincă Gh.* (2389, 92, 95, 404—11, 24, 30, 32, 35, 36, 38, 39, 45, 46, 50, 55—57, 59, 61—64, 79, 84, 91, 505, 21, 23, 36, P).

CARANSEBEŞ (Timişoara), cl. 9. Jumanca Ion (2395, 408, 75, 77, 505, 18, 20, 36), Pries Wilhelm (2395, 406, 08, 10, 75, 77, 91, 505, 18, 20, 23, 36).

CÎMPINA. Prof. Tache Ştefan (P).

CIMPULUNG MUSCEL, cl 6. Savin Alexandru (E: 885, 87, 89, 95, 99—901, 13, 19, 22, 24, 28, 33, 34).

CLUJ. Inv. Mateş Cornel (2444—46, 48,55, 56, 61—63). 53,

S.m.4. Cl. 8. Lungu Şerban (2455, 56, 62, 71, E: 888, 89, 903, 11, 14, 17, 18). Cl. 9. Babeş Victor (2415, 38, 46, 52, 55, 56, 61—63, 83, 97), Săsărman Gheorghe (2382, 92, 95,

404—10). Cl. 10. Bîrzan Romanel (2472, 87, 94, 500, 09, 15, 18, 20, 23, 32, 36, P), *Stoica, Horia* (2395, 407, 10, 18, 34, 38, 43—46, 48—52, 54—57, 59, 61—63, 72, 76, 90, 99, 520, 23, 34, 36).

S.m. 5 serală. Cl. 10. Lelyak Ambrozie (2444—48, 50, 53—58, 61—63).

S.m. 6. Cl. 9. Pamula Adrian (2497, 99, P).

S.m. 8. Cl. 8. Man Traian (E: 887, 93, 98, 902, 03, 05, 11, 13, 33, 34).

S. pedagogică 2. Anul IV. Indolean Ioan (2468, 76, 82, 97—99, 503, 09, 15, 17, 21, 23, 31, 34, E: 888, 93, 98, 916, 23, 25, 32).

CONSTANȚA. S. m. l. Cl. 8. Anghel Lucia (2392, 405, 55, 56, E: 886, 88—91, 99, 900, 02, 03). Cl. 10. *Anghel Constanța* (2424—26, 30, 36, 38, 39, 41, 42, 44—49, 51—57 61—63, 65, 71, 72, 80, 82, 87, 90, 95, 97, 98). Abs. Luță Nicolae (2418, 20, 33, 38, 48, 54—57, 60, 61, 63, 72, 90).

S.m. 2. Cl. 8. Rădulescu Mircea (2394, 434, 38, 39, 55, 56, 62, 64, E: 885, 88, 90, 94, 901, 02, 08, 09, 11, 14, 16, 18).

S.m.3. Cl. 10. Abduraim Aiten (2472, 73, 76—78, 81, 87—91, 95).

CORABIA. Cl. 9. Truică Marin (2392, 457, 72, 518, 21, 23, 30, 33, 36, 38).

Absolvenți: Băjan Mihai (2424, 31—34, 38, 43, 45, 48—50, 52—57, 59, 61—64), Popescu Alexandru (2400, 04, 07, 45, 48, 52, 53, 59, 62, 71, 72, 82, 87, 512), Spaloghe Nicolae (2392, 414, 24, 25, 46, 48, 52, 54, 56, 59, 61, 512).

CRAIOVA. S.m. 1 « N. Bălcescu ». Cl. 8. Nicolaescu Alexandru (2473, 80, 82, E: 911—14, 15, 17—19). Cl. 10. Georgescu Gh. (2446, 49, 50, 52—58, 61, 62), Opriș Dumitru (2418, 24, 26, 31, 33, 42, 44, 51, 56—58, 61—63), Rădiță Florian (2445, 48, 49, 52—58, 61—63), Săseanu Vasile (2445—50, 53, 55—58, 61—63).

S.m. 2 « Frații Buzești ». Cl. 10. Grecu Ion (2395, 405, 07, 10, 45, 46, 48, 52, 55, 59, 61, 62, 523, 36, 37, 63), Staicu St. (2411, 45, 48, 53, 55, 57, 62, 72, 97, 518, 23, 33, 34).

S.m. 3 « Elena Cuza ». Cl. 10. Crăciuneanu Magdalena (2444—50, 52—58, 61—63, 72, 87, 99).

S. de 7 ani nr. 8. Cl. 6. Lebădă Florica (E: 888, 93, 94, 96, 97, 902, 18, 22, 28, 34).

CURTEA DE ARGEȘ. Cl. 10. Murăreci Fănică (2471, 72, 77, 78, 81—85, 87—88, 90, 97, 99).

DEJ. Cl. 10. Munteanu Augustin (2472, 77, 87—91, 525, 26, 35).

DEVA. S. m. 1. Cl. 10. Certejan Tiberiu (2445, 50, 52, 61, 72, 518, 30, 34, 36), Silvestru Doina (2448—50, 52, 54, 57, 59, 61—63), abs. Munteanu Lucian (2438, 42, 48, 49, 52, 54—57, 60—63).

FĂGĂRAȘ. S. m. 1. Cl. 9. Săbăduș M. (2405, 07, 09, 10, 45, 47, 48, 51, 55—58, 62, 72, 74, 80, 82, 87, 97, 99).

FOCȘANI. S.m.1. « Unirea ». Cl. 8. Cociu Mihai (2438, E: 888, 94, 911, 14, 18, 21—23, 32—34), Focșăneanu Mihail (E: 885, 88—91, 94, 97, 98, 921, 34), Guirea Vasile (2455, E: 886, 99, 902, 11, 14, 19, 21, 23, 32—34), Niță Paul (E: 893, 94, 902, 03, 09, 32, 23, 28, 32—34, P), Vasile Aureliu (2434, 38, 55, 62, 63, E: 905, 07, 11, 15, 26).

GĂIEȘTI. Tîrtan Gabriel (P).

GALAȚI. Cl. 7. Marinică Elisabeta (E: 886, 91, 92, 97, 99, 900, 07, 11).

S.m.1. Cl. 10. Jinescu Valeriu (2402, 14, 16, 17, 34, 36, 54, 57, 72, 75, 87, 90, 91, 93, P).

GHELAR (Hunedoara). Abs. Lăscuțoiu Virgil (2433, 46, 56, 57, 63, 73, 78, 99, 500, 18, 19, 23, 31, 33, 36, P).

GHEORGHIENI. S.m. 2. Cl. 10. Lupeș Gheorghe (2395, 411, 13, 14, 16, 20, 24, 38, 64, 88).

GIURGIU. S.m.1. Cl. 9. *Vișinescu Mihai* (2395, 410, 18, 19, 23, 26, 31, 40, 46, 55, 57, 59, 60, 70—72, 74—77, 80, 82, 83, 85, 88—92, 97—99, P).

IANCA (Galați). S.m.m. Cl. 10. Bănică Radu (2426, 38, 38, 65, 68, 71, 72, 77—83, 85, 87—91, 93—99).

IAȘI. S.m.1. « M. Sadoveanu ». Cl. 8. Drăgan Rodica (2392, 438, E: 905, 17, 18). Cl. 9. Cosma Nicolae (2430, 37, 39, 44, 48, 50, 52—54, 61, 66, 68, 70, 80, 82, 84, 85, 87, 97, P), *Manole Corneliu* (2392, 95, 400, 04—10, 30, 37, 39, 44—46, 48, 49, 51, 52, 55—59, 61—62, 66, 71, 80, 82, 84, 85, 87, 97), Păuleț Petru (2397, 430, 37, 39, 46, 51, 68, 71, 87). Cl. 10. Șor Liber (2449, 51, 53, 54, 72, 78, 83, 99, 518, 23), Sorîngă Gheorghe (2465, 72, 77, 78, 80, 82, 87—92, 97, 98).

S.m.3. « C. Negruzzi ». Cl. 7. Ungureanu Radu (E: 902, 08, 13, 18). Cl. 8. Cernăianu Dan (2387, 455, 56, E: 890, 92, 903, 06—09, 11, 14), Mărculescu Sorin (E: 900, 03, 05, 08, 09, 11, 13—15, 17—19). Cl. 9. Nanu Octavian (2424, 28, 33—35, 39, 44, 45, 48, 58, 61, 64, 65, 70, 72, 84, 97, 505, 07, 11, 13, 15, 18—20, 23, 33, P), Solomon Sandu (2395, 404, 06—09, 20, 36, 45, 55, 57, 62). Cl. 10. *Ditu Emil* (2384, 86, 91, 95—97, 404, 05, 07—11, 13—17, 26, 27, 34, 38, 43, 45—48, 50, 52, 53, 55—59, 61—63), *Mihalache Adrian* (2418, 20, 23—27,

29, 30, 32—37, 39—63, 65, 66, 70—72, 78, 80—85, 87, 90, 93, 96—99, P), Son — Zong — Iuc (2424, 27, 45—47, 62).

S.m.6. Cl. 8 seral. Botez Gheorghe (2465, 91, E: 886, 89, 90, 92, 98, 911—15, 18, 19).

LUGOJ. S.m.1. Boroancă Ion (2471, 72, 80, 89, 90, 97, 505, 07, 09, 15, 18, 20, 21, 23).

MEDIAŞ. Cl. 8. Jilăveanu Gheorghe (2465, 71, 72, 74—78, 81, 87—89, 90—92, 95, 97—99, E: 900—15, 18, 19). Abs. Panţuru Dumitru (2465, 68, 72, 81, 84, 88, 90, 95, 97, 99—505, 07—09, 11, 15, 18—24, 28, 30, 32, 35, 36).

OCNA MUREŞ (Cluj). Cl. 10. *Rusu Mihai* (2224, 34, 35, 46, 47, 67, 71, 73, 312, 57, 414, 19, 20, 24, 31, 32, 37, 38, 42—58, 60—64,P).

ORADEA. S.m.1. Cl. 8. Gherman Ecaterina (2455, 56, E: 899, 902, 05, 06, 08, 911—15, 18, 19, 21—23, 28—30, 32, 34). Cl. 9. Pop Corneliu (2394, 406, 07, 38, 56, 58, 64).

ORAŞUL STALIN. S.m.3. Cl. 8. Cioacă Maria (2420, 38, 80, 82, E: 886, 90, 903, 09, 11, 14). Cl. 10. Despinescu Gheorghe (2465, 72, 77, 78, 80—83, 89, 90, 97—99), Zaharu Dan (2475, 77, 84, 89, 90, 91, 93, P). Abs. Cenţu Ion (2404—06, 08—17).

PETROŞANI (Hunedoara). Cl. 8. Lepădatu Ilie (E: 886, 89—91, 99, 900, 03, 05, 09, 11, 14, 15), Popescu Gheorghe (2455, E: 886, 88—90, 94, 98, 911, 18, 23, 32). Cl. 9. Bergthaler Cristian (2420, 23—27, 29, 30, 32, 34, 36—41, 44—59, 61, 62, 64).

PIATRA NEAMŢ. S.m.1. Cl. 9. *Gervescu Ion* (2392, 95, 404—06, 08—10, 13, 14, 16, 17, 34, 38, 39, 44, 46, 49, 50, 53—58, 60—64). S.m.2. Cl. 9. Covrig Margareta (2445, 48, 50, 53, 54—56, 58, 61—63,), Reghiac Cornelia (2392, 95, 406, 07, 10, 44—47, 48—50, 52, 55).

PITEŞTI. S.m.l. Cl. 10. Duţă Lucian Doru (2448, 50, 52—59, 61—63), *Rădulescu Marin* (2418, 19, 24, 26, 30—34, 38, 45—50, 52—57, 59—64, 67, 72, 74, 76, 77, 81—83, 87, 88, 90, 91, 94, 97—99, 515, 17—19, 21, 23—26, 28—31, 33—36). Abs. Dumitru Stan (2426, 38, 45—63, 72, 87).

S.m.m. Horezu. Cl. 8. Apostoloiu Victor (2438, 55, 56, 62, E: 899, 901—03, 09, 11—13, 15, 17, 18), Badea Vasile (2438, 55, 56, E: 899—902, 09, 11—13, 15, 17, 18), Constantinescu Ştefan (2455, 45, E: 902, 11—15, 17, 18).

PLOEŞTI. Cl. 7. Coşoianu Traian (E: 885, 86, 88—91, 93, 94, 96—98), Patron Alexandru (E: 888—90, 94, 98, 901, 06—09, 15, 17), Pîriianu Radu (E: 885—91, 95, 98, 901). Cl. 8. *Neaga Viorel* (E: 911, 12, 14, 17—19, 21, 32—34), Nicolae Viorel (2392, 95, 410, 38, 44—46, 55, 56, 99, E: 895, 97, 900—03, 05—09, 11—19, 21—23, 25, 27, 28, 30—34, P), Podeanu Tudor (885, 86, 88—91, 93, 94, 96—98). Preda Vasile (E: 896, 98, 911, 12, 14, 17—19, 23, 30, 32—34), Timuş Dan (2404, 09, 38, 62, E: 885, 99, 900, 02, 03, 05, 07, 09, 11, 14, 16), Tomescu Ion (2392, 434, 38, 55, 56, 58, 62, 64, E: 886, 88—91, 93—95, 97—903, 05), Dumitru Em. (2392, 400, 05, 06, 09, 13, E: 885, 86, 88, 90, 93, 94, 98). Cl. 9. *Ciobanu Romeo* (2392, 95, 407, 10, 11, 44—53, 55—59, 61—64, 72, 80, 81, 84, 87, 99), *Ciortan Vasile* (2384, 87, 92, 94—96, 400, 02, 04—11, 13—17, 38, 45, 46, 48, 50, 53, 55—58, 61, 62). Cl. 10. Apostolescu Mihail 2400, 08, 14, 17, 18, 26, 27, 38, 47, 50, 51, 58, 59, 71, 72, 78, 82, 83, 97, 515, 17, 18, 20, 21, 23, 31, 33—35, P), Baltag Vasile (P, N), *Lungu Liviu* (2406, 25, 26, 30—32, 35, 37, 39, 45—52, 54—58, 61—63, 65, 70, 72, 78, 80, 82, 84, 87, 97), Marinescu Ion (2446, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 62, 63, 72, 87, 518, 21, 34).

S.m. 3. Cl. 7. Constantin Carmen (E: 902, 05, 08, 21—23, 25, 28, 34), Dragomirescu Alexandru (E: 921—23, 25, 28, 29, 31—34), Negrea Ştefan (2511, E: 909—11, 13, 14, 16, 18, 19, 21—23, 25). Cl. 10. Marin Maria (2387, 411, 15, 17, 24, 33, 36, 45, 48—50, 52, 59, 62, 72, 81, 87, 99, 505, 18, 20, 23, 34). Abs. Cucu Ştefania (2397, 408, 45, 53, 72, 87, 88, 95, 97—99, 518, 31, 53).

S. de 7 ani Gherghiţa. Cl. 6. Limboşanu Ştefan (E: 911, 12, 14, 15, 17—19, 21—26, 28, 29, 32—34).

S. de 7 ani nr. 14. Cl. 7. Gheorghiu Nicolae (E: 898—902, 05, 06, 08, 09, 11).

PUCIOASA. S.m. Cl. 8. Dincă Stan (2405, 09, E: 886, 88, 90, 93, 914, 16, 21—23, 30, 32, 33). Abs. Stan Dumitru (2384—87, 91—92, 94—97, 99—402, 16—18, 23, 24, 26, 31—33, 35, 37, 39, 45—63).

RĂDĂUŢI. Cl. 7. Onciulescu Ioan (E: 889, 97, 902, 11, 13, 21—23, 28, 29, 33, 34).

REŞIŢA (Timişoara). Abs. Radu Ion (2438, 42, 48, 64, 88, 89, 52, 54—56, 59).

RÎMNICU-SĂRAT. S. m. 1. Cl. 8. Popescu Cornel (2438, 56, 63, E: 902, 07, 21—23, 33, 34).

RÎMNICU-VÎLCEA. S. m. 1. Cl. 9. Nicolae Constantin (2446, 48, 52, 55, 62, 72, 82, 87, 505, 20, 21, 23, 32). Cl. 10. *Bulucea Constantin* (2422, 33, 65, 66, 68, 71, 72, 75—85, 87—91, 94—99, 500, 05, 07, 09, 18—23, P), Urea Ion (2402, 47, 67, 72, 77, 90, 97, 515, 20, 23, 35).

ROMAN. S.m.1. Cl. 10. Spinei Fănică (2424, 26, 38, 44—47, 49—58, 60, 62, 63, 72, 74, 77, 78, 80, 82, 83, 87, 90, 91, 98).

ROȘIORII DE VEDE. Cl. 7. Breazu Ioana (E: 911, 12, 19, 21, 23, 26, 28, 32—34). Cl. 9. Grecu Anton (2379, 84, 403, 14, 26, 30, 48, 52, 63, 84, 97—800, 03, 05, 07, 11, 13, 15, 18—21, 23, 28, 34, 36, P). Abs. *Rizescu Ilie* (2395, 404—11, 14, 17, 24, 26, 27, 30, 36, 38, 48, 57, 58, 70, 72, 76, 80, 82, 87, 90, 97—500, 05, 18—21, 23, 28, 30, 34).

SATU MARE. S.m. «M. Eminescu». Cl. 9. Gafar Gheorghe (2404, 05, 09, 10, 38, 45, 55—57, 62, 63, 523, 36), Mărieș Viorel (2392, 404, 05, 09, 10, 18—20, 32, 33, 38, 45, 49, 53, 55—57, 61—63), Săveanu Mircea (2418, 19, 32, 33, 49, 53, 57, 63, 64), Wiesler Ervin (2418, 19, 32, 34, 38, 46, 48, 55—57, 61—64), Wiesler Hervarth (2418, 19, 31—34, 38, 42, 45—49, 52—57, 61—64, 72, 74, 77, 88—90). Cl. 10. Porodisseanu Forin (2405, 20, 45, 48, 52, 55, 56, 72, 89, 90).

S. tehn. expl. c.f.r. Anul IV. Pop Ioan (2384, 86, 87, 92, 95. 97, 99, 905, 06, 10, 12, 14, 17, 27, 38, 44—49, 52—58, 60—62).

SIBIU. S.m.1. Cl. 9. Ancuța Mircea (2392, 403, 06, 16, 45, 48, 49, 52, 55, 56, 61, 62, 67, 68, 82). Munteanu Ovidiu (2406, 10, 46, 53, 55, 61, 62, 89, 505, 18). Abs. Golescu Alexandru (2436, 65, 72, 503, 05, 15, 19, 20, 22, 23, 28, 29).

SIGHET (Baia mare). S.m. 1 Cl. 8. Tomoioagă Dorin (2438, E: 899, 900 02, 03, 09, 15—17, 19, P).

SIGHIȘOARA. S.m. germ. Cl. 10. Hűgel Georg (2445, 48, 49, 52, 53, 55—57, 59, 62, 63, 73, 83, 97), Klein Hedwig (2405, 09, 15, 48, 49, 52, 55, 57, 59, 62, 63), Liess Ervin (2405, 06, 10, 38, 48, 49, 53, 57, 62, 72, 92, 97), Markel Michael (2445, 48, 49, 52, 53, 57, 73, 83, 87, 89, 97, 518), Meister Ilse (2405, 09, 48, 49, 52, 55, 57, 59, 62, 63, 72), Röhrig Franz (2448, 49, 52, 53, 55, 57, 59, 63, 73, 81, 83, 87, 89, 97, 518).

SINAIA. Cl. 10. Aparu Petre (2431, 38, 42, 48, 52, 55—58, 61, 62), Stănicel Dan (2424, 42, 52, 53, 55, 56, 61—63, 90, 97).

SLATINA (Pitești). S..ml. Cl. 9. Jagîru Mihai (2427, 38, 55, 59, 61, 63, 72, 80—83, 97, 518, 20). Cl. 10. Cincă Ion (2404, 08, 44, 46, 47, 54, 56—59, 61, 72, 81, 518, 36), *Florea Dorel* (2418, 20, 24, 26, 27, 33, 38, 44, 47, 49, 50, 53, 55—61, 63, 72, 73, 77, 79—83, 87, 90, 97, 509, 15, 18—21, 23, 30, 31, 33, 34, 36, P), Osiceanu Dan (2418, 20, 27, 33, 38, 42, 45, 46, 48—50, 53—58, 61—63), Voicu Doloca (2386, 92, 405, 06, 18, 20, 27, 38, 48, 49, 52, 54, 55 57, 61, P), Abs. *Dorobanțu Valeriu* (2465, 68, 78, 80, 92, 94, 95, 500, 01, 03—05, 08—11, 13, 14, 17—23, 25, 26, 28—36, P).

SUCEAVA. Cl. 7. Grosu Virgil (2491, E: 911—15, 17, 18, 33, 34).

TECUCI. S.m. 2. Cl. 6. Lehăduș Elena (E: 886, 93, 97, 99, 900, 07, 10, 11, 16, 21), Macarie Cezar (E: 892, 93, 97, 99, 900, 11, 15, 16, 18), Marin Lucia (E: 881, 29, 97, 99, 900, 07, 13, 15, 16, 91), Pavel Emil (E: 866, 92, 93, 97, 99, 900, 11, 15), Pordea Viorel (E: 886, 91, 93, 97, 900, 01, 07, 11, 16, 13), Teodoru Emil (E: 886, 91, 92, 97, 99, 900, 11, 13, 15, 16), Zavatiu Constantin (E: 891—93, 97, 99, 900, 07, 11, 13, 16). Cl. 7. Andrei Alexandru (E: 893, 903, 07, 08, 11, 12, 14, 15, 17, 18), Arghir Vasilica (E: 892—94, 97, 99, 900, 07, 11, 15, 21), Enache Elena (E: 892, 97, 99, 907, 11, 13, 15, 16), Gafton Narcis (E:819, 93, 99, 911—19), Gheorghiu Virgil (E: 893, 901, 03, 07, 08, 11—19), Gologan Ion (E: 893, 901, 03, 07, 08, 11, 12, 14—19), Grama Petru (E: 893, 903, 03, 07, 11—19), Ivan Viorel (E: 893, 99, 903, 07, 11—19), Man Gh. C. (E: 893, 99, 902, 03, 07, 08, 10—19), Negrea Junica (E: 902, 10—19), Paiu Marioara (E: 886, 91—93, 97, 99, 900, 07, 11, 13, 15), Răducănescu Mihai (E: 901—03, 07, 08, 10—19). Cl. 8. Ailoaiei Rodica (2406, 24, 38, E: 891, 98, 99, 903, 05, 07—09, 11, 14, 34), Avram Pavel (2406, 20, 55, E: 888, 90, 94, 900—03, 08, 09, 11), Bradea Ioan (2420, 56, 62, E: 899—903, 05, 08, 09 11, 14, 18), Bujor Marin (2456, E: 888, 97, 903, 08, 13, 12, 15—19), Costea Marin (E: 892, 903, 05, 09, 14, 16, 17, 21—23, 33, 34), Dorin Steluța (2404—06, 09, 39, 51, 55, 56, 62, E: 885, 911—14,117, 18), Popescu Constanța (E: 888, 93, 94, 97, 99, 901, 02). Cl. 9. Teodoru Georgeta (2444, 45, 53, 55, 56, 61—63). Cl. 10. Catană Costică (2420, 46—50, 52—63), Munteanu Romeo (2407, 08, 56, 57, 60, 72, 77, 88—91, 99), Tudose Traian (2398, 439, 57, 58, 60, 71, 72, 77, 80, 91, 97, 99, 518, 36).

TIMIȘOARA. S.m.l. Cl. 9. Schramm Heinz (2420, 45, 46, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 61, 62, P), Soicoiu Dumitru (2420, 24, 27, 38, 46, 49, 53—56, 59—62). Cl. 10. Poraicu Bogdan (2445, 46, 48, 49, 52—57, 60—63).

S.m.5. Cl. 9. Bailiuc Alexandra (2404—07, 09, 20, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 61, 62), Pungă Vasile (2404—08, 20, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 61, 62).

S. ped. 1. Anul II. Enache Marin (2392, 95, 400, 04, 05, 09, E: 886, 88, 90, 94, 97). Anul III. Ștefan Iosefa (2395, 405, 09, 46, 57, 62, 71, 509, 23, 36, E: 886, 90, 94, 905, (14). Abs. Sgăvîrdea Dumitru (2363, 87, 91, 97, 99, 416, 26, 38, 44, 80, 82). Stud. Blaga Zamfir Inst. Pedag) (P).

TÎRGOVIȘTE. S.m.3. Cl. 8. Dumitrescu Horia (2504, 32, E: 911—13, 18, 21—23, 25, 28, 30, 32—34), Moșu Andrei (E: 911—14, 18, 21, 23, 25, 32—34), Rujan Romulus (2438,

E: 890, 97, 911—15, 18, 19, 21—25, 28, 32—34). Cl. 9. Cănuță Vasile (2395, 405, 06, 10, 11, 38, 46, 48, 55—57, 59, 63, 90, 91, 505, 18, 19, 21, 23). Abs. Cărbunaru M.C. (2172, 356, 57, 72, 95, 404—06, 08—10, 14, 15, 17, 46, 48—50, 52, 54—57, 62, 63).

TÎRGU-JIU. S.m.2. «T. Vladimirescu». Cl. 7. Săvescu Mihai (2408, E: 885—88, 90, 91, 96—98, 903, 05, 07, 09). Cl. 9. Aniţescu Nicolae (2390, 92, 93, 95, 97, 99, 400, 04—11, 13—17, 26, 38, 44—50, 52, 53, 55—58, 61—63, 86, 87), *Bozdog Ion* (2385, 87, 92, 95, 400, 04—11, 15, 32, 38, 44—49, 52, 53, 55—57, 61—63), Pupăzeanu Gh. (2395, 410, 11, 32, 46, 48, 49, 52, 55, 56, 61, 62). Cl. 10. Dogaru Octavian (2432, 42, 45, 48, 49, 52, 53, 55, 62, 63, 72, 77, 88—91), *Şerbulescu Vasile* (2386, 87, 92, 95, 97, 99, 400, 02, 04—11, 13—15, 17, 44—49, 52, 54—57, 61—63).

TÎRGU NEAMŢ (Bacău). Cl. 7 serală. Găltan Alexandra (2456, 99, E: 888, 93, 900, 02, 03, 08, 11, 14, 17). Cl. 10. Stîngu Nic. (2383, 400, 02, 06, 19, 24, 26, 33, 72, 90, 91, 97), Răileanu Mihai (2397, 411—13, 15, 16, 31, 42, 60, 64, 72, 74, 75, 77, 78, 80—82, 87, 90, 91, 95, 97—99, 515, 18, 23, 34, P).

TURNU MĂGURELE. S.m.l. Cl. 10. Cojocaru Napoleon (2419, 31, 34, 44, 46, 48, 53, 55—57, 61—64, 77, 81, 90, 91, 97, 518, 21, 23), Grecu Eftimie (2420, 31, 37, 38, 44—46, 48, 52, 54—59, 61, 62, 72, 77, 82, 90), Stoianovici Cornel (2392, 95, 97, 404—12, 15, 17).

TURNU SEVERIN. S.m. 1. Cl. 10. Dobrovolski Mihai (2392, 95, 402, 04, 05, 07—13, 15,) Găletuşe Stelian (2364, 92, 95, 402, 04—10, 13, 14, 15, 17), Rusu Constantin (2433, 59, 73, 76, 78, 81—83, 90, 98, 518, 23).

ZALĂU. S.m.1. Cl. 10. Andruşcenco Paul (2427, 42, 44, 47, 48, 50, 52, 54—57, 61—63, 90), Morati Cornel (2427, 31, 41, 47, 48, 50, 52—59, 61, 63, 80, 82, 88, 90, 97, 99). Abs. Fărcaş Beniamin (2354, 475—77, 86, 88, 90, 91, 95, 98, 99, P).

*

Pînă la apariţia G.M.F-B 9, se mai primesc soluţii la problemele propuse în numerile 6,7, şi 8 din 1957. Elevii de cl. 8 pot trimite soluţii şi la problemele propuse pentru cl. 5—7. Pentru a se face repartizarea plicurilor cu soluţiile primite, pe şcoli şi clase, rezolvitorii sînt rugaţi să expedieze o dată cel puţin 10 soluţii aşezînd problemele în ordinea numerică iar pe plic să scrie numele, clasa şi şcoala din care fac parte.

* * *

Pînă la 15 aprilie au mai fost evidenţiaţi următorii rezolvitori de probleme:

Roşianu Dragomir (student matematici Bucureşti), *Mira Eugen* (clasa 7 s. elem. 119 Bucureşti), *Theodorescu Nicolae* (clasa 10 s.m. 2. Bucureşti), *Bărbulescu Marcel* (clasa 10 Slatina), *Palaghiţă Iordache* (clasa 9 s.m.1 Cîmpina), *Held Petru* (clasa 10 s.m. 1 Oradea), *Serdeşnic Aurel* (anul II sc. contab. agricolă Lugoj), *Cotîrlea Ioan* (student matematici Cluj), *Rădescu Eugen* (clasa 9 Focşani), *Trifan Corneliu* (clasa 9 s.m. 1 Ploeşti), *Ancuţoiu Gh.* (cl.10 s. m. 1 R. Vîlcea), *Şaganai Nusfet* (student mecanică Bucureşti), *Lerner Emil* (clasa 10 s.m.13 Bucureşti), *Chiriac Dumitru* (clasa 8 s.m. 1 Bacău) *Stamatoiu Petre* (clasa 10 s.m.4 «Aurel Vlaicu» Bucureşti), *Tîrtan Gabriel* (clasa 10 Piteşti), *Mazilu Gabriela Luminiţa* (clasa 7 s.m. 7 «I.L.Caragiale» Bucureşti), *Popescu Claudiu* clasa 10 s.m. 3 «C. Negruzzi» Iaşi), *Şerbănescu Florin* (clasa 10 s.m. 1 Giurgiu), *Dinuţ Teodor* (student Craiova), *Panait Nicolae* (absolvent Bucureşti), *Grozavu Mihai* (clasa 8 s.m.1 Petroşani), *Delibaş Constantin* (clasa 10 s.m.1 Ploeşti), *Dumitrescu Elisabeta* (clasa 10 s.m.4 «Aurel Vlaicu» Bucureşti), *Tăriţă Ion* (student Craiova), *Chirilă Marin* (clasa 10 s.m. 1 Galaţi), *Bănică Radu* (clasa 10 s.m.1 Ianca), *Cramer Eugen* (clasa 8 s.m. 1 Ploeşti), *Deutsch Herbert* (clasa 10 Rădăuţi), *Perianu Dan* (clasa 8 Reşiţa), *Tomu Costică* (clasa 8 Tecuci), *Cancer Anca* (clasa 7 s.m. 1 Tg. Jiu), *Calăgăru Viorel* (clasa 10, Tg. Jiu), *Sasu Aurel* (absolvent Tg. Mureş).

Pînă la 15 aprilie 1957 s-au mai primit soluţii bune de la:

ARAD S.m.1. Cl. 6. Ciurea Sorin (E: 888, 92, 95, 97, 99, 901, 02, 06, 22, 32, 52). C. 9. Beştea Cătălin (2424, 26, 35, 45—47, 51, 55—57, 61, 62), Demşoreanu Brutus (2444—48, 52, 55—57, 61, 62, 74, 75, 88, 89, 91, 92), Sîrb Petru (2424, 45, 46, 48, 49, 51, 55—58, 61, 62).

BACĂU. S.m.1. Cl.8. *Chiriac Dumitru* (2418, 33, 35, 46, 53, 70, 78, 80, 82, 503—05, 11, 12, 15, 19, 23, 28, 32—34, 36, E: 921—30, 32—34), Grill Alfred (2446, 504, 12, 19, 20, 20, 23, 33, E: 923, 25, 30, 32).

S.m.2. Cl. 8. Savu Corneliu (2532, E: 911, 13, 14, 18—22, 25, 28, 30, 32, 34).

S.e. Petreşti. Cl. 7. Focşăneanu St. (E: 911, 13, 18, 21—23, 28, 32—34).

BAIA DE ARIEŞ (Cluj). Cl. 7. Totolici Gabriel (2405, 09, E: 889, 88, 200, 21—23, 25, 28—30, 32—34). Cl. 10. Manolache Liviu (2426, 32, 42, 62, 72, 78, 80, 82, 83, 89, 97), Priţă Nic. (2418—20, 50, 54, 65, 72, 83, 84, 89, 97, P).

BAIA MARE. Cl. 9. Moldovan Gh. (2406, 10, 38, 46, 48, 52, 55, 56, 61—63, 518), Mureşan Dumitru (2382, 85, 92—97, 401, 04—11, 13—15).

BAIA SPRIE. Cl. 9. Novatis Naumus (2404, 09, 10, 38, 45—47, 51, 55, 56, 61, 62).

BOTOŞANI, S.m.1. Cl.8. Balan Traian (2368, 455, E: 874, 76, 77, 79—81, 84, 86, 99, 902, 06, 09, 21, 23, 33, 34). Cl. 9. Balan Const. (2392, 404—10, 45, 46, 49, 53, 55—57, 61, 62), Blumenfeld Mişu (2392, 95, 404—11, 44—46, 48, 56, 58, 61, 62), Cojocar Mihai (2359, 60, 95, 404—11, 45, 46, 55, 56, 61, 62), Grosu Ion (2356, 69, 85, 95, 411, 26, 38, 45, 46, 48, 49, 52—57, 62, 519, 21, P), Iţcan Corneliu (2357, 59, 64, 95, 404—11, 45, 46, 48, 52, 55, 56, 62, 518, 20, 23, 36), Scutelnicu Ion (2349, 59, 60, 64, 69, 92, 404—10, 45, 46, 49, 50, 53, 55—57, 61, 62), Suşter Vasile (2349, 57, 59, 60, 64, 80, 92, 95, 401, 05—07, 09, 10, 45, 46, 49, 51, 55, 61, 62).

BRĂILA. S.m.1. Cl. 10 serală. Coleaşă Dumitrache (2395, 404, 07, 10, 24, 45, 50, 55, 62, 63, 87, 517). S.m.2. Cl. 8 Florea Dorin (2404, 08, 45, 55, 62, 63, E: 886, 902, 04). Cl. 9. Axente Eugeniu (2325, 404, 06, 10, 45, 46, 55, 56, 61—63).

BREAZA. L. mil. «D. Cantemir». Cl. 9. Alexandroni Gh. (2438, 46—48, 52, 55—57, 62, 72), Almăşan Gavril (2445, 46, 48, 52, 55—57, 61, 62, 65, 72), Cantor Ioan (2438, 46—48, 52, 55—57, 61, 62,) Sălăgean Mircea (2445, 46, 48, 52, 55—57, 61, 62, 65, 82), Scarlat Nic. (2438, 45, 46, 52, 55—57, 61, 63, 65, 71, 82), Smeril Adrian (2445, 48—50, 52, 52, 54, 55—57, 61, 62), Vădan Ion (2438, 45, 46, 48, 52, 55—57, 61, 62, 65, 72). Cl. 10 E. Bucşa Alexe (2444—48, 50, 53, 55—57, 62, 63), Mancu Florin (2392, 95, 97, 405, 07, 09, 10, 18, 33, 53—55, 57, 59, 97).

BUCUREŞTI. Studenţi: Manea Sabina (fiz-mat) (2504, 05, 15, 18, 19, 23—26, 29, 30, 33, 34, 38, 42, 53, 65—67, 75, 78—81). *Roşianu Dragomir* (mat.) (2308, 09, 21, 40, 56, 57, 63, 77—79, 84, 91, 92, 94, 95, 97, 99, 400, 04, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 24, 30, 33, 45—59, 62, 63, 71, 72, 77, 78, 80—85, 87, 88, 90, 91, 97, 99, 500, 09, 12, 15, 18—21, 23, 26, 36, 54, 56, 64, 70, 73), *Şaganai Nusfet* (mec.) (2383, 419, 31, 35, 37, 42, 67, 71, 74—77, 79, 89, 91, 92, 503, 05, 07, 09—12, 14, 15, 17—19, 21, 23, 24, 28—31, 33, 36, P).

Absolvenţi: Antonier Mircea (2395, 405, 18, 33, 38, 45, 48, 54, 55, 62, 63, 76, 77, 519, 26, 34), Coliren Ignatz (2500—07, 09—12, 14, 15, 17—21, 23—38), Dumitriu Gabriela (2444—59, 61—63), Harmata Mihai (2425, 26, 29, 35, 50, 67, 68, 72—74, 76, 77, 80—93), *Panait Nicolae* (2424, 26, 49, 53, 54, 59, 65, 70, 71, 81, 84, 87, 89, 503, 05, 07, 10, 11, 13, 15, 18—21, 23, 25, 26, 30, 31, 33—36, 39, 42, 52, 54, 55), Popa Nestor (2404, 05, 08—10, 15, 34, 45, 52, 54, 56, 62).

S.m.1 «N. Bălcescu». Cl. 7. Necşoiu Alex. (920—23, 25, 27—30, 32—34, 36, 38, 42, 45, 47, 48, P). Cl 8. Ciocîrlan Paul (E: 921—23, 25, 27, 28, 30, 32, 36, 42, 47), Dascălu Dan (2484, 503, 23, 67, 79, E: 910, 12, 17, 18, 42, 43, P), Ghelmeziu N. (2438, 46, 55, 56, 62—64, 82, 89, 91, 523, 33, E: 903, 11, 14, 17, 23, 25, 32), Iliescu Andrei (2392, 404, 05, 38, 55, 56, 62, E: 885, 86, 88—90, 93, 99, 902, 03, 07—09), Kivu Const. (E: 911, 13, 14, 19, 21—23, 25, 28, 30, 32—35, 42), Răşcanu Radu (2476, 80, 84, 89, 91, 52—, 28, 49, 67, 78, 78—80, E: 910, 13, 19, 20, 24, 33, 35, 45, 947, 48, P). Cl. 9. Rădoi Leon (2420, 24, 2+, 30, 32, 34, 37, 39, 44—48, 50—52, 62). Cl. 10. Bogheanu St. (2418, 26, 27, 31, 44, 45, 47, 49—51, 53—58, 60—64, 72), Melega Eugen (2395, 404—09, 15, 68, 72, 73, 78, 80—83, 85, 87, 90, 97, 98, 518, 21, 23), Vimer Radu (2466, 70, 80, 81, 84, 500, 01, 03, 05, 07, 08, 10, 11, 13, 15, 18—21, 23, 28, 30—33, 36, 38).

S.m.2. Cl. 10. *Teodorescu Nic.* (2470, 72, 78—83, 85, 87, 96,. 97, 99, 500, 03, 07, 10, 13, 15, 17—19, 23, 28, 29—31, 33, 34, 48, 50, 54, 56, 58, 60, 67, 70, 73, 75—77, 79, P).

S.m.4.«A. Vlaicu». Cl. 7. Lungu Dan (E: 888, 89, 902, 11, 14, 22—24, 32—34). Cl. 9. *Dumitrescu Elisabeta* (2397, 411, 14, 15, 20, 38, 41, 44, 45, 47, 50, 52—55, 57—59, 72, 77, 87, 90 97, 509, 15, 18—21, 23, 29, 32, 33, 37), Niţu Ioana (2444—47, 50, 56, 58, 61, 62). Cl. 10. *Stamatoiu Petre* (2392, 94—97, 402, 04—11, 15, 20, 24, 38, 42, 44—48, 50, 52—63, 72, 77, 87, 90, 97, 98, P).

S.m.7. «I. L. Caragiale». Cl. 7. *Mazilu Gabriela Luminiţa* (2471, 82, 99, 515, 19, 32, E: 888, 95, 910, 12—14, 16, 18—34), Vlad Valentin (2405, 06, 09, 56, 63, X: 886, 88—90, 93, 94, 96, 97, 902, 03, 05, 07—09, 11, 12, 14, 18). Cl. 10. Bălescu Dan (2387, 95, 97, 423, 24, 26, 72, 80, 82, 87, 517—19), Ciohodaru Lucia (2408, 33, 44—46, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 61—63), Marinaş Marina (2417, 24, 30, 45, 46, 48, 49, 51—53, 55, 56, 58, 61—63, 72, 98, 518, 21, 29, 31, 36), Vlad Silvia (2357, 95, 97, 404, 05, 07—10, 44, 46, 48, 49, 53, 55, 56).

S.m.10. Cl. 9. Repciuc Rodica (2419, 29, 37, 39, 47, 51, 58, 72, 82, 84, 87, 505, 07, 09, 11, 15, 18, 19, 21, 23).

S.m.11. «D. Cantemir». Cl. 9. Emilian St. (2392, 95, 404—10, 45, 55, 57), Mocanu Florin (2395, 407, 10, 11, 33, 45, 46, 48, 55—57, 62, 518, 19).

S.m.12. Cl. 8. Iovănescu Ruxandra (2503, E: 903, 08, 09, 22, 23, 25, 26, 33, 34).

S.m.13. Cl. 9. Boerescu Adrian (2404, 05, 09, 23,38, 46—48, 52, 55, 56, 62, 80, 82, 95, 97, 518, 33). Cl. 10. *Lerner Emil* (2382, 85, 90, 93, 401, 09, 24, 30, 38, 44, 47, 39, 51, 53, 61, 65, 66, 70—72, 78, 80, 82—84, 97—99, 505, 07, 08, 11, 13, 15, 18, 19 21, 23, 28— 33, N, P), Osiceanu C. D. (2392, 95, 404, 0+, 07, 09, 10, 438, 45, 46, 50, 52—56, 61—63

S.m.15. Cl. 9. Ionescu Sorina (2423—27, 29, 44—48, 50, 53, 55—58, 61—63).

S.m.16. Cl. 10. Olteanu Elvira (2444—52, 54—59, 63, 97).

S.m.17. Cl. 6 Mavromatis Alex. (E: 866, 85, 88—91, 93—96, 903, 06, 09). Cl. 7. Fuchs Heinrich (E: 893, 98, 90—903, 05, 08, 09, 11, 13—15, 19). Cl. 8. Panait Nic, 45, 55, 63, E: 912, 17, 19, 21, 23, 25, 33, 34).

S.m. 18. Cl. 9. Enişteanu Nic. (2505, 09, 15, E: 921—23, 25, 26, 33, 34).

S.m.19 « I. Creangă ». Cl. 8. Ciodaru Venera (E: 911, 13, 14, 18, 21, 23, 27, 30, 32—34).

S.m.20 « Gh. Şincai ». Cl. 9. Marcu Mihai (2407, 45, 46, 49, 53, 99, 505, 18),

S.m. 22 « Gh. Lazăr ». Cl. 8. Chirilă Rodica (2438, 55, 56, 62, 63, 99, E: 903, 08, 14, 17, P), Ciorănescu Ioana (2438, 79, 80, 91, 99, 505, 18, 32, E: 923, 25, 30, 32), Irimescu Gh. (2420, 38, 56, 61, 62, 68, E: 899—901, 07—09, 11, 14, 18), Raicea Alexandra (2438, 91, E: 895, 905, 11—19). Cl. 10. Ciocănaş Doina (2385, 414, 48, 53, 54, 57, 90, 96, 97, 518, 33, 35), Gheorghiţă Mariana (2384, 406, 11, 13, 14, 16, 17, 26, 30, 87, 89, 531).

S.m. 23. Cl. 9. Burunţia Const. (2384, 410, 44, 64, 82, 88, 89, 91, 92, 505), Voinescu Alexandru (2423, 46, 51, 72, 84, 507, 09, 11, 15, 18, 19, 30). Cl. 10. Cociu Mircea (2418, 33, 77, 87, 88, 90, 91, 95, 99, 505, 18, 21, 23, 26, 28, 34).

S.e. 24. Cl. 7. Teodorescu Floreta (2456, E: 900, 02, 03, 07, 09, 11, 14, 15, 17—19, 22—33, 34).

S.m. 28. Cl. 10. Moraru Mircea (2472, 73, 82, 89, 97, 502, 10, 15, 18, 21).

S.e.nr. 128. Cl. 7. Dogaru Petre (E: 885, 86, 88—91, 93, 97, 902, 06, 09).

S.e. nr. 119. Cl. 6. Mira Constanţa (2440, 89, 92, E: 899—902, 05, 06, 11—13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 31, 33, 34). Cl.. 7. *Mira Eugen* (2503, 05, 07—09, 11—13, 15, 19—21, 23, 25, 28, 29, 31—33, 36, 38—40, 42, 44—47, 51, 53—56, 60—63, 71, E: 899—11, 13—34, 65, 66, 80, 82, 84—86, 88, 93, 99).

BUZĂU. S.m. 2. Cl. 9. Paraschiv Elena (2472, 75, 76, 88, 91, 97, 504, 05, 18, 21, 23, 28—31, 33). Cl. 10. Ceanuev Nina (2472, 75, 76, 88, 91, 97, 504, 05, 18, 21, 23, 28—31, 33). Deliu Mircea (2442, 45, 46, 49, 57, 62, 63, 72, 97, 505, 18, 21, 23, 31).

CĂLĂRAŞI. S.m.1. Cl. 9. Petruş Octavian (2438, 45, 46, 55—57, 61, 62, 64, 505, 18, 23),

CÎMPINA. S.m.1. Cl. 9. *Palaghiţă Iordache* (2404, 11, 14, 26, 27, 31, 32, 37, 44, 45, 48, 49, 52—54, 61, 64, 65, 72, 77, 78, 80—84, 89—91, 97, 98, 503, 09, 15, 18—21, 23. 28, 33—36). Abs. Săndulache Mircea (2445, 48—50, 52, 53, 56, 57, 61—63, 72, 78), Nicolescu Valentin (2432, 44—49, 52—54, 59, 63, 90, 91, 502, 10, 18, 21, 25, 35).

CÎMPULUNG — Muscel. S.m.1. Cl. 8. Simionică Traian (E: 903, 06, 08, 09, 11, 12, 14, 15, 19, 21—23, 33, 34). Cl. 10. Comanici Dumitru (2404, 05—07, 09, 10, 33, 45—48, 57, 61—63, 92).

CLUJ. Stud. *Cotîrlea Ioan* (Fac. mat. fiz.) (2386), 87, 95, 405—07, 09—11, 14, 15, 17, 45, 48, 50, 52—58, 60—63, 97, 72, 80, 81, 87, 99, 518, 23, 30, 31, 34).

S.ped. 2. Anul I. Bernat Anisia (E: 899, 902, 09, 11, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 33), Bozianu Verona (E: 902, 03, 06, 09, 11, 12, 15, 18, 19, 25, 33), Fechete Rozalia (E: 859, 908, 09, 11, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 33).

S.m. 4. Cl. 7. Dragomir Viorel (E: 911, 15, 18, 21—23, 30, 32—34). Cl. 8. Egri Gelu (E: 911, 13, 14, 17—19, 21—23, 25, 26, 32, 33), Lungu Şerban (2392, 400, 05, 08, 38, 64, E: 893, 94, 905, 08, 09, 23, 25, 32), Micu Radu (2392, 406, 38, 55, 63, 64, E: 886, 90, 93, 99, 903, 09, P). Cl. 9. Pamula Adrian (2497, 99, 503, 04, 08, 09, 19, 21, 23, 31), Severeanu Chisăliţă (2459, 63, 72, 83, 87, 99, 518, 19, 21, 23, 33, 36). Cl. 10. Bîrzan Romanel (2439, 95, 501, 03, 05, 07, 10, 11, 13, 18, 19, 21, 22, 28—31, 33).

S.m. 5. Cl. 10. Handraluca Viorel (2395, 445, 46, 48, 50, 55—57, 62, 63, 68, 72, 73, 83, 87, 97, 515, 18), Şerban Ilie (2444—46, 48—59, 61, 62, 65, 72, 73, 76, 77, 83, 87—91, 97).

S.m.8. Cl. 8. Cimoca Gh. (2438, 56, 63, 65, E: 900, 05, 12, 16, 17, 18, 34).

CONSTANŢA. S.m. 1. Cl. 7. Cadar Omer (E: 906, 109, 11, 12, 14, 15, 21, 25, 34).

CORABIA. Cl. 8. Dobana Florea (E: 886, 89, 93, 99, 900, 03, 11, 19, 21—23, 26, 32—34), Văleanu Const. (E: 893, 99, 900, 02, 03, 11, 14, 21, 34).

CRAIOVA. Studenţi: *Dinuţ Teodor* (2431, 34, 68, 80, 81, 88—90, 501, 03—05, 07, 11, 12, 17—23, 26, 31, 33—35, 37, 38), Karavias Nicolaos (2392, 413, 42, 48, 55, 87—89, 91, N, P), Mihail Gh. (2430, 33, 67, 72, 76, 87, 89, 97, 99, 517—20, 23, 28—30, 33, 34, 36, P), *Tăriţă Ion* (2424, 33, 44—46, 48—50, 52—57, 61—63, 72, 76, 97, 505, 11, 15, 18, 21, 23, 28, 30, 31, 36).

S.m.1« N. Bălcescu ». Cl.10. Albu Gh. (2406, 10, 14, 15, 26, 45, 48—50, 55, 57, 59, 62), Stancu Dinu (2444, 49, 52—54, 56, 60, 61, 63, 97, P).

S.m.2. « Fraţii Buzeşti ». Cl.10. Bărbulescu Ion (2418, 19, 57, 72, 75, 77, 78, 87, 97, 518, 32, 34).

S.m.3. Cl. 8. Cetăţeanu Rodica (2455, 56, 62, 63, E: 903, 11, 12, 16, 17, 34). Cl. 10. Rădulescu Ecaterina (2472, 87, 97, 505, 18, 20, 23, 36, E: 911, 14, 21—23, 32).

S.m.8. Cl.6. Grădişteanu Elena (E: 888, 92—94, 96, 97, 906, 22, 33, 34). Cl. 7. Giurcă Aurora (E: 903, 05, 10, 11, 14, 17, 18, 23, 32, 65).

DEVA. S.m.2. Cl. 10. Ionescu Adrian (2433, 42, 45, 49, 72, 76, 90, 518, 26, 31, 34)

FĂLTICENI. S.m.2. Cl. 8. Salaru Corneliu (E: 886, 93, 911, 14, 21—23, 32—34)..

FOŞCANI. S.m. « Unirea ». Cl.7. Popa Nic.)2488, 91, 521, 23, 25, 28, 35, E: 914, 17, 18, 26, 30). Cl. 8. Jinga Ionel (E: 889, 97, 902, 18, 21—23, 33, 34, 38, 55, 63), Pantelimon Ana (2394, 98, 405—07, 09, 10, 62, 63, E: 902), Verdiş Emil (E: 911, 18, 21—23, 25, 28, 32—34). Cl. 9. *Rădescu Eugen* (2384, 94, 98, 415, 19, 20 23, 24, 26, 32, 38, 40,, 49, 50, 53, 59, 71, 72, 75, 77, 89, 91, 99, 502, 03, 05, 08—10, 12, 18, 19, 21—23, 30, 33). Cl. 10. Ciobotaru Adrian (2404, 05, 09, 48, 52, 59, 62, 77, 97, 518).

GAEŞTI (Piteşti). Cl. 10. *Tîrlan Gabriel* (2382, 97, 401, 03, 05, 07, 09, 11, 12, 14—17, 20, 21, 24, 32, 36, 71, 76, 78, 80, 86, 88, 89, 92, 97, 99, 504, 06, 12, 14, 19, 21, 23, 24—27, 30, 34, 35).

GALAŢI. S.mil.mar. Cl. 9. Căpran Petre (2384, 85, 92, 4020, 25, 27, 44—47, 49, 53—55, 57, 65, 99). Cl. 10. Dumitriu Gh. (2416, 38, 42, 45, 49, 50, 52—54, 62, 63, 92), Tudorache Mihai (2418, 33, 69, 72, 76, 77, 80, 82, 83, 87, 89, 90, 97, 99).

S.m.1. Cl. 10. *Chirilă Marin* (2418, 19, 24, 26, 31—33, 36, 73, 76, 81, 83, 86—91, 93—99, 518, 19, 28—31, 33—36, P).

S.e. Viziru. Cl. 7. Custură Cornel (E: 899, 901, 02, 09, 21, 23, 28, 32—34).

GHELAR (Hunedoara). Cl. 6. Radu Gelu (2455, 62, 523, E: 901, 03, 05, 06, 08, 09, 11, 134, 17, 18, 21—23, 30, 32—34).

GIURGIU. S.m.1. Abs. Bătineţu Dumitru (2392, 94—97, 99, 400, 02, 04—17, 46, 55, 61—63, P). Cl. 8. Lăzărescu Gh. (2438, 55, E: 819—902, 05, 09, 11, 21, 23—25, 32—34), Perşoiu Titus (2385, 400, 05, 08, 09, 63, E: 905, 07, 11, 14, 15, 21, 23, 30, 34), Popescu Cristian (2445, 58, 504, 23, E: 891, 900—02, 08, 11, 14—19), Radu Florina (2438, 55, 56, E: 886, 90, 93, 98 909, 11, 18, 21, 23, 32, 34). Cl. 9. Ciureanu Gh. (2386, 445—48, 55, 56, 62, 63). Cl.10. ca Melania (2401, 72, 74, 76, 77, 86, 88—90, 521), *Şerbănescu Florin* (2397, 412, 16, 26, 27, 38, 39, 42, 44—49, 51—58, 61—63, 72, 83, 86, 87, 97, 99, 503, 05, 18, 28, 29).

HUNEDOARA. Cl. 9. Hamzulea Nic. (2438, 45, 46, 48, 53—56, 61—63).

IANCA (Galaţi). Cl. 10. *Bănică Radu* (2500, 01, 03, 05, 07, 09—12, 15, 18—33, 35, 36), Caracoti Stere (2420, 26, 36, 64, 65, 68, 71, 72, 77—83, 85, 87, 89—95, 97—99, 509, P).

IAŞI. S.m.1. « M. Sadoveanu ». Cl. 8. Iancu Zissu (2408, 64, E: 886, 93, 98, 900, 11, 16, 21—23, 28, 30, 32—34), Munteanu Dan (2450, E: 903, 05, 07, 08, 14, 17, 18, 23, 32).

S.m.3 « C. Negruzzi ». Cl. 8. Brumă Alexandru (2503, E: 903, 05, 06, 08, 09, 27—29, 33, 34), Caba Mihai (2404, 05, 09, 55, 62, E: 886, 88, 89, 97, 911, 23, 25). Cl. 10. *Popescu Claudiu* (2418, 20, 23—27, 32—34, 38, 39, 44—52, 54, 66, 71—73, 78—82, 87, 90, 95—99), Tibuleac Florin (2418, 20, 24, 27, 33, 44—49, 51—62, 72, 77). Studenţi: Abramovici Rene (constr.) (2432, 48, 52—56, 72, 89, 98, 99), Costovici Gh. (2438, 44, 49, 50, 53, 54, 58, 61, 97—99, 523), Mihai Aurel (2419, 38, 44, 49, 50, 53—56, 58, 63, 97).

LUGOJ. S. cont. agr. Anul II. *Serdeşnic Aurel* (2405—07, 09, 10, 38, 45, 46, 55—57, 61—63, 517, E: 886, 90, 91, 93, 94, 96—98, 900—03, 05, 06, 09, 14, 19, 21—23, 30, 32—34).

MEDIAŞ. Abs. Olteanu Const. (2431, 38, 47, 61, 57, 61, 72, 81, 88, 90, 97, 99, 503, 09, 15, 18, 20, 23, 35).

ORADEA. S.m.1. Cl.9. Pop Corneliu (2445, 48—52, 57, 61, 503, 18, 23), Sîrbu Pavel (2398, 438, 47, 50, 58, 61, 505, 09, 18, 21, 23, 29). Cl. 10. Belereşi Theodor (2404, 05, 10, 11, 46, 48—50, 52—55, 62, 63, 81, 97, 518, 23, 29, 30), *Held Petru* (2418, 19, 24, 27, 29, 31—34, 38, 41—64, 71—73, 75, 77, 83, 86—91, 97—2501, 14, 15, 18, 20—26, 30—37), Paşca Nic. (2425, 33, 48, 51, 52, 67, 71, 72, 77, 80—83, 85, 87, 88, 90, 91, 97, 98, 515, 18, 21, 23, 30, 31, 36), Patcos Ioan (2425, 26, 38, 44—46, 48, 49, 52—57, 62, 63, 72, 80, 85, 89, 98).

S.m.2. Nicoară Nic. (2382, 84, 85, 87, 92, 94—96, 99, 400, 02, 04—17).

ORAŞUL STALIN. S.m.3. Cl.8. Cioacă Maria (2455, 56, 61—63, E: 893, 94, 98, 921—23, 27, 28, 32). Cl. 10. Corbu Lucia (2382, 92, 95, 97, 404—10, 44 44—46, 48, 49, 52, 53, 55—58, 6163).

S.m.4. Cl. 10. Istok Albert (2433, 38, 46, 57, 72, 87, 90, 98, 506, 18, 21, 23, 25, 26, 35, 36). Abs. Cerţu Ion (2444—50, 52—57, 59—63).

PIATRA OLT. Cl. 7. *Florea Dorin* (2438, 44—46, 509, 09, 20, 53, 56, 61, 62, E: 888, 89, 95, 97—900, 02, 03, 05, 08, 11—17, 19, 21—23, 25, 28, 30, 32—34, P).

PIATRA NEAMŢ. S.m. 2. Cl. 8. Alupului Mariana (2455, 56, 62, E: 903, 05, 08, 09), Crăcăoanu Ana (2455, 56, 62, E: 903, 05, 07—09), Furnicelli Margareta (2455, 62, E: 903, 05, 07—09, 21, 23, 32, 34), Nica Elena (2455, 56, 42, E: 903, 05, 07—09), Petraru Clementina (2455, 56, 62, E: 904, 05, 07—09), Petrescu Mariana (2455, 56, 62, E: 905, 07—09), Tofan

Országos Műemléki Könyvtár TULAJDONA

Carmen (2455, 56, 62, E: 903, 05, 07—09), Tofan Ioana (2455, 56, 62, E: 903, 05, 07—09), Veissmann Felicia (2455, 56, 62; E: 903, 05, 07, 08, 11, 14, 23, 30, 34). Cl. 9. Răşcănescu Mircea (2432, 49, 53, 55, 56, 61, 62, 74, 505, 18, 21).

PIETROŞANI. S.m.1. Cl. 8. *Grozavu Mihai* (2392, 404, 05, 27, 38, 53, 54, 56, 64, 91, 503—05, 11, 31, 38, E: 885, 86, 88—91, 93, 94, 97, 98, 902, 08, 11, 14—16, 18, 22, 23, 27, 30, 33), Păsculescu Gh. (2405, 08—10, 20, 46, 55, 56, 62, 518), Popescu Mircea (2438, 55, 515, E: 903, 11, 13—15, 17, 18, 25).

PITEŞTI S.m.1. Cl. 6. Tomescu Titu (2406, E: 888, 92, 97, 902, 22, 28, 34). Cl.8. Zamfirescu Rodica (E: 911, 14, 18, 21, 22, 23, 28, 29, 32, 34). Cl. 10. Duţă Doru (2395, 404—09, 11, 17, 45, 97). Abs. Ghiţulescu Iulian (2431, 32, 34, 64, 89, 91, 519, 25, 28, 34, 35, P).

PLOEŞTI. S.m.1. « I. L. Caragiale ». Cl. 7. Georgescu Adriana (E: 885, 86, 88, 90, 91, 93, 94, 96—98), Neolaescu Mihaela (E: 899—903, 05—09). Cl. 8. Constantinescu Dumitru (2404, 05, 08; 15, 56, 63, E: 885—87, 93, 98—900, 02, 11, 13, 14, 22, 23, 26, 32—34, P), *Cramer Eugen* (2405, 06, 55, 56, 62, E: 886, 89, 93, 94, 98—900, 02, 03, 09, 11—15, 17, 19 21—25, 28, 32, 33), Dumitrescu Vadim (E: 902, 09, 11, 14, 19, 21—23, 28, 30, 32, 34). Ene Dumitru (2438, 50, 55, 56, 62, 64, 71, 82, E: 900, 06—09, 11, 12, 14—19), Fezi Adrian (2387, 84, 400, 05, 06, 09, 61, 62, E: 899, 902, 03, 05, 15—17), Ionescu Ioan (2408, 55, 56, 67, E: 886, 91, 94, 95, 97, 98, 902, 03, 05, 11, 12, 14, 19, 21—23, 30, 32), Popescu Gh. (2406, 38, E: 885, 86, 88—90, 93, 94, 97—900, 02), Radu Ioana (2456, E: 899, 900, 02, 09, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 25—28, 30, 32—34), Ştefănescu Rodica (2384, 87, 96, 400, 05, 38, 55, 56, E: 899, 902, 05), Teodorescu Ion (E: 893, 94, 98—900, 02, 09, 11, 14, 15, 17, 19, 21—23, 25, 28, 32—34), Teodorescu Luiza (2392, 438, 45, 55, 56, E: 891, 94, 97, 902, 05, 14, 18, 21, 23, 32—34), *Trifan Corneliu* (2392, 400, 04—06, 08, 20, 38, 55, 56, 62, 63, 504, 32, E: 886—89, 92—94, 97—903, 06, 11—15, 19, 21—23, 28, 29, 32—34, P), Tudor Dumitru (2420, 56, E: 887—89, 93, 98—900, 02, 03, 06, 11, 32), Verbancu Smaranda (2438, 55, 56, E: 886, 90, 91, 94, 902, 05, 09, 14, 17, 21923, 32—34). Cl. 9. Dumitrescu Viorel (2436—28, 38, 45—50, 52, 53, 56—58, 61, 62, 64), Leonte Dinu (2424, 38, 45—63), Rădulescu Romulus (2403, 11, 15, 18, 21, 38, 48, 55—57, 61—63). Cl. 10. *Delibaş Const.* (2429, 65, 71, 72, 77, 78, 80—85, 87, 88, 90, 91, 94, 96—501, 03, 05, 07, 09, 15, 18, 19, 21, 23, 28, 30—36), Niţă Mircea (2444—49, 53—57, 60—63, 72, 88, 90, 97, 518, 70, 83), Popescu Eugen (2431—33, 53, 74, 76, 515—26, 33—36).

S.m.2. Cl. 7. Ciortan Stanea (E: 886, 90, 92, 95, 99, 900—04, 06, 18). Cl. 8. Rădulescu Mariana (2512, E: 911, 12, 14, 15, 17, 19, 21—23, 27, 28, 30, 32—34, P).

S.m.3. Cl. 7. Pampu Virginia (E: 911, 21—25, 28, 31—34), Păunescu F. (E: 911, 14, 16, 19—21, 23, 28, 33, 34), Vasile Dan (E: 900, 03, 05, 07, 09, 16, 21, 25, 28, 32). Cl. 9. Caliniac M. (2432, 53, 54, 504, 21, 24, 25, 34, 36). Cl. 10 seral. Banu Const. (2432, 48, 51, 53, 55, 57, 58, 60—62, 77, 88, 91).

PUCIOASA. Cl. 8. Erhan Const. (2404, 05, 08, 09, E: 890, 94, 11, 12, 14—18, 21—23, 25, 28), Rudoiu Viorel (E: 911, 15, 17—19, 21, 23, 25, 28, 30, 33, 34), Serbănoiu Nicolae (2404, 05, 09, E: 886, 88—90, 93, 97, 98, 906).

RĂDĂUŢI. Cl. 10. *Deutsch Herbert* (2387, 92, 95, 97, 400, 05, 07, 09, 10, 12, 15, 23, 26, 37, 46—49, 51—58, 60—63), Teodosie Traian (2384, 92, 95, 97, 404, 05, 07, 09—11, 15, 46—49, 52, 55, 56, 62, 63).

REŞIŢA. Cl. 8. *Perianu Dan* (2420, 34, 38, 55, 59, 61—64, 81, 504, 20, 37, E: 899, 900, 02, 03, 06, 09, 11, 14, 15, 17—19, 21, 25, 27, 28, 30).

RÎMNICU SARAT. Cl. 8. Talez A. (2448, 52, 55, 57, 61, 62, 72, E: 914, 26).

RÎMNICUL VÎLCEA. S. m. 1. Cl.8. Parlapan Florin (E: 893, 97 99, 901—03, 09, 09, 21, 26, 33, 34), Serbu Horia (2491, 98, 511, E: 888, 89, 93, 97, 08, 18, 19, 21, 33, 34). Cl. 9. Iliescu Cristian (2446, 48, 52, 55, 56, 62, 63, 503, 09, 11, 18—20, 36). Cl.10. *Ancuţoiu Gh.* (2418, 19, 33, 35, 65, 71, 72, 75—78, 80, 87—91, 94—501, 03, 07, 11, 12, 15, 18—21, 23, 25, 26, 28—31, 34—36, P).

ROMAN.S.m.1. Cl. 9. Ilioi Const. (2391, 98, 404, 08, 24, 30, 32, 48, 50, 52, 53, 58, 59, 64, 80, 81, 87, 89, 97—99, 505, 07, 18—21, 23, 30, 33, 36).

ROŞIORII DE VEDE. Cl.9. Grecu Anton (2391, 402, 17, P, N).

SATU MARE. S.m. « M. Eminescu ». Cl. 9. Pop Gh. (2465, 68, 75, 78, 91, 92, 505, 18, 21, 29). Cl.10. Cupşa Ion (2392, 405, 16, 19, 14, 48, 52, 55, 63, 72, 518, P), Ferenţi Gh. (2383, 431—33, 38, 42, 76, 77, 91, 506, 18—21, 23, 24, 26, 34, 35), Simon Iuliu (2392, 404, 05, 07—09, 15, 45, 52, 55, 56, 58, 61—63).

SUCEAVA. S.m. Cimpulung Moldovenesc. Cl. 10. Popovici Valeriu (2444—46, 49, 51, 53—55, 57, 58, 61, 62, 82, 89, 97). Absolvenţi: Boiciu Vianov (2472, 77, 80, 83, 87—91, 97, 510, 15, 18, 21, 25, 28—30, 34, 36), Popovici Laura (2444,46, 49, 57, 72, 82, 83, 97, 505, 18, 21, 28).

SLATINA. Cl. 9. Cigănilă Gabriel Eugen (2404, 05, 07—09, 11, 45, 55, 61, 62, 518). Cl. 10. *Bărbulescu Marcel* (2411, 18, 44, 45, 48, 65, 66, 68, 70, 72, 78, 80—82, 84, 89, 92, 95, 97, 800, 01, 03—05, 07—23, 25, 26, 28—31, 33—36, P).

SIGHIŞOARA. S.m. germ. 3. Cl. 10. Bucowski Petre (2434, 72, 78, 81, 83, 87, 97, 518, 19, 23, 30, 36), Roth Harold (2404, 44—47, 53, 54—57, 60, 61—63).

SIBIU. S.m.3. Cl. 5. Carata Viorica (E: 897, 901, 09, 12, 21, 22, 24, 25, 28, 32, 34). Cl. 6. Oprea Petre (E: 888, 89, 97, 901, 09, 12, 24, 25, 28, 32). Cl.7. Dobre Viorica (E: 923, 25—28, 30, 32, 33).

S-au mai primit multe rezolvări de la clasele 5 şi 6 însă copiate unele după altele. Cl. 9. Ancuşa Victor (2392, 95, 404, 08, 10, 38, 42, 44, 46, 48, 49, 53—56, 61, 62, 64, 90, 91, 97, 98, 505, 18, 21, 23).

TECUCI. S.m. Cl.8. Chisu Dorin (2405, 09, E: 886, 888—90, 93, 98, 911, 14, 21, 23), Chişcaru Nicolae (E: 911, 12, 14, 19, 21, 23, 28, 32—34, P), Sandu Eugeniu (2462, E: 891, 914, 21—23, 30, 32—34), *Tomu Costache* (2438, 55, 56, 62, 512, 19, 22, 23, E: 899, 901, 03, 05, 08, 09, 11—14, 16—19, 21—23, 25, 28, 30, 32—34). Cl. 10. Catană Costică (2426, 50, 60, 71, 72, 83, 84, 88—91, 97, 505, 07, 11, 12, 18, 19, 21—23, 25, 28, 29, 31, 33, 36), Chişcaru Marin (2395, 402, 06—08,10, 56, 72, 87—90, 97, 518, 22, 23, 25, 36, P), Hiloti Dan (2477, 97, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 31, 36, 52, 74, 77, 88, 97), Munteanu Romeo (2398, 431, 38, 52, 74, 97, 511, 18—23, 25, 32, 35, 36), Vasilică Constantin (2413, 32, 36, 52, 53, 56, 60—64, 89, 525, 35).

TÎRGOVIŞTE. S.m.3. Cl. 10. Diaconescu Silviu (2402, 06, 17, 33, 88, 90, 505, 20, 21, 25, 35), Abs. Dumitru Petre (2445, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 61—63). S.m. 2. Cl. 8. Bărboiu Virgil (2482, 91, 503, 11, 15, 31, 33, E: 910, 11, 14, 17, 18).

TÎRGU JIU. S.m.1. Cl. 7. *Cancer Anca* (2418, 24, 38, 42, 44, 50, 56, 61—64, 99, E: 911—15, 17—25, 27—29, 31—34). S.m.2. Cl. 9. Sullea Dan (2404—06, 09, 48, 52, 55—57, 62). S.m.3. Cl. 10. *Călugăru Viorel* (2382, 92, 95, 405—07, 09, 10, 12—16, 42, 44, 49, 53, 55—57, 60—63, 90, 518, 22, 23, 28, 30). Absolvenţi: Burghiu Victor (2477, 89, 91, 97, 511, 15, 18, 21, 23, 24, 29, 30, 34, 36), Mărgineanu Constantin (2384, 97, 418, 27, 33, 38, 41, 44—59, 61—63, 72, 77, 81, 83, 87, 89—91, 97, 99).

TÎRGU NEAMŢ. Cl. 9. Chelaru Mihaela (2424, 45, 46, 48, 50, 52, 53, 61—62). Cl. 10. Stîngu Nicolae (2386, 94, 406, 16, 20, 31, 31, 36, 39, 42, 43, 55, 77).

TIMIŞOARA. S. m.1. Cl. 8. Bratu Dorin (2499, E: 911, 12, 14, 15, 17, 18.

S.m.3. Cl. 9. Miloş Iulia (2446, 50, 55, 56, 61, 62, 84, 500, 07, 08, 21, 23).

S.m.5. Cl. 10. Grăjdeanu Stelian (2418, 45, 49, 53, 55, 56, 60, 63, 517, 18, 23, 34), Subu Teofil (2395, 407, 18, 33, 45, 47, 48, 52—54, 60, 61, 87, 517, 18, 23, 26, 34).

TG. MUREŞ. Abs. *Sasu Aurel* (2392, 95, 404, 05, 07, 09, 10, 26, 31, 32, 33, 34, 38, 44, 45, 46, 48, 55, 56, 57, 62, 63, 64, 72, 89, 90, 91, 97, 515, 18, 23, 35).

TOPLIŢA. Cl. 8. Cotruş Ioan (2503, 23, 25, E: 921—24, 32—34).

TURNU SEVERIN. S.m.1.Cl.8. Atanasie Elena (2405, 34, 38, 56, 63, E: 886, 88, 90, 99, 901, 02, 09, 11, 18, 21, 27, 32—34), Băran Gh. (2462, E: 903, 06—09, 11, 14, 17, 24, 25, 33, 34). Cl. 9. Suici Gh. (2432, 36, 53, 82, 89, 91, 509, 18, 20, 21, 23). Cl. 10. Dobrovolski Mihai (2394, 406, 18, 26, 31, 33, 34, 42—46, 48—51, 53—58, 61—63), Găletuşe Stelian (2418, 30, 32, 33, 38, 42, 44—50, 52—58, 60—64, 86), Nistoroiu Titel (2392, 95, 404, 05, 07—11, 15, 17, 33, 45, 46, 48, 52, 55—57, 61—63).

VASLUI. S.m. 1. Cl. 9. Maftei Ioan (2392, 95, 97, 409, 10, 44—47, 55, 57, 62, 65, 82, 97, 507, 11, 15, 18—20), Sarion Vasile (2432, 34, 38, 46, 51, 55, 58, 61, 62, 64, 67, 89), Cojocaru Constantin (2392, 404—11, 38, 44—48, 52, 55, 56, 58, 61, 62, 515, 18, 20, 21).

ZALĂU. Farcaş Beniamin (2433, 46, 49, 52—57, 63, 518, 23, 26, 28, 29, 34, P).

Plicurile cu rezolvări de cel puţin zece probleme se trimit pe adresa: *Gazeta matematică şi fizică, Seria B*, Str. Academiei nr. 14 Bucureşti. Rezolvitorul va aşeza în plic problemele în ordinea lor numerică, iar pe plic se va arăta clasa, şcoala şi oraşul din care face parte, fiind necesare la repartizare pentru corectarea lor. La problemele propuse în acest număr se primesc soluţii pînă la 1 decembrie 1957. La exerciţiile propuse pentru şcoala de 7 ani nu se primesc soluţii de la elevii claselor IX—XI şi nici de la studenţi.

C. 703. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 — BUCUREŞTI R.P.R. **Preţul Lei 1**

E 1426 a

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYME - WYMIANA
IA - ...HA

Anul VIII — septembrie 1957

9

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, nr. 9 — septembrie 1957

SUMARUL

Pag.

1. *Leonhard Euler — 250 ani de la naşterea sa, de M. Schein* 449
2. *Parcelări de arii de V. Turcu* 455
3. *Razele X şi cîteva din aplicaţiile lor în ştiinţă şi tehnică de Al. Ciocănel* 466
4. *Note matematice* 480
5. *Probleme rezolvate (2221*, 2306, 2334, 2335, 2336, 2338)* 483
6. *Probleme propuse (2772—2793)* 489
7. *Chestiuni de examen (2794—2806)* 492
8. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1013—E: 1024)* 494
9. *Poşta redacţiei* 496
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 497

Anul VIII 9 septembrie

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovan A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ. redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

R E D A C Ţ I A: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articole, note, recenzii, probleme propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia G.M.F.-B se vor trimite pe adresa de mai sus

Orszagos Mûszaki Könyvtár TULADONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

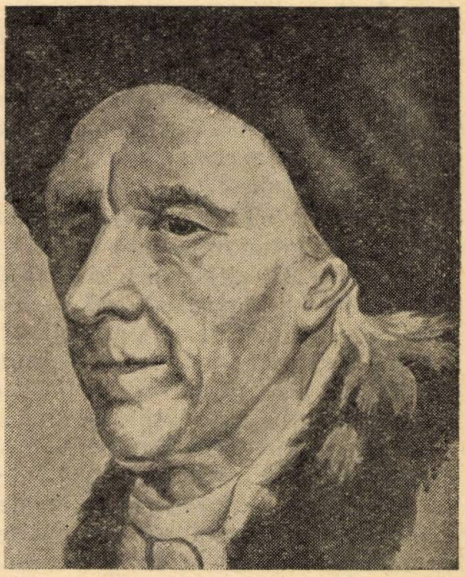
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VIII Nr. 9 septembrie 1957

LEONHARD EULER—250 DE ANI DE LA NAŞTEREA SA

PROF. M. SCHEIN

LEONHARD EULER, cel mai mare matematician al secolului al XVIII-lea, s-a născut la 15 aprilie 1707 în oraşul Basel (Elveţia). La vîrsta de 13 ani el intră la Universitatea din Basel, unde capătă o cultură destul de variată în ce priveşte ştiinţele fizico-matematice, limbile străine, etc. Părinţii săi doreau ca el să se dedice studiului teologiei. Din fericire pentru el însuşi şi pentru întreaga omenire, la Basel, Euler vine în contact cu marele matematician Johann Bernoulli, elevul şi continuatorul lui Leibnitz, sub influenţa căruia capătă un interes deosebit pentru ştiinţă. Johann Bernoulli descoperă îndată calităţile, talentul, înclinaţia tînărului său elev pentru matematică şi se îngrijeşte în mod deosebit de pregătirea lui dîndu-i lecţii speciale. Euler renunţă la studiul teologiei şi se dedică pentru întreaga sa viaţă ştiinţelor fizico-matematice.



Leonhard Euler

La vîrsta de 19 ani el publică prima sa lucrare, atrăgînd admiraţia profesorului său. Între Iohann Bernoulli şi Euler se stabileşte o legătură strînsă. Marele Bernoulli apreciază mai tîrziu atît de mult cunoştinţele fostului său elev, încît îi cere chiar păreri şi sfaturi în legătură cu unele lucrări pe care le publică.

După terminarea studiilor, Euler, încearcă să obţină un post la Universitatea unde a studiat dar nu reuşeşte. În această situaţie el acceptă cu bucurie invitaţia de a merge în Rusia (1727), ca să lucreze la Academia de Ştiinţe din Petersburg, care se înfiinţase de curînd şi care invita profesori, oameni de ştiinţă, savanţi din toată Europa.

Plecarea lui Euler în Rusia a avut o însemnătate hotărîtoare pentru întreaga sa viaţă, pentru întreaga sa creaţie.

« Pentru un tînăr învăţat — spune Euler mai tîrziu — cel mai important lucru este ca obiectul principal al ocupaţiei sale să fie specialitatea ». Rusia îi oferă lui Euler chiar la începutul carierei sale această posibilitate. Referindu-se la el însuşi cît şi la alţi învăţaţi care au venit să lucreze în Rusia, Euler spune: « În cazul că nu s-ar fi ivit această excelentă ocazie, aş fi fost nevoit să mă ocup de alte ştiinţe, de pe urma cărora — după toate indiciile — m-aşi fi prostit numai ».

Rusia a devenit pentru Euler a doua patrie. La Petersburg îşi începe activitatea ştiinţifică şi obştească, aici se căsătoreşte îşi petrece cea mai mare parte din viaţă, publică o bună parte din lucrările sale, îşi instruieşte discipolii.

Curînd după sosirea la Petersburg, la vîrsta de 26 de ani, Euler obţine titlul de academician şi viaţa lui este de acum încolo strîns legată de activitatea Academiei de Ştiinţe. El face parte din comisia care conduce Academia, devine conducătorul primei şcoli matematice ruse. « Împreună cu Petru I şi cu Lomonosov — scria academicianul sovietic S.I. Vavilov — Euler a devenit geniul bun al Academiei noastre, i-a dat slavă, tărie şi productivitate ».

La Petersburg, Euler a desfăşurat nu numai o bogată activitate ştiinţifică în domeniul matematicii, mecanicii, fizicii etc; el a lucrat mulţi ani la alcătuirea hărţilor geografice ale Rusiei, a făcut parte din comisia care se ocupa de problemele de măsuri şi greutăţi, recenza memorii pentru publicaţiile Academiei, ţinea lecţii publice, scria articole de popularizare a ştiinţei etc.

În 1741, din cauza neliniştei şi nesiguranţei care domnea în Rusia în timpul ţarinei Anna Leopoldovna, la invitaţia lui Frederic al II-lea şi cu aprobarea guvernului rus, Euler pleacă să lucreze la Academia de Ştiinţe din Berlin. În tot timpul cît a stat aici, Euler a menţinut legătura strînsă cu Academia din Petersburg. În această perioadă începe corespondenţa sa cu M.V. Lomonosov, pe care-l preţuia deosebit de mult pentru adîncimea ideilor sale.

În anul 1766 Euler se reîntoarce la Petersburg unde rămîne pînă la sfîrşitul vieţii sale. Curînd după întoarcerea din Berlin el îşi pierde aproape cu desăvîrşire vederea. De altfel, încă în 1735 el îşi pierduse un ochi din cauza unei boli. Orbirea nu l-a împiedicat însă pe marele om de ştiinţă să-şi continue rodnica activitate. Numai în această perioadă el dictează elevilor săi, cîteva sute de lucrări de matematică, fizică, mecanică. N-a apărut aproape nici un volum de lucrări al Academiei fără să conţină şi lucrări semnate de Euler. Datorită lui, ca şi altor savanţi, publicaţiile Academiei din Petersburg erau cunoscute în toate cercurile ştiinţifice din Europa. «Nu vă pot explica suficient — îi scria lui Euler cunoscutul matematician Daniel Bernoulli—cu ce aviditate sînt căutate peste tot «Memoriile» din Petersburg» («Memorii» se numeau publicaţiile Academiei). Euler lucra în această perioadă aşa de mult, încît publicaţiile nu puteau cuprinde toate lucrările sale. El spunea în glumă, că după ce va muri lucrările sale vor continua să apară în Jurnalele Academiei, încă 20 de ani. Greşise însă: lucrările sale descoperite mai tîrziu, au continuat să fie publicate după moartea lui încă 80 de ani.

Pentru meritele sale deosebite, Euler fusese ales membru în opt Academii. El a murit în plină putere de creaţie ştiinţifică, în anul 1783, lăsînd omenirii peste 900 de lucrări.

Strălucit matematician, Euler a obţinut rezultate însemnate şi în domeniul mecanicii, al fizicii, al astronomiei. Numărul imens de probleme pe care le-a abordat, caracterul lor variat, adîncimea şi eleganţa cu care le-a tratat sînt doar cîteva din aspectele activităţii sale ştiinţifice. Euler are nu numai meritul

de a fi dezvoltat problemele pe care le-a tratat, de a fi deschis perspective noi în dezvoltarea ştiinţelor fizico-matematice, dar şi acela de a fi aplicat în mod strălucit cele mai noi cuceriri ale matematicii din timpul său la cunoaşterea legilor naturii, în activitatea practică. În lucrările sale Euler a arătat cum pot fi folosite cunoştinţele de matematică în cunoaşterea realităţii. În creaţia lui, analiza matematică nu este o simplă construcţie, ci un instrument strălucit, absolut necesar în rezolvarea nenumăratelor probleme de fizică, mecanică, astronomie. Diferitele probleme din domeniul acestor ştiinţe se transformă la Euler în probleme de matematică. Aceasta se explică prin convingerea sa că lumea este realitatea obiectivă, care poate fi cunoscută de oameni, deci constituie obiectul analizei matematice.

Nu este posibil în cadrul unui articol să cuprindem întreaga activitate ştiinţifică a lui Euler, să analizăm contribuţia lui la dezvoltarea ştiinţelor fizico-matematice. De aceea, în cele ce urmează vom da numai un sumar al aspectelor prodigioasei sale activităţi.

În domeniul matematicii Euler s-a ocupat de toate ramurile ei: aritmetică, algebră, geometrie elementară, trigonometrie, teoria numerelor, geometrie analitică, geometrie diferenţială, analiză matematică. În numeroasele sale lucrări de matematică dintre care unele remarcabile prin expunerea clară, sistematică, metodică, Euler nu numai că a sintetizat tot ceea ce s-a făcut pînă la el, dar a introdus un imens material nou, care a îmbogăţit matematica şi a deschis perspective noi pentru dezvoltarea ei.

Să luăm de exemplu, aritmetica. Manualele de aritmetică folosite în Europa la sfîrşitul sec. al XVII-lea şi la începutul sec al XVIII-lea cuprindeau pe lîngă capitolele de bază ale aritmeticii, şi cunoştinţe de algebră, de geometrie şi de trigonometrie. Ele erau scrise într-un stil greoi şi lipsite de demonstraţii, de fundamentarea regulilor enunţate. Aritmetica elaborată de Euler, « Einleitung zur Rechenkunst », se caracterizează nu numai prin conţinutul ei ştiinţific şi claritatea expunerii, dar mai ales prin fundamentarea diferitelor operaţii şi reguli. Deci o atenţie deosebită acordă Euler elementului teoretic. El arată în prefaţă, că elevul memorează uşor şi-şi dezvoltă facultatea de a gîndi numai atunci cînd înţelege pe deplin tot ceea ce studiază. El aduce în lucrare multe lucruri noi, şi acordă o deosebită atenţie tehnicii calculului. Este ingenios, de ex. faptul că, pentru calculul numitorului comun al mai multor fracţii ordinare el împarte produsul numitorilor la cel mai mare divizor comun, pe cînd în cele mai multe manuale contemporane, numitorul comun se calcula efectuînd pur şi simplu produsul numitorilor.

O contribuţie valoroasă are Euler şi la dezvoltarea algebrei. El s-a ocupat mult de rezolvarea ecuaţiilor algebrice, de teoria logaritmilor, de analiza combinatorie şi de aplicaţiile ei în practica organizării asigurărilor, loteriilor etc. Manualul de algebră, « Aritmetica universală », elaborat după prelegerile sale, cam prin anul 1767, a avut o influenţă puternică asupra metodicii predării algebrei în toată lumea. Euler a schimbat radical programa cursului de algebră folosită pînă la el, în sensul că a scos o serie de chestiuni legate de algebra superioară, a separat complet chestiunile de geometrie analitică şi a introdus o serie de capitole noi: logaritmii, seriile simple, progresiile, fracţiile zecimale periodice, analiza nedeterminată. Lucrarea cuprinde mult material nou, demonstraţii originale. Se remarcă între altele analiza amănunţită a operaţiilor cu exponenţi fracţionari şi negativi, precum şi studiul cu totul nou şi original al lui Euler, despre logaritmi. Euler lămureşte în această lucrare caracterul reciproc opus al

adunării şi scăderii, al înmulţirii şi împărţirii. El arată că pentru ridicarea la putere există două operaţii inverse: în egalitatea $a^b = c$, unde a şi b sînt necomutative, se poate căuta fie rădăcina a, după b şi c, fie exponentul b, după a şi c. Cazul din urmă îl conduce pe Euler la noţiunea de logaritm. Înainte vreme logaritmii se defineau ca fiind termenii unei progresii aritmetice care constituie exponenţii termenilor unei progresii geometrice date. De altfel noţiunea de logaritm ca una din cele două operaţii inverse ridicării la putere fusese enunţată de Euler încă în anul 1778 în lucrarea « Introductio in analysi infinitorum ».

În « Aritmetica universală » el deduce regulile combinărilor, iar cu ajutorul lor formula « binomul lui Newton » pentru exponenţi pozitivi întregi. Trecerea la exponenţi fracţionari şi negativi el o face pe cazuri particulare.

Pentru prima oară se tratează în această lucrare, în mod special, fracţiile zecimale periodice infinite, mai întîi pe cazuri numerice, apoi pe exemple literale. De exemplu, pentru cazul $s = 0, abc.\ abc\ \ldots$ el obţine $1000\ s = abc, abc\ abc\ \ldots$; $999\ s = abc$; $s = \frac{abc}{999}$.

În lucrare sînt expuse numeroase chestiuni în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor. De ex. cu prilejul rezolvării ecuaţiei bipătrate el explică transformarea expresiei $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Este interesant că Euler mai notează ecuaţia de gradul doi $xx + px = \pm q$, cea de gradul trei, $ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$, însă ecuaţia de gradul patru $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Uu rol deosebit are Euler în dezvoltarea trigonometriei. Pînă la el funcţiile trigonometrice erau considerate într-un cerc de rază oarecare, raza intrînd în toate relaţiile şi calculele. De exemplu:

$$\text{« cos.: sin.} = R\text{: tang. » sau « cos.} = \sqrt{(R\square - \text{sin.}\square)} \text{ » etc.}$$

Nu era pe deplin clarificată problema semnelor funcţiilor trigonometrice în toate cadranele. În unele manuale, chiar în cele mai bune, se considera că unghiurile obtuse nu au în general sinusuri, deoarece « trigonometria nu discută despre liniile care se întîlnesc în afara unghiului ». În general nu se vorbea despre unghiuri mai mari de 180°. Aparatul de formule era foarte redus. Nu se foloseau transformări analitice. Fiecare teoremă se deducea separat din desen, şi se enunţa fie în cuvinte, fie sub formă de proporţie. De ex., într-o lucrare publicată în 1765, formula

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

în triunghiul ADE se scria:

« după cum $AE \times AD$: $\left(\frac{AE + AD + DE}{2}\right) \times \left(\frac{AE + AD + DE}{2} - DE\right)$ tot aşa după cum RR: $\square$ cos, semiunghiului DAE ».

În linii mari, trigonometria elementară a căpătat în mijlocul sec. al XVIII-lea, forma pe care o are azi, în primul rînd datorită lui Euler, mai ales prin lucrarea sa « Introductio in analysis infinitorum ». El a dat explicaţia noţiunilor de sinus, cosinus etc, precum dezvoltarea în serii şi produse ale funcţiilor trigonometrice. Deosebit de preţioasă este tratarea analitică a întregii trigonometrii, pe care pentru prima oară a dat-o Euler. El a arătat cum se pot deduce pe cale analitică toate formulele trigonometrice pornind de la cîteva formule de

bază, a stabilit formule necunoscute pînă la el, a rezolvat problema semnelor funcţiilor trigonometrice în fiecare cadran, a dat formulele de reducere, a introdus notaţia — care se foloseşte şi azi — a laturilor unui triunghi, prin a,b,c şi a unghiurilor opuse prin A,B,C. Tot el a stabilit formulele:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \; ; \; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

care leagă funcţiile trigonometrice de cele exponenţiale. Folosind seriile, Euler a făcut un studiu amănunţit asupra proprietăţilor funcţiilor trigonometrice.

El s-a ocupat şi de trigonometria sferică. De numele lui sînt legate o serie de formule din trigonometria sferică. El a arătat cum se pot obţine formule care leagă laturile de unghiuri într-un trriunghi sferic, înlocuind literele mari prin cele mici, precum şi prin permutări circulare.

Euler s-a ocupat şi de geometria elementară, atît de cea plană cît şi de cea în spaţiu. De numele lui sînt legate o serie de teoreme, soluţii elegante de rezolvare a unor probleme dificile de construcţie etc. Amintim din domeniul geometriei, « Dreapta lui Euler », « cercul lui Euler », formula $F + V = S + 2$ care leagă într-un poliedru convex numărul feţelor şi al muchiilor de acela al vîrfurilor.

Numeroase lucrări a dedicat Euler teoriei numerelor. Şi în această ramură a matematicii el a îmbogăţit opera predecesorilor săi. El a arătat de exemplu, utilitatea considerării sumei divizorilor unui număr. El este primul care consideră funcţia — notată mai tîrziu cu $\varphi(n)$. În multe din lucrările sale Euler se străduieşte să lămurească problema succesiunii numerelor prime, de care s-a ocupat deosebit de mult. De numele lui sînt legate numeroase relaţii, teoreme, categorii de numere prime etc.

Una din trăsăturile caracteristice ale dezvoltării matematicii în secolul al XVIII-lea este progresul realizat în analiza matematică, creşterea importanţei ei în studiul fizicii, mecanicii, astronomiei etc. Euler a adus o contribuţie mare la dezvoltarea acestei ramuri a matematicii.

Este revelator faptul că odată cu dezvoltarea ei, analiza se eliberează treptat de geometrie. Dacă primele cursuri de analiză tipărite, tratează împreună analiza şi geometria analitică — cursul de calcul diferenţial al lui L'Hôpital (1696) a fost alcătuit pentru studiul proprietăţilor curbelor plane pe baza ilustraţiilor geometrice, iar cursul de calcul integral al lui Johann Bernoulli (1692) a fost dedicat în special determinării cuadraturilor, rectificării curbelor etc — cursul lui Euler « Introductio in analysis infinitorum » tratează deja separat analiza şi geometria analitică. În « Institutiones calculi differentialis » şi « Institutiones calculi integralis » Euler a sintetizat toate cunoştinţele obţinute în aproape 75 de ani în domeniul analizei şi a îmbogăţit mult această ramură a matematicii.

Euler a dat o primă definiţie a continuităţii unei funcţii, deşi incompletă, totuşi avansată pentru timpul său, a extins calculul diferenţial la funcţii de mai multe variabile, a enunţat teorema care-i poartă numele, cu privire la funcţii omogene, a studiat amănunţit funcţiile exponenţiale, cele trigonometrice etc. O atenţie deosebită a acordat studiului seriilor. El a elaborat o serie de metode pentru integrarea unor tipuri de integrale, a studiat diferite integrale renumite, de ex. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot dx$ etc. Euler a descoperit două tipuri de integrale importante, denumite în prezent, funcţiile B, de care s-a ocupat pînă la sfîrşitul vieţii sale.

El a dat în numeroase lucrări, exemple strălucite de diferenţiere şi integrare sub semnul integralei. A descoperit un procedeu perfect pentru calculul integralelor definite, care au avut mai tîrziu un rol important în teoria funcţiilor de variabilă complexă. Euler s-a ocupat de calculul aproximativ al integralelor, de integralele duble şi aplicaţiile lor în determinarea volumelor, a suprafeţelor etc., de diferite tipuri de ecuaţii diferenţiale, de metode de rezolvare a acestora etc.

El a stabilit formulele clasice care fixează poziţia unui sistem rectangular în raport cu altul avînd aceeaşi origine, a stabilit formula fundamentală care exprimă curbura unei secţiuni normale într-o suprafaţă etc.

Numeroase procedee, metode, teoreme, poartă numele lui Euler: o constantă, metodă de integrare a unor ecuaţii diferenţiale, o transformare la rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale etc.

Remarcabile sînt lucrările lui Euler şi în domeniul fizicii. El se ocupă în special, de diferite probleme de optică. El a atacat cu multă tărie teoria corpusculară a luminii elaborată de Newton. El nega posibilitatea existenţei unei materii deosebite a luminii emisă de corpurile luminoase. Critica acestei teorii este foarte pregnantă mai ales în renumita sa lucrare « Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie ». Concepţia sa asupra luminii era foarte apropiată de teoria ondulatorie a lui Huyghens, totuşi nu poate fi identificată cu teoria clasică ondulatorie.

Succese însemnate a obţinut Euler şi în problema sistemelor optice acromatice, atît de importante pentru construcţia instrumentelor optice. Unul dintre cele mai mari neajunsuri ale aparatelor optice construite la sfîrşitul sec. al XVII-lea şi la începutul sec. al XVIII-lea îl costituiau aberaţiile cromatice. Euler a arătat (1742) că părerea lui Newton conform căreia aberaţia cromatică nu poate fi înlăturată este greşită şi a propus confecţionarea obiectivelor optice nu dintr-o singură sticlă, cum se făcea pînă atunci, ci din două sticle între care să se introducă un lichid cu coeficientul de refracţie diferit de acel al sticlei (în lucrarea « Sur la perfection des verres objectifs des lunettes »). Soluţia, deşi justă din punct de vedere teoretic, era totuşi incomodă din punct de vedere practic. Conducîndu-se însă după indicţiile lui Euler, un optician englez construeşte în 1758, o lunetă cromatică cu obiectivul alcătuit din două sticle cu coeficient de refracţie diferit (crwon şi flint). În anul 1762 apare o altă lucrare a lui Euler, despre construcţia obiectivelor instrumentelor optice, în care el analizează cauzele apariţiei atît a aberaţiei cromatice, cît şi a aberaţiei sferice la sistemele optice şi indică metodele de înlăturare a acestora. După indicaţiile sale, maestrul Belaev construieşte în anul 1772, primul microscop acromatic.

În lucrarea « Dioptrica », în trei volume, Euler expune cunoştinţele contemporane în legătură cu optica teoretică şi cu cea aplicată, precum şi unele rezultate noi obţinute de el. Mult timp această lucrare a folosit ca manual fundamental de optică în toată lumea.

Euler a obţinut rezultate deosebit de preţioase şi în domeniul mecanicii. În 1736 el publică « Mechanica sive motus scientis analytici exposita », primul curs de mecanică în care se aplică analiza matematică. « Dacă este necesară undeva analiza — scrie Euler — atunci în primul rînd în mecanică ». Spre deosebire de mulţi dintre predecesorii săi, Euler exclude elementul supranatural din studiul mecanicii. În « Lettre à une princesse d'Allemagne » el scrie: « . . . ar fi straniu să afirm că mişcarea bilei pe biliard este dirijată de un spirit oarecare; sau că greutatea corpurilor este determinată de un spirit care le împinge neîncetat

în jos ». În altă lucrare Euler scrie: « In problemele de mecanică nu există rezolvări, dacă spiritele pot influenţa asupra corpurilor şi schimba poziţia lor ».

Euler a publicat numeroase lucrări de astronomie. Dintre acestea valoroase sînt lucrările în legătură cu mişcările Lunii (Theoria Motus Lunae şi Theoria Motus Lunae, novo methodo per tractata), care au deschis o epocă nouă în cercetarea mişcării atît de complexă a Lunii.

Euler s-a ocupat în lucrările sale şi de probleme de balistică, de construcţii de nave etc. În lucrarea «Scientia navalis » (1749) el tratează probleme de echilibru al vaselor, rezistenţa apei la mişcarea vaselor, probleme referitoare la acţiunea cîrmei, aşezarea pînzelor etc. Un specialist contemporan afirmă că navele construite după regulile date de Euler întîmpină o rezistenţă mai mică din parte apei, oscilează mai puţin şi au o viteză mai mare la un vînt de putere dată, se întoarceau mai uşor etc.

Euler s-a ocupat şi de studiul sunetului, de mişcările planetelor Jupiter şi Saturn, de flux şi reflux, de organizarea asigurărilor şi a loteriilor etc.

Numele lui Euler înscrie în istoria ştiinţelor, o figură măreaţă. Nu în zadar spune marele său contemporan Laplace: « Citiţi pe Euler — el este învăţătorul nostru al tuturora», iar Gauss afirmă: « studiul lucrărilor lui Euler constituie cea mai bună şcoală pentru cele mai variate domenii ale matematicii ».

PARCELĂRI DE ARII

V. TURCU — Timişoara

I. INTRODUCERE. A parcela un teren de arie dată S, înseamnă a-l împărţi într-o serie de arii,

$$S_1, S_2, \cdots, S_n,$$

astfel încît să avem

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

sau a detaşa din aria S o altă arie de mărime dată.

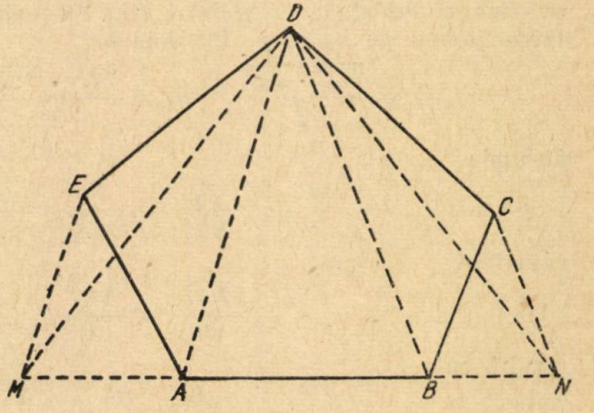


Fig. 1

Transformarea socialistă a agriculturii, crearea de noi centre populate, sistematizarea oraşelor, rectificarea hotarelor sinuoase şi neregulate ale gospodăriilor etc., implică lucrări de organizare a terenului, deci parcelări şi detaşări de arii. În problema politehnizării învăţămîntului de cultură generală aceste cunoştinţe sînt necesare.

Lucrarea prezentă cuprinde numai un număr restrîns de procedee matematice fără o extindere la metodele topografice existente, iar problemele tratate sînt o aplicaţie practică, directă, a diferitelor discipline din matematicile elementare. Metodele vor fi ilustrate prin probleme numai asupra triunghiurilor şi patrulaterelor şi rezolvate grafic sau prin calcul, la nivelul cunoştinţelor

elevilor. Numărul problemelor studiate are ca scop numai deprinderea cititorului cu procedeele întrebuinţate şi nu înseamnă o epuizare completă a subiectului. Fiindcă în rezolvarea grafică a problemelor se foloseşte des transformarea unei figuri în alta echivalentă, vom reaminti una şi cea mai utilă din aceste transformări.

II. Transformarea unui poligon în triunghi echivalent. Să luăm, în acest sens un pentagon neregulat $ABCDE$ (fig. 1). Ducem $EM \parallel AD$ şi $CN \parallel BD$. Se observă că triunghiurile ADE şi BCD sînt, respectiv, echivalente cu triunghiurile ADM şi BDN, avînd bază comună şi vîrfurile pe o paralelă la bază. Rezultă deci, că pentagonul $ABCDE$ este echivalent cu triunghiul DMN.

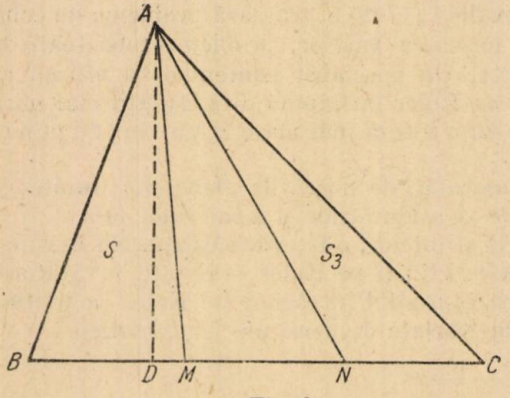


Fig. 2

Acest procedeu poate fi întrebuinţat pentru orice poligon, deci şi pentru un patrulater sau triunghi în alt triunghi echivalent.

III. **Parcelarea concurentă.** Prin parcelare concurentă se înţelege parcelarea unei arii prin drepte concurente ce trec printr-un punct dat.

Problema 1. Împărţirea ariei unui triunghi prin drepte duse dintr-un vîrf în arii proporţionale cu numere date.

Să considerăm împărţirea ariei triunghiului ABC în trei arii proporţionale cu numerele m, n, p duse din vîrful A. În acest scop împărţim baza BC a triunghiului prin punctele M şi N în segmente proporţionale cu m, n, p şi unim punctele de diviziune cu vîrful A. (fig. 2). Ariile S_1, S_2, S_3 astfel obţinute sînt proporţionale cu m, n, p. Într-adevăr,

$$S_1 = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{AD}}{2}, \quad S_2 = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{AD}}{2}, \quad S_3 = \frac{\overline{NC} \cdot \overline{AD}}{2},$$

de unde

$$\frac{S_1}{\overline{BM}} = \frac{S_2}{\overline{MN}} = \frac{S_3}{\overline{NC}},$$

cum însă

$$\frac{\overline{BM}}{m} = \frac{\overline{MN}}{n} = \frac{\overline{NC}}{p},$$

rezultă că

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p}.$$

Caz particular. Dacă $S_1 = S_2 = S_3$, triunghiul se împarte în părţi echivalente, împărţind baza $\overline{BC}$ în segmente egale.

Problema 2. Împărţirea ariei unui triunghi în părţi proporţionale cu numere date, prin două drepte duse dintr-un punct al unei laturi.

Considerăm cazul a trei parcele.

Metoda grafică. Transformăm triunghiul dat în alt triunghi echivalent cu vîrful în punctul dat. Problema se reduce astfel la cea precedentă.

a) *Punctele de diviziune sînt pe una din laturi.* Fie O punctul dat pe latura $\overline{BC}$ a triunghiului ABC (fig. 3). Ducem $BD \parallel OA$. Triunghiul ABC este echivalent cu triunghiul ODC, căci triunghiurile OAB şi OAD au aceiaşi bază OA şi

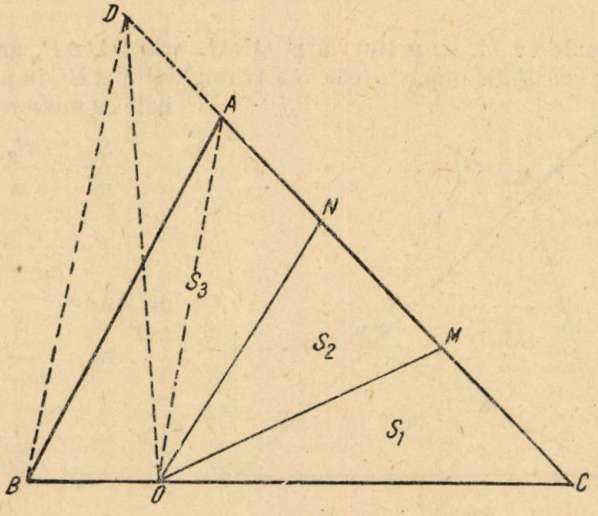


Fig. 3

vîrfurile B şi D pe o paralelă la OA. Împărţim triunghiul ODC în arii proporţionale cu numerele date m, n, p prin drepte duse din O.

Fie M şi N punctele de diviziune pe latura $\overline{AC}$. Se observă uşor că

$$\text{aria } OND = \text{aria } ONAB.$$

b) *Punctele de diviziune sînt pe una din laturi şi pe prelungirea ei.* Printr-o construcţie analogă obţinem figura 4.

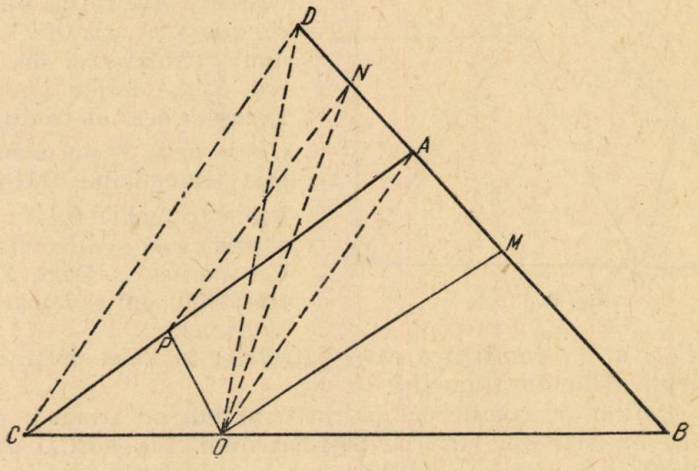


Fig. 4

Paralela dusă din punctul N, aşezat pe prelungirea laturii $\overline{AB}$, la OA, taie AC în P. Se observă uşor că triunghiurile OAN şi OAP sînt echivalente, deci

$$\text{aria } OMN = \text{aria } OMAP.$$

Ariile proporţionale cu m, n, p sînt: aria OBM, aria $OMAP$, aria OPC.

Metoda prin calcul. Se împarte aria S a triunghiului ABC în părţi proporţionale cu numerele date m, n, p:

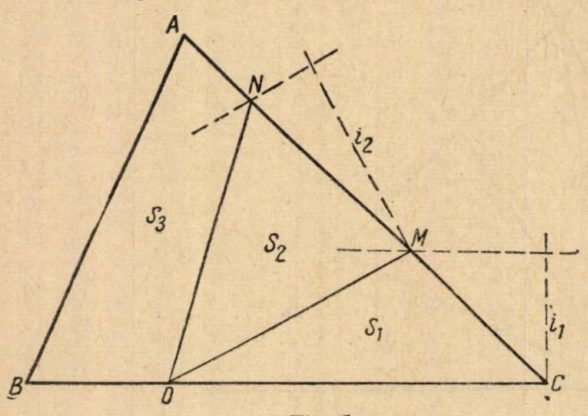


Fig. 5

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p} = \frac{S}{m+n+p},$$

de unde

$$S_1 = \frac{mS}{m+n+p},$$

$$S_2 = \frac{nS}{m+n+p},$$

$$S_3 = \frac{pS}{m+n+p}.$$

Detaşăm din triunghiul ABC (fig. 5) o parcelă triunghiulară cu baza $\overline{OC}$ şi aria S_1. Cu ajutorul înălţimii $i_1 = \frac{2S_1}{\overline{OC}}$ construim al treilea vîrf M al triunghiului. Detaşăm, în mod analog, al doilea triunghi OMN cu baza $\overline{OM}$, aria S_2 şi $i_2 = \frac{2S_2}{\overline{OM}}$. Patrulaterul rămas $ONAB$ are evident aria S_3.

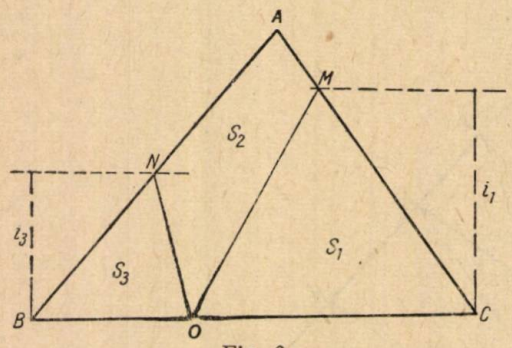


Fig. 6

În cazul cînd punctul N nu ar cădea între A şi C (fig. 6), înseamnă că aria $S_2 >$ aria OMA, are forma unui patrulater şi deci, în acest caz, S_3 are forma unui triunghi. Detaşăm deci un triunghi cu baza $\overline{OB}$ şi aria S_3 sau scădem din S_2 aria triunghiului OMA şi construim triunghiul OAN cu baza $\overline{OA}$ şi aria egală cu diferenţa obţinută. *Caz particular.* Dacă $S_1 = S_2 = S_3$, triunghiul dat se împarte în părţi echivalente.

P r o b l e m a 3. Împărţirea unui patrulater în două părţi echivalente printr-o dreaptă dusă dintr-un vîrf.

Metoda grafică. Se transformă patrulaterul într-un triunghi echivalent, avînd un vîrf în unul din vîrfurile patrulaterului. Fie $ABCD$ patrulaterul dat şi ADE triunghiul echivalent. Unim vîrful A cu mijlocul M al bazei $\overline{DE}$.

Aria triunghiului ADM este jumătate din aria triunghiului ADE, deci şi din cea a patrulaterului echivalent $ABCD$ (fig. 7).

Dacă M nu cade între A şi B, construim triunghiul echivalent ducînd din A o paralelă la diagonala $\overline{BD}$.

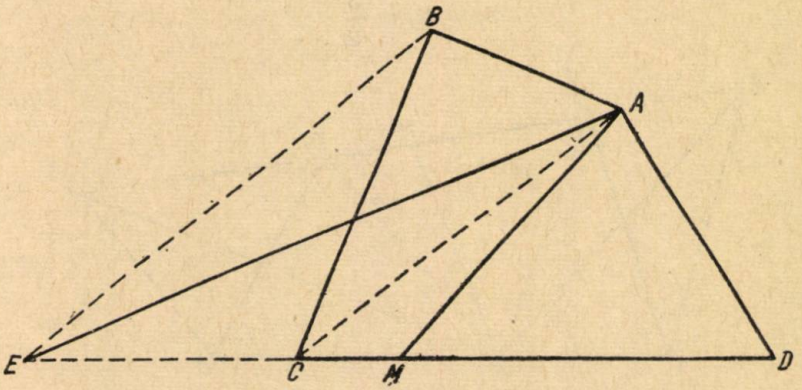


Fig. 7

Metoda prin calcul. Detaşăm din aria S a patrulaterului un triunghi cu vîrful în A, aria $S_1 = \frac{S}{2}$ şi înălţimea cunoscută i_1 (fig. 8).

Baza $\overline{DM} = \frac{2S_1}{i_1} = \frac{S}{i_1}$. Putem construi deci, al treilea vîrf M al triunghiului ADM.

P r o b l e m a 4. Împărţirea unui patrulater în două părţi echivalente printr-o dreaptă dusă dintr-un punct situat pe o latură a patrulaterului.

Metoda grafică. Fie M punctul dat pe latura $\overline{AB}$. Transformăm patrulaterul într-un triunghi echivalent cu vîrful în M. Fie $ABCD$ patrulaterul dat şi punctul M pe latura AB. Unim M cu D şi C, apoi ducem $AE \parallel MD$ şi $BF \parallel MC$. Triunghiul echivalent este EMF. Unind M cu mijlocul N al segmentului $\overline{EF}$, avem,

aria MNE = aria MNF,

deci

aria $MNDA$ = aria $MNCB$,

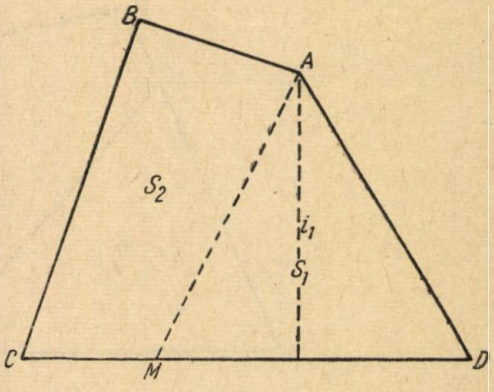


Fig. 8

căci triunghiurile MDE şi MCF sînt respectiv echivalente cu triunghiurile MDA şi MBC (fig. 9).

Dacă N nu cade între D şi C, se procedează la fel ca la problema 2, cazul *b*.

Metoda prin calcul. Din aria S a patrulaterului detaşăm un triunghi cu aria $S_1 = \frac{S}{2}$ şi baza $\overline{AM}$. Cu ajutorul înălţimii $i_1 = \frac{2S_1}{\overline{AM}} = \frac{S}{\overline{AM}}$ construim al treilea vîrf E al triunghiului AME. Rezultă că (fig. 10)

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2}.$$

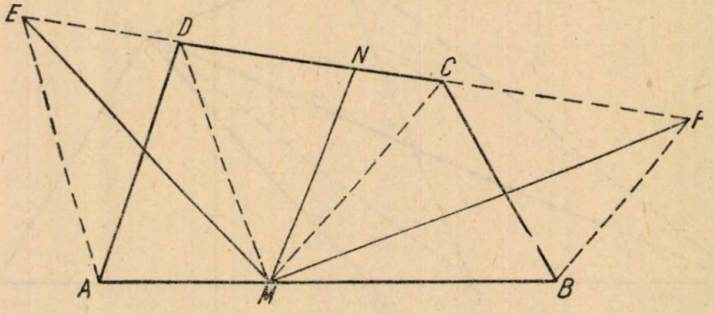


Fig. 9

Notă. Procedeele amintite se pot aplica, în mod analog, şi dacă $S_1 \neq S_2$, însă $S_1 + S_2 = S$.

Problema împărţirii unui patrulater în părţi proporţionale cu numere date prin drepte care trec printr-un punct situat pe o latură a patrulaterului se poate soluţiona ţinînd seama de problemele studiate pînă acum.

IV. **Parcelarea paralelă.** Prin parcelare paralelă se înţelege parcelarea prin drepte paralele cu o direcţie dată.

P r o b l e m a 5. Împărţirea unui triunghi în părţi echivalente prin drepte paralele cu o latură.

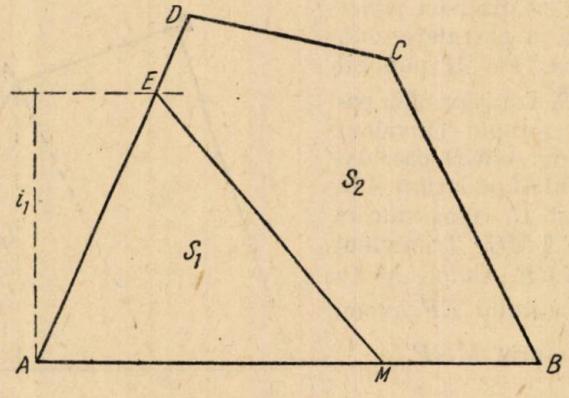


Fig. 10

Să considerăm cazul a trei parcele.

Metoda grafică. Împărţim latura $\overline{AC}$ în trei părţi egale (fig. 11). Fie M şi N punctele de diviziune. Pe $\overline{AC}$ ca diametru descriem un semicerc. Ridicăm pe

$\overline{AC}$ perpendicularele MD şi NE apoi construim segmentele $\overline{AP} = \overline{AD}$ şi $\overline{AQ} = \overline{AE}$. Din P şi Q ducem paralelele PP' şi QQ' cu baza BC.

Aria S a triunghiului ABC s-a împărţit, astfel, în ariile

$$S_1 = S_2 = S_3 .$$

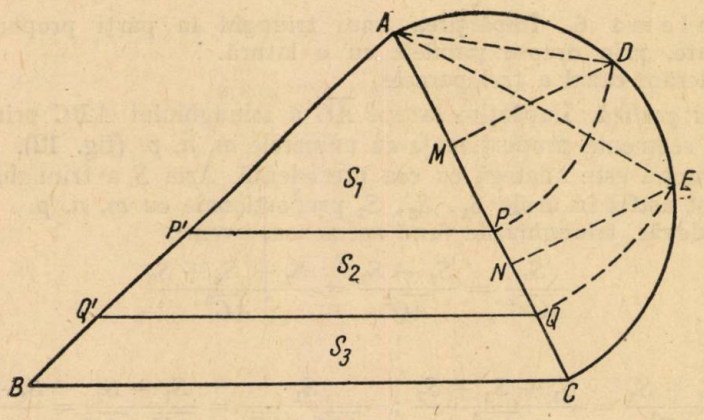


Fig. 11

Într-adevăr, triunghiurile fiind asemenea, putem scrie:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AC}}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{AC}}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}.$$

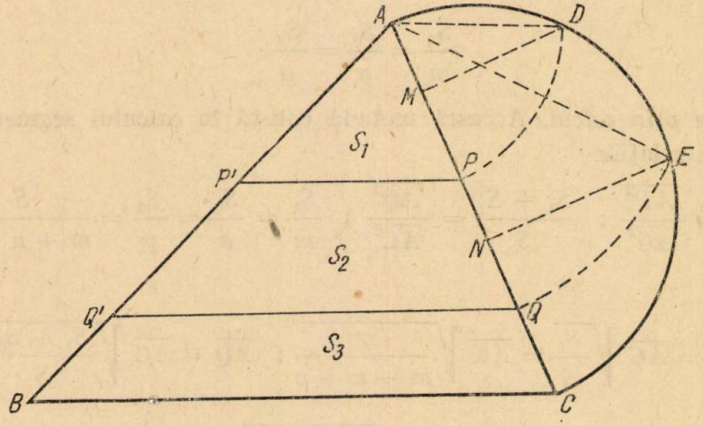


Fig. 12

Rezultă deci că $S_1 = \frac{S}{3}$, $S_2 = \frac{S}{3}$, prin urmare şi $S_3 = \frac{S}{3}$.

Metoda prin calcul. Această metodă constă în determinarea numerică a segmentelor $\overline{AP}$ şi $\overline{AQ}$. Din relaţiile precedente avem:

$$\overline{AP} = \overline{AC}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\overline{AC}\sqrt{3}}{3}\ ;\quad \overline{AQ} = \overline{AC}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\overline{AC}\sqrt{6}}{3.}\ .$$

P r o b l e m a 6. Împărţirea unui triunghi în părţi proporţionale cu numere date, prin drepte paralele cu o latură.

Considerăm cazul a trei parcele.

Metoda grafică. Împărţim latura $\overline{AC}$ a triunghiului ABC prin punctele M şi N în segmente proporţionale cu numerele m, n, p. (fig. 12).

Construcţia este analogă cu cea precedentă. Aria S a triunghiului ABC s-a împărţit astfel în ariile S_1, S_2, S_3 proporţionale cu m, n, p.

Într-adevăr, triunghiurile fiind asemenea, avem:

$$\frac{S_1}{\overline{AP}^2} = \frac{S_1 + S_2}{\overline{AQ}^2} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\overline{AC}^2}$$

sau

$$\frac{S_1}{\overline{AD}^2} = \frac{S_1 + S_2}{\overline{AE}^2} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\overline{AC}^2}\ ;\quad \frac{S_1}{\overline{AM}\cdot\overline{AC}} = \frac{S_1 + S_2}{\overline{AN}\cdot\overline{AC}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\overline{AC}^2}\ .$$

Simplificînd cu AC şi potrivit proprietăţilor rapoartelor egale avem:

$$\frac{S_1}{\overline{AM}} = \frac{S_2}{\overline{MN}} = \frac{S_3}{\overline{NC}}\ ,$$

dar cum

$$\frac{\overline{AM}}{m} = \frac{\overline{MN}}{n} = \frac{\overline{NC}}{p}\ ,$$

rezultă

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p}\ .$$

Metoda prin calcul. Această metodă constă în calculul segmentelor $\overline{AP}$ şi $\overline{AQ}$. Din relaţiile

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AC}^2}\ ;\quad \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2}\ ;\quad \frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p} = \frac{S}{m + n + p}$$

deducem

$$\overline{AP} = \overline{AC}\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \overline{AC}\sqrt{\frac{m}{m + n + p}}\ ;\quad \overline{AQ} = \overline{AC}\sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S}} =$$

$$= \overline{AC}\sqrt{\frac{m + n}{m + n + p}}\ .$$

P r o b l e m a 7. Împărţirea unui trapez în părţi proporţionale cu numere date prin drepte paralele cu bazele.

Considerăm cazul a trei parcele proporționale cu numerele m, n, p.

Metoda grafică. Laturile neparalele ale trapezului $ABCD$ prelungite se întîlnesc în E (fig. 13).

Rezolvarea problemei este asemănătoare cu cea precedentă.

Pe $\overline{EB}$ ca diametru descriem un semicerc. Arcul de cerc descris din E ca centru și de rază $\overline{EC}$ taie semicercul în F'. Ducem $F'F$ perpendicular pe EB.

Împărțim segmentul $\overline{FB}$ prin punctele M și N în părți proporționale cu m, n, p. Restul construcției este ca în problemele 5 și 6.

Paralelele PP' și QQ' la $\overline{AB}$ rezolvă problema. Într-adevăr, notînd aria triunghiului EDC cu s și celelalte cu S_1, S_2, S_3, avem succesiv:

$$\frac{s}{\overline{EC}^2} = \frac{s + S_1}{\overline{EP}^2} = \frac{s + S_1 + S_2}{\overline{EQ}^2} = \frac{s + S_1 + S_2 + S_3}{\overline{EB}^2}.$$

Ținînd seamă că $\overline{EC} = \overline{EF'}$, $\overline{EP} = \overline{EM'}$ și $\overline{EQ} = \overline{EN'}$, avem

$$\frac{s}{\overline{EF} \cdot \overline{EB}} = \frac{s + S_1}{\overline{EM} \cdot \overline{EB}} = \frac{s + S_1 + S_2}{\overline{EN} \cdot \overline{EB}} = \frac{s + S_1 + S_2 + S_3}{\overline{EB}^2},$$

de unde, simplificînd cu $\overline{EB}$ și potrivit proprietăților rapoartelor egale, avem:

$$\frac{S_1}{\overline{FM}} = \frac{S_2}{\overline{MN}} = \frac{S_3}{\overline{NB}},$$

dar cum,

$$\frac{\overline{FM}}{m} = \frac{\overline{MN}}{n} = \frac{\overline{NB}}{p},$$

rezultă că

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p}.$$

Metoda prin calcul. Pentru a găsi poziția punctelor P și Q este suficient să calculăm valoarea numerică a segmentelor $\overline{EP}$ și $\overline{EQ}$. În acest scop vom întrebuința un procedeu, într-o anumită măsură, mai deosebit decît celelalte.

Să considerăm problema rezolvată și fie i înălțimea triunghiului EDC, a, b, I bazele și înălțimea trapezului $ABCD$, iar x_1 și x_2 distanțele paralelelor PP' și QQ' de baza mică $\overline{DC}$ (fig. 14).

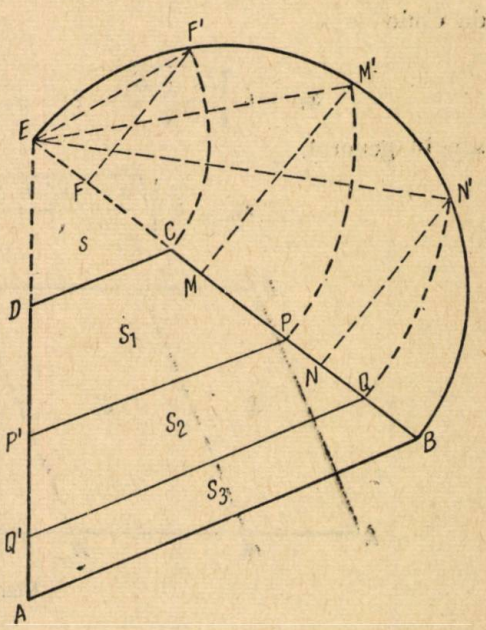


Fig. 13

Înălțimea i și aria s a triunghiului EDC se pot ușor calcula, căci

$$\frac{i}{i + I} = \frac{b}{a},$$

de unde $i = \frac{b \cdot I}{a - b}$, iar $s = \frac{b \cdot i}{2}$.

La fel, ariile S_1, S_2, S_3 se pot calcula din şirul de rapoarte:

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p} = \frac{S}{m + n + p},$$

unde S reprezintă aria trapezului $ABCD$.

Pentru parcelarea trapezului în ariile indicate, vom calcula de astă dată distanţele x_1 şi x_2.

Din triunghiurile asemenea, din figură, rezultă:

$$\frac{\sqrt{s}}{i} = \frac{\sqrt{s + S_1}}{i + x_1} = \frac{\sqrt{s + S_1 + S_2}}{i + x_2},$$

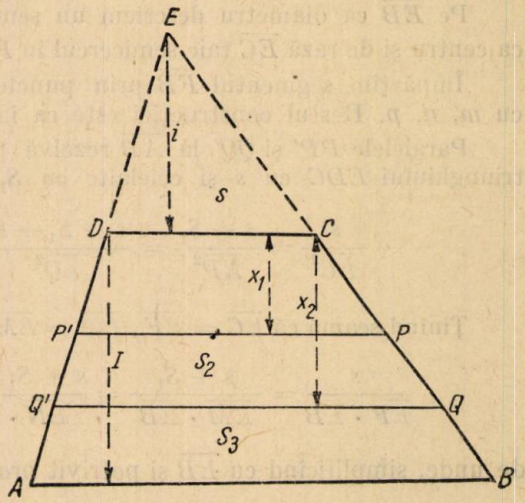


Fig. 14

de unde

$$x_1 = i\sqrt{\frac{s + S_1}{s}} - i; \quad x_2 = i\sqrt{\frac{s + S_1 + S_2}{s}} - i,$$

sau în general,

$$x_n = i\sqrt{\frac{s + S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{s}} - i.$$

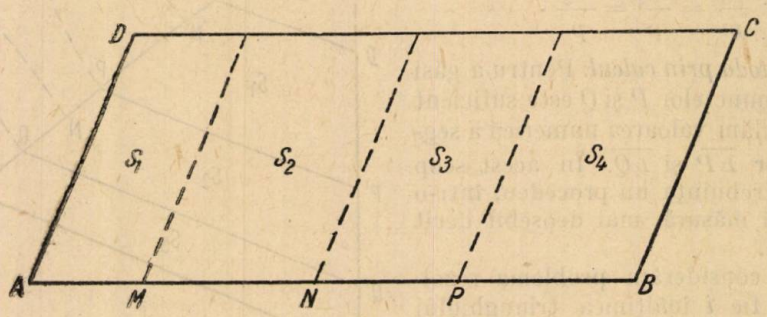


Fig. 15

Acest procedeu se poate întrebuinţa şi în cazul cînd dorim să împărţim trapezul prin paralele la baze, în parcele de arii date.

Dacă $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$, regăsim problema împărţirii unui trapez în părţi echivalente.

P r o b l e m a 8. Împărţirea unui paralelogram în părţi proporţionale cu numere date, prin drepte paralele cu una din laturi.

Problema revine la împărţirea uneia din celelalte două laturi paralele în segmente proporţionale cu numere date.

Împărţim de exemplu, latura $\overline{AB}$ prin punctele M, N, P în segmente proporţionale cu numerele date, şi ducem din aceste puncte paralele la latura $\overline{AD}$. Ariile S_1, S_2, S_3, S_4 ce s-au format, avînd aceiaşi înălţime, sînt proporţionale cu bazele (fig. 15).

P r o b l e m a 9. Împărţirea unui patrulater în părţi proporţionale cu numere date, prin paralele la una din laturi.

Parcelarea revine la cazuri studiate. Vom determina în primul rînd ariile

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p, \ldots, S_n,$$

proporţionale cu numerele date. Descompunem apoi, patrulaterul printr-o paralelă la una din laturi, dusă într-un vîrf, într-un trapez şi în triunghi.

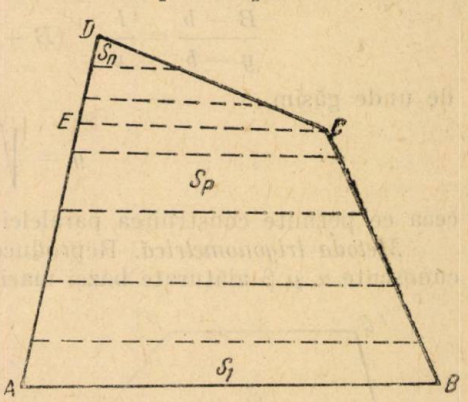


Fig. 16

De exemplu, ducem din C o paralelă CE la $\overline{AB}$. Detaşăm din trapezul $ABCE$, paralel cu baza, un număr posibil de arii S_1, S_2, ..., S_p fig. 16).

Detaşăm apoi din triunghiul CED paralel cu $\overline{AB}$, aria S_{p+1} micşorată cu aria rămasă din trapez şi ariile S_{p+2}, ..., S_n.

P r o b l e m a 10. Împărţirea unui trapez de arie dată S în două arii proporţionale cu numere date sau detaşarea din aria trapezului a unei arii date printr-o paralelă cu bazele.

Pentru rezolvarea acestei probleme s-a indicat un procedeu grafic şi unul prin calcul.

Pentru a sublinia varietatea metodelor de parcelare paralelă, vom arăta şi altele, pînă acum înadins evitate.

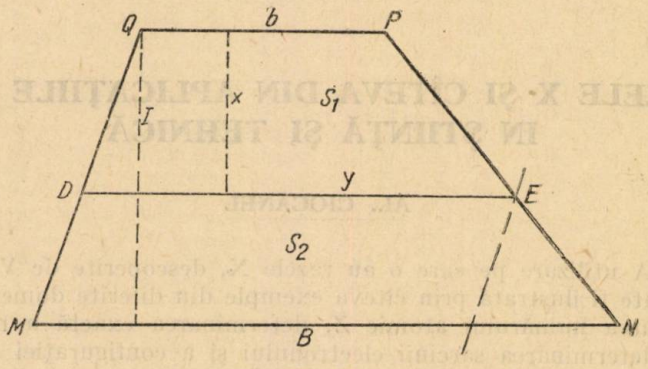


Fig. 17

Fie S_1 şi S_2 ariile calculate ale parcelelor şi n raportul lor.

Metoda algebrică. Presupunem problema rezolvată şi fie $\overline{DE}$ paralela la baze care desparte aria S în ariile S_1 şi S_2 fig. 17).

2484. Fie H_a piciorul înălțimii AH_a a triunghiului ABC înscris în cercul de centru O. Să se demonstreze că perpendiculara din H_a pe AB, perpendiculara din C pe AO se întîlnesc într-un punct pe diametrul AO.

Gh. Buicliu

2485. Să se afle triunghiul dreptunghic cu laturi numere întregi, de perimetru minim, știind că diametrul cercului exînscris corespunzător catetei mici este media armonică a razelor celorlalte două cercuri exînscrise.

L. Mănescu, R. Vîlcea

2486. Se dă o prismă optică al cărei indice de refracție este n, avînd drept secțiune dreaptă un triunghi dreptunghic. Din mediul înconjurător cade perpendicular pe planul corespunzător unei catete o rază de lumină. Să se determine mărimea unghiului diedru opus acestui plan, cunoscînd că raza emergentă este paralelă cu planul ipotenuzei. (Caz particular $n = 1{,}8$).

Al. I. Voinea, elev Craiova

2487. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2\cos 4x}{\cos 2x} = \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

C. V. Costăchescu, Constanța

2488. Un calorimetru conține un amestec de 50 l apă și 50 g ghiață la 0° C. Amestecul se încălzește cu ajutorul unei rezistențe electrice de 20 Ω, care este pusă la o tensiune de 100 V timp de 5 minute. Să se determine:

1) care este cantitatea de căldură dezvoltată în rezistența electrică?

2) care este temperatura apei din calorimetru după topirea gheței?

Observare: Se neglijează masa calorimetrului; căldura de topire a gheței este de 80 cal/g.

(La facult. mat. fiz. Timișoara, Inst. Pedagogic)

2489. O riglă omogenă avînd lungimea de 90 cm cîntărește 1000 g. La unul din capetele riglei se suspendă o greutate de 1500 g. Se cere 1) la ce distanță de extremitatea supraîncărcată trebuie să susținem rigla pentru ca să rămînă în echilibru orizontal și 2) dacă se ridică sistemul cu 25 cm, care este în kilogrametri lucrul mecanic efectuat.

(La Inst. pedagogic Timișoara)

2490. Un element galvanic de rezistență necunoscută x este închis pe un circuit de rezistență 2 Ω. Diferența de potențial la borne este atunci $e = 1$ volt. Știind că forța electromotoare a elementului este $E = 1{,}8$ volți, să se găsească valoarea rezistenței x.

La Inst. pedagogic Timișoara

2491. *a)* Care este puterea în cai-putere a unei căderi de apă care debitează 120 m^3 apă pe minut și cade de la o înălțime de 10 metri?

b) Un corp cîntărește 25 g în aer, 20 g în apă și 21 g într-alt lichid. Se cere densitatea D a corpului precum și densitatea D' a ultimului lichid.

(La Inst. Pedagogic Timișoara)

2492. Un barometru cilindric cu secțiunea de 1 cm^2 și lungimea de 900 mm se află într-o cameră în care presiunea atmosferică este de 750 mm. Se introduce deasupra mercurului o cantitate de 20 cm aer la presiunea atmosferică.

a) Care va fi nivelul mercurului în tubul barometric?

b) Cum se va modifica acest nivel dacă presiunea atmosferică crește la 780 mm?

(Cercul de fizică din Capitală)

2493. Avem două lămpi cu incandescență care funcționează normal la 110 volți; una este de 40 wați, alta de 100 wați.

a) Să se salculeze rezistențele lor și curenții care le străbat.

b) Se montează cele două lămpi în serie și se alimentează ansamblul sub o tensiune de 220 volți. Intrucît în aceste condiții lămpile nu funcționează normal, se așează în derivație cu una din ele o rezistență (șunt). Care trebuie să fie lampa șuntată și care trebuie să fie valoarea acestei rezistențe pentru a realiza funcționarea normală?

c) Dacă tensiunea de care dispunem este 250 volți, ce rezistențe auxiliare ar trebui montate pentru a realiza funcționarea normală? Să se calculeze în acest caz, randamentul montajuiui, definit ca raportul între puterea consumată de lămpi și puterea totală consumată.

(Cercul de fizică din Capitală)

CHESTIUNI DE EXAMEN

SUBIECTE DATE LA PROBA SCRISĂ LA ADMITEREA ÎN FACULTĂȚI ÎN AUGUST 1956

2494. Să se arate că polinomul

$$f(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$$

se divide prin $x + a + b$. Să se determine citul și să se deducă că $f(x)$ se divide și prin $x + \alpha a + \alpha^2 b$ și $x + \alpha^2 a + \alpha b$, unde α este una din rădăcinile cubice complexe ale unității, x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației

$$\lambda (x + a + b)^2 - \frac{f(x)}{x + a + b} = 0, \tag{1}$$

să se arate că oricare ar fi λ are loc relația:

$$\frac{x_1 + x_2}{a + b} + \frac{x_1 x_2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Să se discute natura rădăcinilor ecuației (1) cînd λ variază.

Să se cerceteze dacă există valori ale lui λ astfel ca x_1, $-(a + b)$, x_2 să formeze o progresie aritmetică.

In cazul $a, b, x_1, x_2 > 0$, să se arate că nu putem avea simultan $x_1 < a$, $x_2 < b$.

(La facultatea de matematică și fizică, Iași)

2495. Două trapeze isoscele $ABCD$ și $ABEF$ au baza mare AB comună, fiind așezate de o parte și de alta a bazei mari comune; în plus ele au înălțimile egale, baza mică a unuia este egală cu 2, iar a celuilalt trapez este 4. Fie r raportul ariilor celor două trapeze. Să se determine lungimea bazei mari AB și să se discute valoarea găsită după valorile lui r.

Să se determine înălțimea acestor trapeze în cazul cînd laturile neparalele ale celor două trapeze, ce se întîlnesc în A (sau B), sînt perpendiculare.

Să se determine r astfel ca în această din urmă ipoteză ariile laterale ale trunchiurilor de con născute prin rotirea celor două trapeze în jurul axei de simetrie, să fie egale.

(La facultatea de chimie, Iași)

2496. Fie A unul din punctele comune a două cercuri cu centrele în C_1 și C_2 și de raze r_1 și r_2. Prin A se duce o secantă oarecare ce taie din nou cele două cercuri în M_1, M_2. Fie N_1 și N_2 punctele diametral opuse, în cercurile respective, ale punctelor M_1, M_2. Să se arate că:

1) dreptele C_1M_1, C_2M_2 fac un unghi constant (independent de poziția variabilă a secantei și anume, egal cu $\sphericalangle C_1AC_2$);

2) punctele N_1, N_2 și A sînt în linie dreaptă;

3) oricare ar fi poziția secantei considerate, au loc relațiile:

$AN_1 \cdot AN_2 - AM_1 \cdot AM_2 = \text{const}$ $(= 4\ r_1r_2 \cos C_1AC_2)$,

pr M_1M_2 + pr N_1N_2 = const $(= 2\ C_1C_2)$ (proiecțiile sînt făcute pe C_1C_2).

4) Să se afle locul punctului de intersecție al razelor C_1M_1, C_2M_2 cînd secanta considerată se rotește în jurul punctului A.

5) Să se determine poziția secantei, astfel ca lungimea ei să aibă o valoare dată. Discuție (în particular, să se constate că max $M_1M_2 = 2\ C_1C_2$).

6) Să se cerceteze cazurile particulare: a) cercurile date sînt tangente; *b*) cercurile date sînt ortogonale.

(La facultatea de matematică și fizică, Iași)

2497. Să se arate că expresia:

$$E = \sin(b - a)\sin(d - c) + \sin(d - a)\sin(c - b)$$

se poate scrie ca un produs de două sinusuri.

(La Institutul politehnic, Iași)

2489. Fie un cerc de rază R cu centrul în O și A un punct exterior cercului. Din A se duc tangentele AB și AC la cerc. Pe tangenta AB în punctul A se ridică perpendiculara care intersectează în punctul D dreapta OC.

1) Să se arate că triunghiul OAD este isoscel.

2) α fiind unghiul din D al acestui triunghi isoscel, să se exprime aria lui în funcție de R și α.

3) Pentru ce valoare a lui α aria triunghiului OAD este 2/3 din aria trapezului $ABOD$?

4) In acest din urmă caz să se găsească raza cercului circumscris triunghiului OAD.

(La Institutul politehnic, Iași)

2499. Să se rezolve și să se discute sistemul liniar:

$$\begin{aligned} x + y + az &= a + 2, \\ x + ay + z &= a + 2, \\ az + y + z &= 3. \end{aligned}$$

(La Institutul politehnic, Iași)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 910. In trapezul isoscel $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$) fie E mijlocul diagonalei AC și EM perpendiculara coborîtă din punctul E pe diagonala BD. Se cere locul geometric al punctului M cînd CD se deplasează paralel cu AB.

Gh. Dobrotescu, Predeal

E: 911. Să se arate că:

$$a(a + 4)(a + 8)(a + 12) + 256 = (a^2 + 12a + 16)^2.$$

Nusfet Șaganai, elev, București

*) V (E; 912, 915, 919); VI (E: 911, 913, 916); VII (E; 910, 914, 917, 918).

E: 912. Distanța dintre două localități A și B este de 60 km. Din localitatea A pleacă simultan doi bicicliști. Știind că primul merge cu o viteză medie care întrece viteza celuilalt cu 3 km/oră și ajunge în localitatea B cu o oră înaintea celui de-al doilea biciclist, se cer vitezele cu care au mers cei doi bicicliști.

* * *

E: 913. Un atelier de confecții a comandat 3900 m pînză de două calități: pe pînza de prima calitate a plătit 46 000 lei, iar pe cea de calitatea a doua a plătit 25 600 lei.

Un alt atelier a comandat 2500 m de pînză din aceleași calități plătind pentru pînză de primă calitate 26 000 lei, iar pentru cea de calitatea a doua 19 200 lei.

Să se calculeze prețul unui metru din fiecare calitate de pînză precum și cantitatea de pînză din fiecare fel, comandată de cele două ateliere separat.

N. Goicu, Timișoara

E: 914. Să se verifice identitatea:

$$(a+b-2c)\,(c+a-2b)^2+(a+b-2c)\,(b+c-2a)\,(c+a-2b)+$$
$$+(c+a-2b).\ (a+b-2c)^2=0.$$

Gh. I. Stoian, student București

E: 915. Să se găsească un număr de două cifre astfel ca raportul dintre diferența și suma cifrelor sale să fie 4/5.

Eugen Iacob

E: 916. Să se arate că:

$$\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{243}+\sqrt[3]{324}+\sqrt[3]{486}+\sqrt[3]{1296}=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}.$$

T. Căsăndroiu, elev Ploești

E: 917. Să se arate că dacă între laturile a, b, c, ale unui triunghi oarecare există relațiile: $2b=a+c$ și $b^2=ac$, atunci $a=c$.

I. Cochințoiu, student București

E: 918. Intr-un paralelogram $ABCD$ dreptele care unesc mijloacele laturilor, BC, DC cu punctul A taie diagonala BD în M, N. Să se arate că:

$$BM=MN=ND.$$

C. Bulucea, elev, R. Vîlcea

E: 919. Intr-o gospodărie agricolă colectivă s-au semănat în 2 săptămîni 330 ha cu ovăz și 305 ha cu porumb. In prima săptămînă s-a semănat de două ori atîta ovăz cît porumb; în a doua săptămînă de două ori și jumătate porumb ca ovăz.

— Cît ovăz s-a semănat în prima săptămînă?

— Cît porumb s-a semănat în a doua săptămînă?

D. Tomoiagă, elev, Sighet

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 15 *noiembrie* 1956 *s-au mai evidențiat prin rezolvări de probleme din «Gazeta matematică și fizică» seria B, după cum urmează:*

Panaitopol Laurențiu (clasa X Giurgiu), *Bărbuică C. Nicolae* (student Academia tehnică militară București), *Aniței N. Nicolae* (clasa VIII Tîrgu-Jiu), *Stănculescu M. Mihai* (absolvent Tîrgoviște și student Facult. mecanică București), *Iftimie Viorel* (clasa X Rădăuți), *Pojgă Constantin* (clasa X R.-Vîlcea), *Popescu R. Paul* (student facult. electronică București), *Strătescu Ion* (clasa X Călărași), *Profirescu D. Marcel* (clasa VIII Giurgiu), *Stoian I. Gheorghe* (student Facultatea matematică București), *Tudor N. Constantin*

(Facultatea matematică Bucureşti), *Grigoraş Vasile* (clasa VIII Bacău), *Ianuş I. Stere* (clasa X Constanţa), *Ciortan Vasile* (clasa IX Ploieşti), *Ancuţoiu I. Gheorghe* (clasa IX R.-Vîlcea), *Grecu Anton* (clasa VIII Roşiorii de Vede), *Cristea Paul* (clasa X s.m. 1. «N. Bălcescu» Bucureşti), *Landman Alexandru* (Facultatea energetică Bucureşti), *Baltag Vasile* (clasa X s.m. 1 Ploeşti), *Pupăzan V. Nicolae* (şcoala de artilerie Sibiu), *Bărbulescu Marcel* (absolvent Slatina), *Răşcanu Radu* (clasa VIII s.m. 1 «N. Bălcescu» Bucureşti), *Mavromatis Alexandru* (clasa VI s.m. 18 Bucureşti), *Diamanstein Martin* (absolvent Ocna Mureşului), *Gherman Ecaterina* (clasa VIII Oradea), *Bucurenciu Sorin* (clasa X Ocna Mureşului), *Lungu Liviu* (absolvent Ploieşti), *Ctrnu Mircea* (clasa VIII Tîrgovişte), *Teodorescu Nicolae* (clasa X s.m. 2 Bucureşti), *Sorescu D. Gheorghe* (clasa X s.m. 13 Bucureşti), *Popa D. Doina* (clasa VIII s. m. 15 Bucureşti), *Timuş M. Dan* (clasa VIII Ploieşti), *Stepan Ionel* (clasa X Constanţa), *Savin Alexandru* (clasa VI Cîmpulung Muscel), *Nicolau Virgil* (clasa VIII s.m. 4 «Aurel Vlaicu» Bucureşti), *Mazilu G. Luminiţa* (clasa VIII s.m. 7 «I. L. Caragiale» Bucureşti), *Ţibuleac Florin* (clasa X s.m. 2 Iaşi), *Mavromatis Euripide* clasa VII s.m. 18 Bucureşti), *Şerban Ligia* (clasa VII Păuneşti Adjud), *Mihăileanu Alexandru* (clasa VIII s.m. 1. Timişoara).

★

Pînă la 15 *noiembrie* 1956 *s-au mai primit cel puţin zece soluţii bune la problemele propuse în G.M.F. seria B, cu numerele de ordine arătate în paranteză, după numele fiecărui rezolvitor, după cum urmează*:

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Demecă Dan (E: 819, 22, 25, 27, 31, 32, 36—38, 45—48, P), Trifu Mircea (2109, 62, 63, 74, 76, 78, 83—85, 88, 93, 242, P).

ALEXANDRIA. Clasa VIII-a. Nicolae Ion (2111, 235, E: 776, 78, 84, 804, 11, 36, 47, 48).

ARAD. Clasa VIII-a. Noian Corneliu (2042, 86, 102, 04, 11, 18, 19, 25, 29, E: 776, 78, 84, 804), Savin V. Virgil (2257, 58, 307, E: 826, 37, 40—43, 47, 49, 50, 53, 54, 56, 57, 60).

BACĂU. *Şcoala elementară Păuneşti-Adjud.* Clasa VI-a. Novac Gh. (2178, 257, E: 479, 814, 22, 26, 27, 33, 40, 41—45, 48); clasa VII-a. Ignat Maria (2221, 45, 57, E: 836, 37, 40, 42—45, 47, 48, 51—57, 59, 60), Novac Gh. Gheorghe (E: 851, 52, 54, 55, 60, 63, 65, 67—71), *Şerban Ligia* (2257, E: 841—48, 851—60), Şerbănescu Cornelia (E: 807, 10, 23, 26, 36, 40, 41, 43—46, 48, 51, 52, 54—57, 59, 60), Vasilachi Zarafina (2257, E: 800, 822, 23, 26, 27, 36, 40, 43—46, 48, 52, 54, 55, 60, 63, 65, 68, 69); clasa VIII-a. Chiriac D. Dumitru (2353, 56, 69, E: 852—58, 61, 65, 67, 69, 71—74, 76, 77, 79—81, 83, 84), *Grigoraş Vasile* (2023, 2109—11, 18, 20, 24—30, 34, 45, 48, 53, 80, 91, 206, 09, E: 793, 94, 97, 98, 801, 04, 05, 08, 16, 18, P).

BOTOŞANI. Clasa VI-a. Ionescu Tudor (E: 819, 25, 28, 36, 37, 43, 45, 48, 52, 54), Puiu Dan (E: 808, 14, 19, 23, 28, 35, 38, 43, 45); clasa VII-a. Ionescu Maria (E: 807, 08, 11—13, 19, 28, 29, 32, 36, 38, 43, 44, 47); clasa VIII-a. Helstorschi Eugenia (E: 808, 11—13, 15, 18, 19,32, 36, 45, 48).

BRAD (Hunedoara). Şcoala medie mixtă. Clasa VIII-a. Marschek Corneliu (E: 820—22, 27, 30, 31, 33—35, 40—42, 47, 49, 50, 56, 57, 61, 62).

BREAZA (Ploeşti). Clasa IX-a. Bohăţel Dumitru (2111, 12, 14, 18, 20, 25, 26, 31, 32, 34, 64, 73).

BUCUREŞTI. *Studenţi*: *Bărbuică C. Nicolae* (Academia tehnică militară) (Demonstrarea geometrică a unor formule trigonometrice, 2170, 218—21, 24, 28—31, 34—36, 38, 42, 43, 45—47, 49, 50, 52—57, 59, 61, 62, 64—68, 71, 73, 75, 78, 79, 84, 85, 90, 91, 93, 94, 97, 301, 03, 04, 07—09, 12, 13, P), Dobrescu Alex. (An I, I.C.D.) (2246, 49, 52, 57, 78, 84, 99, 304, 07, 09, P.), Donescu Ştefan (Inst. Politehnic) (P, N), Florescu Gh. M. (Fac. Mec.) (2162—65, 67, 70, 75, 77—80, 82—84, 90, 93, 200, 49, 59, 61, 78), Ionescu Mircea (Fac. Construcţii) (P, N), Ionescu Radu (Fac. Construcţii) (P, N), *Landman Alexandru* (Fac. Energetică) (2055, 224, 25, 30, 34—36, 44, 46, 50, 52, 53, 55—57, 59, 64, 65, 73, 77, 78, 81, 84, 98, 304, 07, 09, 11, 12, 17, 22, 25, 37, 38, P), Paulescu N. Dan (2254, 84, 91, 99, 301, 03, 04, 09, 40, 49, 56, 59, 63, 64, 71, 78—80), Păunescu Lucian (Fac. Electronică) (2216, 30, 31, 35, 36, 42, 47, 49, 50, 52, 54, 55, 57), *Popescu R. Paul* (Fac. Electronică) (2047, 76, 142, 85, 99, 201, 02, 12, 16, 17, 20, 28, 32, 34, 36, 41, 47, 50, 52, 54, 57—60, 62, 66, 71, 73, 75, 78, 91, 96, 97, 99, 301, 03, 04, 08, 09, 13, 17, 19, 21, 23, 31, 35, 36, 38, 40, N. P), Prisadă Dan (Fac. Mecanică) (2235, 46, 54, 65, 73, 84, 303, 08, 09, P), *Stoian I. Gheorghe* (Fac. matematică) (2203, 32, 35, 36, 40—43, 45, 49, 50, 52, 54, 59, 60, 65, 67, 76, 78, 79, 84, 91, 97, 304, 14, 17, 21, 32, 38, 40, 44, 47, 49, 56, 57, 59, 63, P), Şaganai Nusfet (Fac. Mecanică) (2225, 33—36, 40, 42, 46, 52, 58, 66, 70, 73, 78, 84, 91, 301, 04, 09, P), *Tudor N. Constantin* (Fac. Matematică) (2055, 200, 03, 20, 24,

33, 35, 40, 42, 43, 46, 49, 50, 52—56, 58, 59, 64, 65, 73, 78, 82, 84, 91, 94, 97, 301, 08, 09, 17, 35, 37, 38, 40, P), Zilberman Mircea (2246, 49, 52, 54, 55, 59, 73, 78, 84, 91, 304, 09, 17, 38, P). Absolvenţi: Dumitrescu Răsvan (2170, 224, 29, 35, 36, 46, 47, 46, 54, 61, 64, 73, 78, 84), Panait Nicolae (2258, 65, 73, 84, 95, 97, 304, 09, 16, 18, 32, 38, 40).

Şcoala medie nr. 1 « *N. Bălcescu* ». Clasa VIII-a. Ciocîrlan Paul (E: 818, 20, 22, 27, 30, 31, 33—35, 42, 47, 50), Ghelmeziu N. Nicolae (E: 836, 41—43, 45, 47, 48, 50—52, 54—57, 59, 60), Ioachim Alexandru (2245, E: 819, 20, 24, 28, 29, 42, 43, 45, 46, 50, 56, P), *Răşcanu Radu* (E: 820, 22, 25—29, 32—45, 48—50, 52, 53, 56, 57, 60, 64, 67, 69, 72, 73); clasa IX-a. Boambeş Gavril (2246, 29, 52, 54, 84, 99, 308, 38, 40), Ionescu C. Traian (2246, 47, 54—59, 65, 84), Isbăşescu Mihai (2246, 47, 54—57, 61, 67, 68, 71, 84), Velicu Vasile (2246, 55, 57—61, 67, 71, 84, 301, 16). Clasa X-a. Cipere I. Lucian (2055, 217, 31, 40, 42, 46, 47, 49, 52, 54, 56, 71, 73, 77, 78, 84, 84, 94, 96, 304, 07, 09, 11), *Cristea Paul* (2162—89, 91—93, 95, 99, 201, 03, 10, 11), Doniga N. Nicolae (2246, 47, 50, 52, 54, 56, 71, 73, 77, 84), Miulescu A. Alex. (2246, 52, 54—56, 58—60, 84, 301), Schain Teodor (2216, 33, 40, 42, 46, 47, 52, 54—61, 71, 84, 88, 91, 304, 09).

Şcoala medie nr. 2. Clasa VIII-a. Diţă H. Radu (2258, 61, E: 827, 33, 34, 42—45). Clasa X-a. *Teodorescu Nicolae* (2246—52, 54, 56, 57, 60—62, 67, 68, 71, 73, 75, 78, 79, 84, 90, 91, 97, 304, 07—11).

Şcoala medie nr. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Clasa VIII-a. Bădescu Natalia (E: 836, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 56, 57, 60), Ene Marcela (E: 824, 32, 45, 48, 51, 52, 55, 56, 60), Mihăilescu Fl. (E. 851—62), Mohan Gh. (E: 845, 47, 48, 51, 52, 54—57, 60), Muşat Mihai (E: 819, 22, 26, 32, 45, 47, 48, 52—57, 59, 61—65, 67—72), Nicolau C. Virgil (2225, 27, 32, 35—37, 47, 55—59, 78, 91, 301—04, E: 836, 37, 42—45, 47—49, P), Olteanu Corneliu (E: 819, 29, 32, 33, 45, 47, 50, 55, 56, 60), Untaru Alex. (E: 819, 32, 45, 47, 52, 54—57, 60). Clasa X-a. Bădeliţă Luminiţa (2290, 91, 94, 96, 97, 301, 04, 07—09). Clasa X-a. Martiş Gh. Ioan (2111, 64, 66, 70, 72—77, 80, 84, 93, 98, 201, 03, 30, 35, 47, 52, 55, 58), Rădulescu D. Constantin (2188, 93, 95, 200, 01, 03, 06, 11, 14, 30, 33, 40, 42, 46, 52, 54, 57, 59, 60, 84, 301, 04).

Şcoala medie nr. 7 « *I. L. Caragiale* ». Clasa VIII-a. Grofşoreanu T. Gelu (2255, E: 842—45, 47, 48, 51, 52, 55—57, 63, P), *Mazilu G. Luminiţa* (2225, 55—57, 61, E: 819, 22—25, 27—35, 37—40, 42—45, 47—50).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa V-a. Petrovici A. Mihaela (E: 836, 37, 43, 48, 52, 60). Clasa VIII-a. Predoiescu Marieta (E: 819, 21, 22, 24, 31, 33, 36, 43—45, 47, 51—56, 60, 63,—65, 67, 69, 70), Repciuc Rodica (2215, 19—21, 36, 39, 42, 46, 67, 71, 80, 86, 99, 301).

Şcoala medie nr. 11. Clasa VI-a. Gianni Emanuel (E: 819, 25, 28, 37, 43, 45, 51, 52, 54, 63—65, 67), Văiteanu Dan (2255, E: 844, 45, 64, 67, 74, 76, 77, 79—81, 84). Clasa IX-a. Schiopulescu Dan (2216, 24, 30, 31, 46, 55, 60, 61, 307, 11, 28, 48).

Şcoala medie nr. 12. Clasa VIII-a. Necşulea Dan (2230, 39, 42, 57, 60, 61, 307, E: 829, 40, 45, 49, 52, 57).

Şcoala medie nr. 13. Clasa VIII-a. Popescu I. Ovidiu (E: 819, 23, 32, 36, 43, 45, 48, 51, 52, 55, 56), Pricu Dan (E: 851, 52, 55—57, 59, 60, 63, 64, 67, 69, 70, 72, 79, P). Clasa X-a. *Sorescu D. Gheorghe* (2163—65, 73, 79, 82—85, 93, 98, 200, 03, 24, 30, 33, 35, 36, 38, 40, 42, 46, 54, 56, 60, 73, 78, 84, 87, 99), Tudor M. Gheorghe (2075, 108, 62 80, 216, 17, 19 35, 36, 39, 42, 44—47, 52, 54, 58, 60, 61, 65, E: 771, 75, 78, 84, 97, 304).

Şcoala medie nr. 15. Clasa VIII-a. Enescu M. Anca (E: 838, 39, 47, 50, 53—56, 58—64, 67, 69, 70, 74, 76, 78, 80, 83), *Popa D. Doina* E: 791, 92, 95, 807, 10, 16, 19, 20, 22, 24—37, 42, 43, 45, 47, 48, 51, 52). Clasa X-a. Enescu Cornelia (2209, 16, 25, 34—36, 38, 46, 47, 49, 52, 55, 57, 58, 61, 62, 78, 84, 99, 303, 09).

Şcoala medie nr. 17 « *Malei Basarab* ». Clasa VI-a. *Mavromatis Alexandru* (E: 819—26, 28, 29, 32, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 45—53, 55,—60, 62). Clasa VII-a. *Mavromatis Euripide* (E: 820—22, 24, 26, 28—31, 33—35, 38—40, 42, 44, 46, 47, 49, 50, 53, 55—59, 61, 62). Clasa VIII-a. Ionescu Anca (2225, E: 836, 37, 51, 52, 56, 60, 64, 65, 69, 73). Clasa IX-a. Oprică Mihai (2215, 16, 18, 19, 21, 24, 25, 30, 40, 42, 43).

Şcoala medie nr. 18. Clasa VIII-a. Nicolau Cristian (E: 819, 22, 32, 36, 48, 51, 52, 54, 57), Clasa X-a. Minciu Const. (2162, 64, 65, 73, 74, 76, 84, 99, 216, 42).

Şcoala medie nr. 19. Niculescu Cristina (E: 836, 37, 45, 48, 51, 52, 54, 577, 60, 63).

Şcoala medie nr. 20. Clasa VII-a. Bogdan Mircea (E: 808, 11, 13, 18, 19, 32, 36, 45, 52, 54—56, 60). Clasa VIII-a, Bogdan Alecu (E:808, 11, 13, 18, 19, 29, 32, 36, 45, 51, 52, 54—56). Clasa X-a. Iordănescu Radu Sorin (2167, 316, 24, 36, 46, 47, 52, 54, 55, 59, 60, 84), Macarie V. Gh. (2246, 58, E: 841, 42, 45, 47, 48, 50—52, 56, 57).

Şcoala medie nr. 22. Clasa VII-a. Niţă Georgeta (E: 819, 28, 29, 31, 32, 36, 37, 42, 44, 45, 48, 52, 54, 55, 57), Zamfirescu Tudor (E: 836—39, 42—48). Clasa VIII-a. Chirilă Rodica (E: 820—22, 27, 30, 31, 33—35, 42, 47, 50, 56, 57), Ciorănescu Ioana (E: 851—57,

59—61, 69, 71, 72, P), Raicea Liana (E: 820, 21, 25, 26, 28, 29, 831, 42, 43, 47—49). Clasa X-a. Gheorghiță Mariana (2297, 304, 09, 12, 16, 38, 40, 57, 78, 79).

Școala medie nr. 26. Clasa IX-a. Stoica G. Dan (2246, 47, 54—60, 84).

Școala de 7 ani nr. 119. Clasa VI-a. Miron Constanța (2255,305, E: 838, 43, 44, 52, 54, 56, 57, 63—65, 67). Clasa VII-a. Mira Eugen (2261, 63, 314, E: 842, 47, 50, 56, 57, 62, 66, 71—73).

Școala de 7 ani nr. 145. *Ghencea.* Clasa VI-a. Copăcianu Veroinca (E: 836, 39, 44, 45, 48, 52, 55, 57, 60, 67, 76, 77), Mitu Florica (E: 819, 25, 28, 29, 32, 36, 44, 52, 54, 55, 57, 60). Clasa VII-a. Bongiu Ana (E: 819, 24, 25, 28, 29, 32, 36, 52, 53, 55, 60), Bozdoc Ioana (E: 831, 33, 34, 38, 48, 50—52, 54—57,), Marin Doina (E: 819—22, 24. 27—34), Scafeș Valentina (E: 819, 20, 24, 32, 36, 43, 51, 52, 55—57).

Școala de 7 ani nr. 148. Clasa VII-a. Popa Mihai (E: 836, 38, 39, 43—45, 48, 51, 52, 54, 59, 60).

BUHUȘI (Bacău). Clasa VIII-a. Dunea Ion (2163, 65, 91, 93, 99, 209, E: 807, 09, 10, 12, 13, 16, 17).

BUZĂU. Clasa VIII-a. Blăgoi Olimpia (E: 851—53, 56, 63, 65, 67, 69, 72, 76, 79, 80, 83, 84,), Gheorghe A. Cezar (2288, 91, 93, 99, 304, 08, E: 851—60, P). Clasa X-a. Suciu A. Tita (2228, 35, 46, 49, 78, 84, 303, 04, 08, 49, 56, 57, 60, 63, 78, 80, P).

CALAFAT. Clasa VIII-a. Ciurezu C. Răzvan (E:845, 47, 51, 52, 56, 57, 63, 65, 67, 69, 72, 73). Clasa VIII-a. Jidovin F. Ștefan (E: 852, 54, 57, 60, 63—65, 67, 69, 70, 72, 73).

CĂLĂRAȘI. Clasa X-a. *Strălescu Ioan* (2011, 170, 216—20, 24, 25, 29—31, 33—36, 38, 40, 42, 44, 46, 47, 49, 52, 54—57, 59—62, 68, 71, 75, 79, 82, 84, 86, 87, 90—93, 97, 99, 301, 07, 09, 15).

Clasa VIII-a. Dincă I. Gheorghe (2258, E: 819, 32, 45, 51—55, 57, 60). Clasa X-a. Rădulescu N. Victor (2162—65, 73, 75, 77, 79, 84, 235).

CÎMPINA. Clasa VIII-a. Palaghiță Iordache (2224, 30, 31, 42, 47, 68, E: 819, 22, 24, 30—34, 42, 45, 47, 48, 50—52, 53, 55—57).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa VI-a. *Savin Alexandru* (E: 798, 803, 05, 06, 08, 11, 13, 14, 19, 25, 28, 29, 32, 36, 37, 43, 44, 52, 54, 55—59). Clasa VIII-a. Simionică I. Traian (E: 819, 23—25, 28, 29, 31, 32, 36, 37, 39, 42, 44, 45, 48).

CLUJ. Student Cotulea Ion (2109, 11—13, 18, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 70, 74, 75, 77, 78, 84, 86, 98). Clasa VI-a. Dumitreasa Alexandrina (E: 812, 19, 25, 32, 36, 37, 45). Clasa IX-a. Pamula Adrian (2224, 39, 42, 45, 81, 301, 04, 07, 08, 10). Clasa X-a. Birzan Romanel (2243, 48—50, 53—58, 62, 63, 65, 66, 71, 78, 79, 91, 97, 99, 303, 17, 24, 35, 40

Școala pedagogică nr. 2. Anul II. Neagoș Stela (E: 845, 52—54, 56, 58, 59, 65, 69); an III. Grindean Marin (E: 852—59, 63, 69); an IV. Indolean Ioan (2288, E: 822—28, 31, 32, 34, 35, 51, 52, 54—57, 60, 63—65, 67, 69, 71—73).

CONSTANȚA. Clasa VII-a. Baschi Eugen (E: 836, 37, 44, 45, 52, 55—57, 65, 59), Boancă Mariana (836, 37, 44, 45, 52, 55—57, 64, 65), Bulgărea Mihaela (E: 836, 37, 44, 45, 52, 55—57, 64, 65), Dumitru St. Mariana (E: 836, 37, 44, 45, 52, 55, 56, 64, 65, 69), Suciu Ion (E: 836, 37, 44, 45, 52, 55—57, 64, 65). Clasa IX-a. Abduran Aiten (2216, 23, 24, 27, 29, 36, 47, 52, 61). Clasa X-a. *Ianuș I. Stere* (2209, 16, 24, 35, 37, 42, 43, 46, 47, 49, 51, 52, 55, 56, 58, 59, 61, 62, 67, 71, 73, 78, 84, 90, 91, 97, 99, 304, 09, 16, 17, 35, 38, 40, P), *Stepan Ionel* (2170—77, 79, 80, 82—84, 86—88, 93, 200, 07, 11, 12, 16, 35, 52, 55, 61, 65, 84).

CORABIA. Clasa VIII-a. Begea I. Constantin (E: 855, 56, 62, 63, 65, 69, 70, 72, 76, 79, 80, 83, 84).

CRAIOVA. Absolvenți: Dinuț Teodor (2164, 235, 52, 55, 58, 61, 73, 84, 92, 303, 09, 21, 35, P), Mihail M. Gheorghe (2011, 246, 47, 49, 52, 54, 78, 99, 308, 17, 38).

Școala medie nr. 1. Clasa VIII-a. Cernăianu Sorin (2230, E: 819, 22, 24, 25, 27, 29, 32, 36, 42, 44, 47, 48, 50, 52—57, 60), Drîmbă Ion (E: 836, 44, 45, 48, 55, 63, 65, 69, 71, 72), Duțu N. Corneliu (2246, 61, 94 307, E: 836—38, 45, 48, 52—54, 56, 60, 77).

Școala medie nr. 2. «Frații Buzești» Clasa X-a. Bărbulescu Ion (2225, 35, 46, 47, 52, 54 —57, 64, 84).

Școala medie nr. 3. Clasa VIII-a. Cetățeanu Rodica (E: 847, 52, 53, 63—65, 67, 69, 71—73).

CURTEA DE ARGEȘ. Clasa VIII-a. Băcăuanu Mihai (2224, E: 819, 22, 24, 32, 45, 52, 56, 57). Clasa X-a. Murăreci Fănică (2240, 46, 52, 55—58, 60, 84, 304).

DRĂGĂȘANI. Neaga Constantin (2163—65, 67, 73—80, 82, 84, 85, 99).

FOCȘANI. Clasa VI-a. Tudorancea Agripina (E: 799, 801, 05, 07, 08, 11). Clasa VIII-a. Pantelimon Marcela (E: 819, 24, 27, 30, 33, 34, 51, 52, 59, 60), Munteanu Valeriu (2257, E: 821, 23, 36, 42, 43, 45, 48—57), Rădescu Eugen (2011, 55, 164, 67, 235, 46, 47, 52, 54, 58—61, 73, 78, 84, 303, 55, 57, 59—61, P).

GALAȚI. Clasa X-a. Chirilă Marian (2218, 38, 43, 54, 67, 75, 89, 90, 99, P).

GIURGIU. Clasa VII-a. Drăgan I. Petre (2257, 58, E: 807, 08, 10, 11, 13, 18, 27 29, 51—56, 59). Clasa VIII-a. Caraconcea Emanoil (2224, 30, 63, 310, E: 819, 24, 25, 31—33, 36, 45, 48, 52, 55), Mirlogeanu Florea (2257, 58, E: 810, 19, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 36, 45, 47, 51—56, 59), *Profirescu D. Marcel* (2162, 63, 73—75, 77—79, 82, 88, 91, 95, 203, E: 806, 07, 08, 10—13, 19, 22, 24, 26—30, 32, 34—36, 43—45, 48, 52, 57, 64, 65, P Stăncescu N. Virgil (E: 819, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 36, 37, 42, 45, 47, 48, 50). *Clasa IX-a* Vișinescu Mihai (2256, 61, 63, 71, 81, 91, 304, 07, 10, 11, 17, 22, 99). Clasa X-a. *Panaitopol Laurențiu* (2041, 43, 45, 47, 48, 53, 54, 56, 59, 60, 63, 64, 67, 93, 94, 98, 101, 08, 62—64, 67—74, 76—80, 82—88, 90, 91, 93, 95, 200, 03, 04, 06, 09, 16—21, 24, 25, 28, 32, 33, 35—38, 42, 44, 47—50, 52, 54, 55, 57, 59—62, 67, 71, 73, 75, 77—80, 82, 84, P).

HUȘI. Absolvent Dolteanu Temistocle (2216, 17, 24, 26, 49, 50, 54, 57, 73, 84, 309, P).

IANCA (Galați). Clasa X-a. Bănică Radu (2238, 54, 60, 68, 97, 309, 16, 32, 35, 40), Caracoti Stere (2246, 52, 54, 55, 57—61, 67, 84, 97, 309, 35, 40), Iancu I. Ovidiu (2246, 47, 52, 54, 59, 61, 90, 97, 99, 316, 35, 40).

IAȘI. *Școala medie « Mihail Sadoveanu » nr.* 1. Clasa X-a. Cușmaru Ilie (2246, 60, 65, 80, 88, 304, 16, 19, 35, 38, 40), Feldman Milu (2246, 54, 60, 65, 84, 316, 19, 35, 38, 40), Grișaru Iancu (2288, 90, 97, 304, 16, 19, 21, 38, 40, 60), Iticovici Mihail (2246, 52, 54, 58, 65, 80, 84, 88, 304, 16, 19, 35, 40), *Țibuleac Florin* (2175—80, 83, 84, 91, 200, 02, 04, 07, 10, 11, 24, 26, 30, 46, 52, 54—56, 60, 61, 64), Soil Leib (2228, 46, 54, 65, 80, 84, 304, 16, 19, 35, 38, 40), Șor Liber (2228, 46, 54, 60, 65, 84, 304, 16, 19, 35, 38, 40).

Școala medie nr. 2. Clasa VIII-a. Botez Gheorghe (E: 851, 52, 54—57, 60, 63, 65, 69—71), clasa X-a. Dițu Emil (2119, 20, 28, 30, 64, 65, 73—75, 80, 84, 88, 93, 203, 16, 21, 46, 52, P).

Școala medie nr. 3. Clasa VII-a. Nuțu Const. (E: 836, 37, 43, 48, 50—52, 56, 57, 60, 63, 65, 67, 69, 71, 72). Clasa X-a. Constantinescu Radu (2247, 50, 52, 55—59, 61, 65, 78, 84, 97, 404, 09), Cruți Mihai (2055, 216, 46, 52, 57, 58, 78, 84, 305, 09), Homutescu Adrian (2224, 30, 35, 46, 47, 50, 52, 55—61, 84), Mihalache Adrian (2216, 21, 24, 30, 35, 40, 43, 46, 47, 50, 52—61, 65, 78, 84, 97, 301, 04, 09, P), Popescu Claudiu (2246, 50, 52—55, 58—61, 65, 78, 84, 96, 301, 04, 09, P), Tuțurman Mircea (2240, 46, 52, 55, 56, 59, 61, 65, 84).

LUGOJ. *Școala medie nr.* 2. Clasa VIII-a. Cărăleanu Dumitru (E: 808, 18, 19, 22, 24, 30—34, 45, 47, 51, 52, 56, 57). Clasa X-a. Păpușoiu Gh. (2246, 52, 90, 97, 303, 04, 07, 09, 10, 16, 40).

MORENI. Clasa VIII-a. Moflic Emilian (E: 819, 22, 24, 27, 31, 34, 41—43, 47, 48, 57).

OCNA MUREȘULUI (Aiud). Absolvent. *Diamantstain Martin* (1997, 2007, 10, 20, 21, 23, 40—43, 45, 50, 89, 116, 31, 38, 71, 72, 74—77, 80, 84, 86, 93, 211, 35, 54, 65, 84, 309). Clasa IX-a. Rusu Mihai (2011, 162, 63, 78, 201, 06, 09, 29, 30, 42, 52, 54—58, 60, 61, 84, 94, 304, P). Clasa X-a. *Bucurenciu Sorin* (2178, 85, 93, 201, 09, 16, 22, 34, 35, 46, 47, 52, 54—59, 61, 67, 81, 84, 92, 94, 97, 304, 07, 09, 12, 29, 35, P).

ORADEA. *Școala medie nr.* 1. Clasa VIII-a. *Gherman Ecaterina* (2246, 47, 54, 57, 60, E: 819, 22, 24—32, 34, 36—40, 42—50). Școala medie nr. 2. Clasa VII-a. Gal Iuliana (1955, E: 763—67, 76, 78, 80, 81, 90, 97—99, 801, 04, 05).

ORAȘUL STALIN. Clasa VIII-a. Opriș Georgeta (2246, 54, 58, 59, E: 819, 22, 24, 31, 51, 52, 54—57, 60). Absolvent Uță Marin (2189, 99, 203, 11, 16—20, 25, 29, 31—35, P), Gurzău I. Cornel (« Cum se poate construi elipsa »).

PETROȘANI (Hunedoara). *Școala medie nr.* 1. Clasa VI-a. Albu Toma (E: 819, 24, 25, 28, 36, 45, 51, 54, 55, 57, 59).

PITEȘTI. *Școala medie nr.* 1. Clasa X-a. Olteanu D. Constantin (2246, 47, 52, 54—57, 59—61, 63, 67, 72, 78, 81, 84, 97, 304, 07, 12, 22, 28, 32, 40, P), Rădulescu Mihai (2246, 52, 54, 55, 59, 60, 78, 84, 94, 97, 99, 301, 04, 07, 09, 11, 40, P).

PLOEȘTI. *Școala medie nr.* 1. « *I. L. Caragiale* ». Clasa VII-a. Dăscălescu H. Mircea (E: 813, 15, 17—19, 22, 25, 27, 29—37, 40, 42, 47), Gheorghiu Florin (E: 809, 10, 12, 14, 16—19), Marinescu Alex. (E: 819, 24, 28, 32, 45, 51, 63, 67, 69, 72), Nicolaescu Mihaela (E: 819—21, 24, 25, 31—34), Patron Alex. (E: 819, 20, 28, 29, 35, 37, 43—45, 48), Pîrîianu Radu (E: 819, 21—26, 32, 35, 45, 67, 69, 72). Clasa VIII-a. Dumitrescu D. Vladimir (E: 819, 22, 24, 31, 32, 36, 41, 45, 47, 52, 63—65, 67, 69, 70), Ene C. Dumitru (E: 819, 21, 23, 26, 29, 31, 34, 37, 43—45, 47, 48, 50), Fezi Adrian (E: 807, 08, 10—15, 18, 19, 24, 27), Ionescu Gh. Ion (E: 813, 15, 18, 22, 29, 33, 36, 37, 42, 45—48, 50), Leonte Ileana (E: 811, 13, 24, 28, 37, 47, 51, 52, 64, 69), Neaga Viorel (E: 810, 11, 13, 19, 22, 24, 31, 36, 37), Nicolae Viorel (E: 819, 22, 24, 26, 28, 29, 31—33, 36, 39—58, 60), Nicolaescu A. Basarab (2236, E: 819—36, 42, 45, 47, 51, 52, 63, 64), Preda I. Vasile (E: 810, 11, 13, 18 19,

22, 24, 31, 36, 37), Spătaru Bellia (E: 808, 10—13, 15, 19, 20, 32, 36, 42, 44, 45, 52), Ştefănescu V. Rodica (E: 806, 08—11, 14, 15, 18, 19, 32), Tăbuşcă C. Pavel (2179, 82, 98, E: 806, 08, 10—16, 18), *Timuş M. Dan* (E: 808, 15, 19, 22, 24, 26, 29, 31—33, 45, 47, 48, 50—52, 54—57, 60, 64, 65, 67, 69—71), Tomescu Ion (E: 806—18), Tomoiu Mircea (E: 806, 08, 10—12, 14, 16—18). Clasa IX-a. *Ciortan Vasile* (2216, 25, 33, 40, 46, 47, 52, 54, 55—59, 61—64, 68, 71, 73, 77, 81, 84, 88, 91, 93, 94, 96, 99, 301, 04, 05, 07, 08, 10, 14, 15, 17, 22, 26, 37, 39). Constantinopol Alexandru (2216, 25, 31, 39, 42, 45—47, 55—58, 60, 61, 63, 71, 81). Clasa X-a. *Baltag Vasile* (2047, 72, 76, 220, 45, 57, 58, 70, 71, 75, 77, 79, 82, 86, 87, 90—93, 95, 98, 301, 04, 05, 09, 16, 19—24, 26, 32, 35, 36, 38—40, P), Bărbieru N. Pană (2322, 40, 46, 52, 54, 58, 61, 65, 84, 301, 04, 19), Boiangiu Nicolae (2246, 47, 49, 52, 54, 55, 58, 60—62, 65, 84, 90, 301, 04, 09, 16, 19, 22, 40), Ionescu C. Lucian (2246, 52, 54, 55, 57—61, 65, 84), Popescu C. (2246, 50, 52, 55, 57, 59, 78, 301, 09, 12), Rusu Dan (2245, 47, 49, 52, 54, 55, 57—61, 65, 84, 90, 97, 301, 04, 08, 09).

Şcoala medie nr. 3. Clasa VII-a. Angelescu N. Mihai (E: 851, 52, 54, 55, 57, 60, 63—65, 69, 70, 72, 79, 84), Dragomirescu B. Alex. (E: 852, 55—57, 63—65, 69, 76, 79, 80), Gheorghiu Nicolae (E: 807, 09, 12, 14, 19, 23—26, 28, 29, 36, 43—45, 51, 52, 54, 55), Negrea Ştefan (E: 857, 60, 64, 69, 70, 72, 79—81, 84), Popescu Dan (E: 851, 52, 57, 60, 64, 65, 69, 70, 72, 79—81, 84), Vasilescu Dan (E: 856, 57, 61, 66, 71—76, 79, 84). *Absolvenţi*: Curelea Iulian (2170, 216, 25, 31, 35, 46, 54, 56—58, 84, 304, 09), *Lungu N. Liviu* (2246, 52, 65, 67, 68, 70, 71, 73, 78, 80, 82, 84, 90, 92, 97, 98, 201, 04, 07, 09, 16, 17, 19, 21, 26, 32, 35, 36, 38—40, P).

PUCIOASA. Absolvent Stan N. Dumitru (2142, 52, 63—74, 80, 83—86, 88, 90, 91, 93, 94, 97, 99, 200, P). Clasa VIII-a. Şerbănoiu Nicolae (E: 860, 63, 65, 67, 69, 70, 79, 80, 81, 84).

RĂDĂUŢI. *Iftimie Viorel* (2216, 19, 20, 27, 33—36, 38—40, 42, 45—47, 49—52, 54—62, 65, 67, 68, 71, 75, 78, 82, 84, 86, 87, 90—92, 97—99, 301, 04, 06, 07, 15, P).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa IX-a. *Ancuţoiu I. Gh.* (2230, 31, 33, 38—40, 42, 43, 52, 54, 55, 58, 60, 63, 67, 68, 71, 73, 84, 89, 90, 97, 99, 300, 04, 07, 09—11, 15, 16, 19, 21, 32, P). Clasa X-a. Bulucea D. Const. (2224, 29—31, 33, 35, 40, 42, 43, 54, 55, 57, 59, 60, 71, 84, 97, 304, 07, 08, P), Mărgăritescu Gh. Corneliu (2245, 61, 84, 97, 304, 09, 16, 17, 19, 21, 38, 40), *Pojgă Constantin* (2109—21, 24—27, 29—33, 35—39, 44, 51, 57, 61—75, 77, 79, 80, 82, 84, 86, 93, 99, 211, P), Urca I. Ion (2254, 84, 98, 304, 07, 16, 17, 21, 39, 40).

ROMAN. Clasa VI-a. Segal Akiba (E: 836, 37, 43, 45, 48, 63—65, 67, 68, 70). Clasa VIII-a. Ilioi C. Constantin (2246, 71, E: 836, 37, 42—47, 50), Ricinski Cezar (2255, 58, E: 844, 45, 51, 52, 55—57, 59).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa VIII-a. *Grecu Anton* 2195, 242, E: 808, 11, 13, 18, 19—22, 24, 26, 27, 29—32, 34, 36, 42, 43, 45, 47, 48, 51—53, 55—57, 60, 63—65, 67, 69—73).

SIBIU. — *Şcoala militară de artilerie.* Pupăzan V. Nicolae (2246, 47, 49, 52—55, 58 59, 61, 65, 67, 68, 71, 73, 79, 80, 84, 86, 90, 91, 94, 96, 99, 300, 01, 03, 04, 08, 09, 13, P). Absolvent Tulai Gh. (2171, 72, 79, 86, 88, 97, 207, 08, 10, 11).

SIGHET. Clasa VIII. Tomoiagă M. Dorin (E: 842—44, 46, 51, 52, 54—57, 60, 62—65, 67—72, P). Berţi Ştefan (« Despre şirurile numerice »).

SLATINA. Absolvenţi: *Bărbulescu Marcel* (2199, 203, 06, 19, 21, 30, 42, 43, 67, 84, 86—88, 90, 302, 03, 06, 09, 13, 18, 21—23, 26, 32, 35, 36, 38—41, P), Ghenea Anghel (224, 30, 35, 46, 54, 58, 73, 78, 309, 11—13, 38), Dorobanţu Valeriu (2203, 43, 63, 65, 84, 92, 94, 302, 03, 09, 13, 18, 22, 25, 35, 38, 40, P). Clasa VIII. Ghenea Nicolae (E: 819, 22, 25, 27—29, 32, 34, 36, 41—45, 51, 52, 56, 57, 60, 63, 65, 67), Graure Veronica (2162, 71, 72, 81, 84—88, 90, 91, 93, 99, 200, 03, 06, 09, E: 810, 13, 19, 24, 35).

SLOBOZIA. Clasa VIII-a. Vasilică Gheorghe (792, 97—99, 801, 02—08, 10, 11, 13, 18, P).

TECUCI. *Şcoala medie nr.* 2. Clasa VIII-a. Vidraşcu Traian (2216, E: 851, 55—57, 60, 61, 63, 65, 67—69, 72, 73).

TÎRGU-JIU. Clasa VII. Slăvescu Mihai (2233, 36, E: 819—22, 24, 26, 27, 29—35). Clasa VIII. *Aniţescu N. Nicolae* (2162—67, 70—75, 77, 79, 80, 84, 86—88, 91, 93, 99, 200,03, 08, 33—36, 43, 46, 47, 49, 50, 54, 55, 58, 59, 65, 71, 73, 77, 78, 84, E: 806—08, 10—13, 15—22, 24—27, 29, 30, 32—35), Velicescu T. Mircea (2236, 39, E: 819—35). *Şcoala de fete nr.* 1. Clasa VIII-a. Camer Anca (E: 806—08, 10—13, 15, 17, 18).

TÎRGOVIŞTE. *Cîrnu Mircea* (2230, 31, 46, 55, 73, E: 819—22, 24—38, 41—48, 50—52, 54—57, 59, 67). Absolvenţi: *Slănciulescu Mihai* (2015, 41, 42, 43, 45, 49—54, 56, 59, 70, 98, 101, 09—14, 16, 18—21, 25, 31, 42—44, 63, 64, 70, 75, 77, 79, 87, 89, 90, 93, 200, 06, 49, 50, 52, 54, 66, P), Şerban Emil (2246, 47, 52, 54—56, 61, 62, 64, 66, 73, 78, 84, 85, 96, 301, 04, 07—09).

TIMIŞOARA. *Şcoala medie nr.* 1. Clasa VIII-a. Bratu Doru (E: 822, 24, 30, 31, 34, 35), *Mihăileanu N. Alexandru* (E: 819, 29, 30, 33, 34, 43—45, 50—52, 56—61, 63—67, 69, 72), Toma Corneliu (2206, 52, 55, 57, 59, 88, E: 836, 43—45, 48, 51, 52, 54—57, 60). Clasa X. Mihăileanu N. Constantin (2217, 33, 35, 40, 46, 93, 94, 99, 301, 14). Haivas M. (« Asupra unor relaţii de recurenţă »).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a. Tene Rodica (2288, 317, E: 851, 52, 54, 55, 59, 60, 63—65, 69, 70, 72).

URLAŢI. Clasa X. Ionescu Vasile (2252, 54, 55, 58, 79, 84, 97, 335, 39, 40).

VASLUI. Clasa VIII. Barbu Viorel (1965, 69, 97, 2129, 33, 39, 62, 73, 80, 82, 209, 18, 24, 30, 31, 42, 47, 59, 61, 71, 307, E: 812, 20, 21, 42, P).

ZALĂU. Absolvent Fărcaş V. Beniamin (2172, 73, 79, 83, 84, 86, 88, 211, 14, 17, 35, P).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea* fiecărei probleme trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate *cu îngrijire.* Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceiaşi foaie. Fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunţul complet* şi numele propunătorului. După soluţionarea fiecărei probleme scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi sau ocupaţia şi *adresa* şi apoi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menţionaţi: *Redacţiei G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluţii numai la problemele şi exerciţiile din ultimele *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni şi redactate cu îngrijire aşa cum recomandă « Redactarea soluţiilor ».

— Soluţiile ce se vor enunţa la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidenţiaţilor premiaţi şi lista cărţilor ce se dau ca *premii şi menţiuni.*

— Nu se iau în seamă soluţiile exerciţiilor şi problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani, trimise de elevii claselor a *IX*-a şi a *X*-a sau de către *studenţi* şi nici soluţiile trimise în număr mai mic de *zece* sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoţite de soluţii, să fie *personale* şi nu luate din cărţi sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluţiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă să propună problemele numai după ce au soluţionat un număr *destul de mare* de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărţi sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul şi pagina unde s-a mai publicat *enunţul sau soluţia* problemei respective.

— În redactarea unei soluţii trebuie alese notaţii potrivite, subliniate părţile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline şi punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluţia problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieşi *chestiuni interesante.* Soluţiile mai dificile se obţin uneori prin încercări succesive şi studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluţii distinse au fost scrise îngrijit şi bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluţii diferite pentru aceiaşi problemă sau au *dat generalizări* şi observaţii interesante sub formă de *note.*

— Tovarăşii colaboratori elevi sînt rugaţi să ne trimită date asupra activităţii lor *extraşcolare* la matematică şi la fizică, asupra *cercurilor de matematică şi de fizică* la care iau parte şi asupra modului de desfăşurare a « *Olimpiadelor de matematică şi de fizică* » pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experienţă.

— *Redacţia nu face abonamente*, nici expediţii de reviste, de aceea reclamaţiile şi sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariţiei revistei *se vor face Centrului de difuzare a presei*, Bucureşti, str. Piaţa Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista şi *altora*; să ne trimită propuneri şi sugestii care să fie de folos în munca noastră redacţională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

— Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poştali sau la oficiile poştale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. MARCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROBIEV	**Numerile lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.**
22. NICOLAE STĂNESCU	**Electronul.**
23. V. SERGIESCU	**Introducere în fizica solidului.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**

ABONAMENTUL PE ANUL 1957 ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE)

C. 1458 – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426 d

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CHANGE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ОБМЕНА

Anul VIII — februarie 1957

2

EDITURA TEHNICA

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, Nr. 2 — februarie 1957

SUMARUL:

	Pag.
1. *Involuţia, de G. D. Simionescu*	57
2. *Giroscopul şi aplicaţiile sale, de Achim Marinescu*	68
3. *Albinele şi geometria, de Kiss Elemer, Tg. Mureş*	76
4. *Note matematice*	81
5. *Cărţile acordate bibliotecilor şcolilor medii premiate* .	87
6. *Probleme rezolvate (2028, 2084, 2100, 2102, 2199, 2200, 2229, 2232, 2236, 2243, 2245, 2329, 2402, E: 789, E: 827, E. 830, E: 843, E: 856, E: 861)*	88
7. *Probleme propuse (2500—2527)*	100
8. *Chestiuni de examen (2528—2538)*	103
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 920—E: 934)*	105
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	106

ANUL VIII 2 FEBRUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; Boiangiu A., asistentă univ., Ionescu Bujor C., prof. univ.: Ionescu-Ţiu C., profesor, redactor pentru matematică; Muşat I., profesor; Negulescu A., profesoară; Petrovanu A., profesor; Rădulescu N., profesor; Sacter O., conf. univ. redactor responsabil; Simionescu D. Gh., conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VIII * Nr. 2 februarie 1957

Kényvtár TULAJDONA

INVOLUŢIA

G. D. SIMIONESCU
Conf. univ. Institutul Politehnic, Bucureşti

1. PRESUPUNEM că relaţia omografică (v. articolul «*Omografia*» G.M.F — B Nr. 10 1956)

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{1}$$

stabileşte o corespondenţă între abscisele a două puncte M şi M' *de pe aceiaşi dreaptă* (Δ). Am văzut că atunci cînd $M \to \infty$, omologul său M' tinde către *punctul limită* J', de abscisă $x_0' = -\frac{B}{A}$ şi invers cînd $M' \to \infty$, M tinde către *punctul limită* I, de abscisă $x_0 = -\frac{C}{A}$. În general, punctele limită ale celor două diviziuni omografice I şi J' sînt distincte. În cazul particular cînd cele două puncte limită se confundă se spune că avem *două diviziuni omografice în involuţie*; atunci trebuie să avem $x_0 = x_0'$, adică

$$B = C. \tag{2}$$

Punctului dela infinit nu-i mai corespund două puncte limită, după cum este socotit ca aparţinînd mulţimii (M) sau mulţimii (M'), ci un singur punct ω care se numeşte *punct central*. Relaţia omografică (1) devine în acest caz,

$$Axx' + B(x + x') + D = 0. \tag{3}$$

Punctele M şi M' ale căror abscise sînt legate printr-o astfel de relaţie se spune că sînt în *corespondenţă involutivă* sau mai simplu, în *involuţie*. Transformarea definită prin relaţia (3) care face să corespundă fiecărui punct al mulţimii (M) un singur punct din mulţimea (M') se numeşte *transformare omografică involutivă* sau *transformare involutivă*.

Din cele spuse mai înainte rezultă că *involuţia este o omografie particulară în care punctele limită I, J' coincid.*

Observare. De obicei se ia ca definiţie pentru involuţie prima dintre proprietăţile ce urmează şi atunci definiţia dată mai sus apare ca proprietate.

Proprietățile transformării involutive

2. *Într-o involuție un punct oarecare N, considerat ca aparținînd succesiv mulțimii (M) sau mulțimii (M'), are același omolog N'.*

În adevăr fie $x = \alpha$ abscisa lui N considerat ca aparținînd mulțimii (M) și $x' = \alpha'$ abscisa omologului său N' (se presupune că N este diferit de punctul central ω). Relația (3) trebuind să fie verificată, avem

$$A\alpha\alpha' + B(\alpha + \alpha') + D = 0. \tag{4}$$

Fie acum $x' = \alpha$ abscisa lui N considerat că aparținînd mulțimii (M') și $x = \alpha''$ abscisa omologului său N'' din mulțimea (M); trebuie să avem

$$A\alpha''\alpha + B(\alpha'' + \alpha) + D = 0. \tag{4'}$$

Prin scăderea relațiilor (4) și (4') se obține

$$(A\alpha + B)(\alpha' - \alpha'') = 0 \tag{5}$$

și deoarece $\alpha \neq -\frac{B}{A}$, rezultă $\alpha' = \alpha''$, adică $N' \equiv N''$. Deci punctul N considerat succesiv în cele două diviziuni are același omolog N'.

3. *O transformare involutivă este perfect determinată cînd se dau două perechi de puncte omoloage.*

Presupunînd $A \neq 0$ și punînd $\frac{B}{A} = m$; $\frac{D}{A} = n$, relația (3) devine:

$$xx' + m(x + x') + n = 0. \tag{6}$$

Considerînd punctele *distincte* $M_1(\alpha)$, $M_2(\beta)$ și omoloagele lor $M_1'(\alpha')$, $M_2'(\beta')$, între abscisele lor trebuie să avem

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + m(\alpha + \alpha') + n = 0, \\ \beta\beta' + m(\beta + \beta') + n = 0, \end{cases} \tag{7}$$

sistem care rezolvat ne dă pentru m și n expresiile

$$m = -\frac{\alpha\alpha' - \beta\beta'}{\alpha + \alpha' - \beta - \beta'} \; ; \quad n = \frac{\alpha\alpha'(\beta + \beta') - \beta\beta'(\alpha + \alpha')}{\alpha + \alpha' - \beta - \beta'} \tag{8}$$

care sînt bine determinate, deoarece $\alpha \neq \beta$ și $\alpha' \neq \beta'$. Introducînd aceste expresii în (6) obținem relația involutivă

$$(\alpha + \alpha' - \beta - \beta')xx' - (\alpha\alpha' - \beta\beta')(x + x') + \alpha\alpha'(\beta + \beta') - \beta\beta'(\alpha + \alpha') = 0, \tag{9}$$

determinată de cele două perechi de puncte date.

4. *Condiția necesară și suficientă ca trei perechi de puncte* (M_1, M_1'), (M_2, M_2'), (M_3, M_3') *să fie în involuție este ca raportul anarmonic a patru oarecare din cele șase puncte (cel puțin cîte unul din fiecare pereche), să fie egal cu raportul anarmonic al punctelor omoloage.*

De exemplu, $(M_1M_2M_3M_2') = (M_1'M_2'M_3'M_2)$. Aceasta este o consecință imediată a proprietății («Omografia» § 7 pag. 511), deoarece punctele M_1, M_2, M_3, M_2' considerate în prima diviziune, au drept omoloage pe M_1', M_2', M_3', M_2.

Proprietatea nu este adevărată în două diviziuni omografice *neinvolutive*, deoarece lui M_2' considerat în prima diviziune nu-i mai corespunde M_2, ci un alt punct.

5. *Punctele duble* se obțin făcînd în (3), $x' = x$, deci sînt date de ecuația

$$Ax^2 + 2Bx + D = 0. \tag{10}$$

Ele sînt reale dacă $B^2 - AD > 0$, imaginare dacă $B^2 - AD < 0$ și confundate dacă $B^2 - AD = 0$.

Se știe că mijlocul segmentului format de punctele duble coincide cu mijlocul segmentului punctelor limită (v. Omografia), deci pentru *involuție* mijlocul segmentului punctelor duble este *punctul central* ω. Dacă se ia ω ca origină și se notează cu X, X' noile abscise, atunci (v. Omografia) relația (3) devine

$$XX' = \frac{B^2 - AD}{A^2} = K. \tag{11}$$

De aici rezultă imediat că în cazul $B^2 - AD = 0$, relația (11) devine $XX' = 0$, adică o involuție singulară care nu prezintă nici un interes. Rămîn prin urmare numai *două tipuri de involuții*: cu puncte *duble reale și distincte* la distanță finită și cu *puncte duble imaginare*, după cum $K > 0$ sau $K < 0$.

6. *În cazul particular* cînd $A = 0$ relația (3) se reduce la

$$B(x + x') + D = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x + x'}{2} = -\frac{D}{2B}, \tag{12}$$

care arată că mijlocul ω al segmentului $\overline{MM'}$ este fix, cu alte cuvinte M și M' sînt simetrice față de un punct fix. Punctele limită se confundă la infinit, deci punctul central este aruncat la infinit. Ecuația (10) care dă punctele duble, avînd $A = 0$ se reduce la o ecuație de gradul I, deci o rădăcină este infinită, iar cealaltă este $x_0 = -\frac{D}{2B}$. Aceasta arată că un punct dublu este *la infinit*, iar celălalt este *centrul de simetrie*.

Această involuție particulară este *involuția simetrică*.

Reciproc, dacă punctul central al unei involuții este aruncat la infinit, involuția este o simetrie căci abscisa punctului central este $x_0 = -\frac{B}{A}$, prin urmare $A = 0$.

7. Să ne ocupăm acum de cele două tipuri de involuții:

a) cu puncte duble și reale și *b)* cu puncte duble imaginare.

a) Să notăm cu P și Q punctele duble și cu X_p, X_q abscisele lor care se obțin din (11) făcînd $X' = X$, deci $X^2 = K$ sau $X = \pm \sqrt{K}$ $(K > 0)$, de unde $X_p = \sqrt{K}$, $X_q = -\sqrt{K}$. Deducem imediat

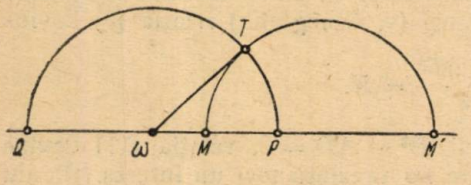
$$X_p^2 = XX' = K \text{ sau între segmente: } \overline{\omega P}^2 = \overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'}. \tag{13}$$

Relația (11) arată că M și M' sînt de aceiași parte a lui ω. Se știe însă că dacă relația (13) este satisfăcută, *punctele M, M' sînt conjugate armonic față de punctele fixe P, Q* (fig. 1).

Reciproc, dacă punctele variabile M și M' sînt conjugate armonic față de două puncte fixe P, Q, atunci ele descriu pe dreapta PQ două diviziuni în involuție avînd punctele P și Q ca puncte duble.

În adevăr, notînd cu ω mijlocul segmentului PQ, avem relaţia $\overline{\omega P}^2 = \overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'}$, deci, $XX' = \overline{\omega P}^2 = K$ (const), adică relaţia (11). De aci se deduce că dacă $X = \overline{\omega P}$, atunci şi $X' = \overline{\omega P}$, iar dacă $X = \overline{\omega Q} = -\overline{\omega P}$, atunci şi $X' = \overline{\omega Q} = -\overline{\omega P}$; punctele P şi Q sînt deci punctele duble ale involuţiei.

Pentru acest tip de involuţie construcţia punctelor duble, cînd se cunoaşte punctul central ω şi o pereche de puncte omoloage M, M', este imediată. Se construeşte un cerc arbitrar ce trece prin M şi M' (în fig. 1 cercul de diametru



Ffg. 1

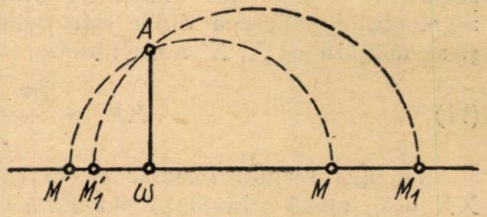


Fig. 2

MM'), se duce tangenta ωT la acest cerc, apoi cu raza ωT se descrie cercul care taie dreapta MM' în punctele duble P,Q.

b) În cazul $K < 0$ punctele duble nu mai există (sînt imaginare). Relaţia $XX' = K < 0$ arată însă că cele două puncte M,M' sînt de o parte şi de alta a lui ω, deci $\overline{\omega M}$ şi $\overline{\omega M'}$ pot fi considerate cu proiecţiile catetelor AM şi AM' ale unui triunghi dreptunghic a cărui înălţime este $\overline{A\omega} = \sqrt{-K}$. Unghiul MAM' este drept, iar vîrful A este fix. Rezultă că un astfel de tip de involuţie ia naştere prin rotirea unui unghi drept în jurul vîrfului său fix A: laturile unghiului determină pe dreapta considerată (Δ) două diviziuni în involuţie.

Orice altă pereche de puncte se capătă ducînd un cerc cu centrul pe (Δ), care trece prin A; punctele unde cercul taie pe (Δ) sînt punctele căutate (fig.2).

Reciproc, dacă un unghiu drept se roteşte în jurul vîrfului său presupus fix, atunci laturile sale determină pe o dreaptă oarecare două mulţimi de puncte (M) şi (M') în involuţie, cu punctele duble imaginare. În adevăr, ducînd perpendiculara din punctul fix A pe dreapta (Δ) considerată şi notînd cu ω piciorul perpendicularei, avem

$$\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'} = -\overline{A\omega}^2, \text{ adică } XX' = K < 0.$$

Observare. În articolul despre omografie s-a arătat că dacă un unghi oarecare constant (orientat) se roteşte în jurul vîrfului său fix, atunci laturile sale determină pe o dreaptă oarecare (Δ) două diviziuni omografice. Fie AM, AM' laturile unghiului (M şi M' pe Δ), deci lui M îi corespunde M'; cînd AM ocupă poziţia AM' (deci M' e considerat în mulţimea (M)), atunci a doua latură ocupă o poziţie AM'' astfel că $\sphericalangle M'AM'' = \sphericalangle MAM' = \text{const}$, iar M'' este în general diferit de M. Pentruca $M'' \equiv M$ trebuie ca dreptele AM, AM'' să fie suprapuse, deci sau $\sphericalangle MAM' = 0$, care nu ne interesează, sau $\sphericalangle MAM' = 90°$, în care caz punctului M', considerat succesiv în cele două diviziuni, îi corespunde acelaşi punct M. Acesta este cazul (b) studiat mai sus.

8. *Dîndu-se două perechi de puncte A, A'; B, B' pe o dreaptă (Δ), ele definesc o involuţie în care A, B au drept omoloage pe A', B'. Se cere să se construiască:*

a) *punctul central*; b) *punctele duble*; c) *omologul unui punct oarecare M al dreptei* (Δ).

a) Dacă ω este punctul central al involuției trebuie să avem

$$\overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'} = \overline{\omega B} \cdot \overline{\omega B'} = K, \tag{14}$$

deci ω se află pe axa radicală a două cercuri, unul care trece prin A și A', altul care trece prin B și B'. Pentru a nu complica construcția alegem două cercuri care se taie: luăm un punct oarecare C exterior dreptei (Δ) și construim cercurile $(AA'C)$ și $(BB'C)$; ele se mai taie într-un punct C', iar axa radicală CC' taie dreapta (Δ) în ω, punctul central.

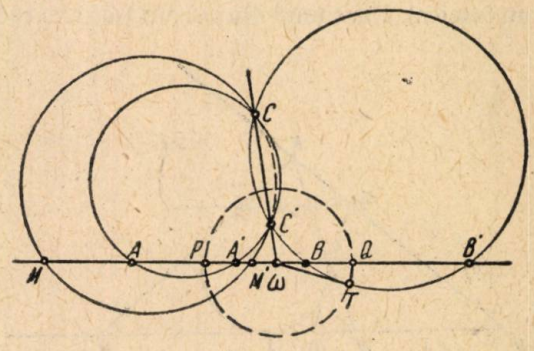


Fig. 3

b) Ducem tangenta $\overline{\omega T}$ la unul din cercuri; cercul cu centrul ω și raza $\overline{\omega T}$ determină pe (Δ) punctele duble P, Q, deoarece $\overline{OP}^2 = \overline{\omega T}^2 = \overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'}$.

c) Dîndu-se un punct M, cercul $CC'M$ taie din nou dreapta (Δ) în M' omologul lui M, căci $\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M'} = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega C'} = \overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'}$.

Discuție. 1) Dacă punctul ω este exterior cercurilor $(AA'C)$ și $(BB'C)$, atunci se poate duce tangenta ωT și deci punctele duble P, Q sînt reale. Pentru aceasta trebuie ca segmentele $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ să fie sau exterioare unul altuia sau unul din ele să fie în întregime interior celuilalt (de exemplu, $\overline{AA'}$ și $\overline{MM'}$).

2. Dacă cele două segmente au numai o porțiune comună, atunci ω este interior fiecăruia din cercuri și tangentele din ω nu se mai pot duce; punctele duble sînt imaginare.

3. Dacă $CC' \parallel (\Delta)$, atunci ω este la infinit. Aceasta cere ca centrele celor două cercuri să fie pe o perpendiculară pe (Δ) care este atît mediatoarea lui $\overline{AA'}$ cît și a lui $\overline{BB'}$. Deci $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ au același mijloc ω, iar punctele date sînt simetrice față de ω; involuția este o simetrie față de ω.

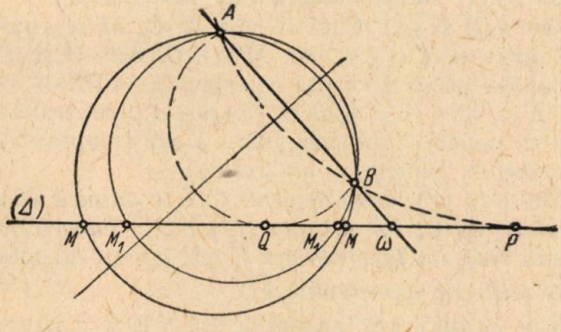


Fig. 4

9. *Exemple. I. Se dă o dreaptă* (Δ) *și două puncte fixe A, B exterioare dreptei. Un cerc variabil care trece prin A și B taie dreapta* (Δ) *în punctele M, M' care descriu pe* (Δ) *două diviziuni omografice în involuție* (fig. 4).

În adevăr, unui punct M îi corespunde un singur punct M' și reciproc, iar punctele M și M' se obțin prin intersecția unei drepte cu un cerc, deci M și M' descriu diviziuni omografice. În plus, punctul M considerat fie în prima diviziune, fie în a doua, are același omolog M', deci ele se corespund într-o involuție.

Punctele duble ale involuției se obțin ducînd cercurile ce trec prin A,B și sînt tangente dreptei (Δ) în P și Q. Aceasta este posibil numai dacă A și B *sînt de aceiași parte a dreptei* (Δ). Obținem astfel o involuție cu puncte duble reale. Punctul central este intersecția dreptelor (Δ) și AB.

Dacă A și B sînt de o parte și de alta a dreptei (Δ), nu se mai pot duce cercuri tangente și obținem o involuție cu puncte duble imaginare.

Toate cercurile din plan care au aceiași axă radicală se spune că formează un fascicol. Dacă unul din cercuri taie axa radicală în A și B atunci toate cercurile fascicolului trec prin A și B. Proprietatea de mai sus se enunță sub forma generală astfel: cercurile unui fascicol determină pe o dreaptă oarecare (Δ) puncte care se corespund într-o involuție.

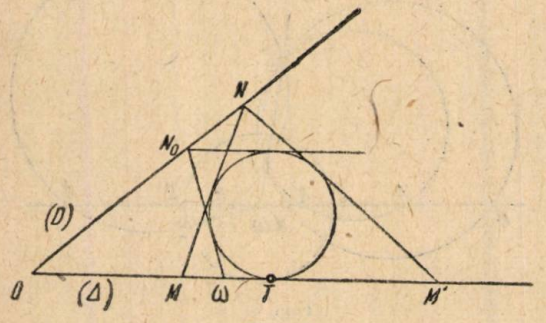


Fig. 5

Exercițiu. Să se arate că în primul tip de involuție punctele M și M' sînt conjugate față de P și Q.

Să se determine vîrful fix în jurul căruia se rotește un unghiu drept pentru ca să dea naștere involuției de al doilea tip.

II. *Se dau două drepte* (D) *și* (Δ) *și un cerc* (Γ) *tangent dreptei* (Δ). *Tangentele duse dintr-un punct* N *variabil pe dreapta* (D), *la cercul* (Γ), *întîlnesc dreapta* (Δ) *în două puncte* M *și* M' *care sînt puncte omoloage într-o transformare involutivă* (fig. 5).

Se observă imediat că dacă se ia un punct M pe (Δ), din M se poate duce o singură tangentă la (Γ) în afară de (Δ); aceasta taie dreapta (D) în N. Din N se mai poate duce o singură tangentă la cerc și aceasta determină pe M'. Reciproc, unui punct M' îi corespunde un singur punct M; construcțiile sînt făcute numai cu drepte și cercul (Γ) deci corespondența este omografică. Apoi, fie că M este considerat în prima diviziune, fie că este considerat în a doua diviziune, are drept omolog pe M', deci corespondența este involutivă.

Fie O punctul comun dreptelor (D) și (Δ). Cînd N vine în O, M se confundă cu punctul de tangență T între cerc și (Δ), iar M' cu O, deci O și T sînt puncte omoloage. Tangenta la cerc paralelă cu (Δ) corespunde lui $M' \to \infty$ (sau $M \to \infty$); ea taie pe (D) în N_0, care determină pe (Δ) punctul central ω. Involuția în cazul figurii (5) este cu puncte duble imaginare. Dacă dreapta (D) taie cercul (Γ), atunci involuția este cu puncte duble reale.

10. *Aplicații*. I) *Se dă un cerc* (Γ), *două tangente la cerc paralele* (Δ) *și* (Δ') *și o secantă care taie cercul în* A, B, *iar dreapta* (Δ') *în* C. *Tangentele în* A *și* B *la cerc taie dreapta* (Δ) *în* P,Q, *iar tangenta din* C *taie aceiași dreaptă în* R. *Să se demonstreze că* R *este mijlocul segmentului* $\overline{PQ}$.

Dacă se ia un punct variabil N pe secanta AB, tangentele din N la cerc determină pe (Δ) două puncte M și M' în corespondență involutivă, așa cum s-a arătat la exemplul II. Cînd N coincide cu A, cele două tangente se confundă, deci P este un punct dublu; pentru motive asemănătoare, celălalt punct dublu este Q. Cînd $M \to \infty$ a doua tangentă la cerc este $(\Delta') \parallel (\Delta)$, iar N vine în C și M' în R, care este punctul central. Se știe însă, că punctul central este mijlocul segmentului format de punctele duble P, Q, c. c. t. d.

II). *Se dă un cerc și un punct T pe el. Pe tangenta în T se iau două puncte A, A' simetrice față de T și se duc secantele arbitrare AMN, A'M'N'. Dreptele NM' și N'M taie dreapta AA' în P și P'. Să se demonstreze că P și P' sînt simetrice față de T* (fig. 6).

Să considerăm deocamdată secanta AMN fixă. Fiind dat punctul P pe dreapta AA', construcția punctului P' se face astfel: se duce PM care taie din nou cercul într-un singur punct N', apoi $N'A'$ taie din nou cercul într-un singur punct M' și în sfîrșit NM' taie pe AA' în P'. Reciproc, unui punct P' îi corespunde un singur punct P care se construește la fel. Construcția se face numai cu drepte și cercul dat, deci P și P' se corespund omografic.

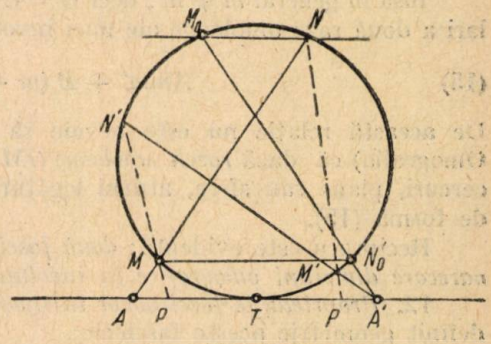


Fig. 6

Presupunem acum că $P \to \infty$, deci $MN_0' \parallel AA'$, iar M și N_0' sînt evident simetrice față de dimetrul (d) care trece prin T; $A'N_0'$ taie cercul din nou în M_0' simetric cu N față de același diametru (d). Rezultă că MN_0' și NM_0' sînt paralele, iar $P' \to \infty$, deci punctele la înfinit în cele două diviziuni se corespund (sînt omoloage). În acest caz însă cele două diviziuni omografice sînt diviziuni asemenea. Luînd originea în T și notînd $\overline{TP} = x$ și $\overline{TP'} = x'$, abscisele sînt legate prin relația $x' = mx + n$ (v. Omografia). Însă cînd $P \equiv T$, se observă că și $P' \equiv T$, deci T este punct dublu. Aceasta înseamnă că dacă $x = 0$, atunci și $x' = 0$, de unde rezultă $n = 0$. Apoi cînd P coincide cu A, N' coincide cu N și P' cu A', adică A și A' sînt omoloage. Notînd $\overline{TA} = a$, atunci $\overline{TA'} = -a$ și înlocuind în relația $x' = mx$ se deduce $m = -1$. Omografia se reduce la $x' = -x$, adică o involuție simetrică și atunci toate perechile de puncte omoloage sînt simetrice față de T. Dacă luăm altă poziție a secantei ANM, lucrurile se petrec la fel, deci oricare ar fi secantele, P și P' sînt simetrice față de T.

Fascicole în involuție

11. Fie, pe o dreaptă (Δ), două mulțimi de puncte (M) și (M') în corespondență involutivă, iar în afara dreptei un punct oarecare O. Dreptele OM și OM' care unesc punctul O cu punctele omoloage M și M' ale involuției dau naștere la două fascicole în corespondență involutivă, adică la două fascicole omografice care se bucură de proprietatea că *o rază OM, considerată pe rînd în cele două fascicole, are aceiași rază omoloagă OM'*.

În adevăr, am văzut la « Omografie », că dacă se unește un punct oarecare O, cu două puncte omoloage M,M' a două diviziuni omografice de aceiași bază (Δ), atunci se obțin două fascicole omografice cu același vîrf. Dacă M și M' se corespund însă, într-o involuție, atunci M, considerat succesiv în cele două diviziuni, are același omolog M', prin urmare și raza OM are aceiași rază omoloagă OM'.

Reamintim că relația care leagă coeficienții unghiulari m, m' a două drepte omoloage din două fascicole omografice este

$$Am\,m' + Bm + Cm' + D = 0.$$

Pentruca fascicolele să fie in involuţie trebuie ca OM socotită în a doua diviziune să aibă ca rază corespunzătoare tot pe OM', deci

$$Am'm + Bm' + Cm + D = 0;$$

prin scăderea celor două relaţii se obţine

$$(B - C)(m - m') = 0.$$

Însă în general $m \neq m'$, deci $B = C$ şi relaţia care leagă coeficienţii unghiulari a două raze omoloage ale unei involuţii este

$$Amm' + B(m + m') + D = 0. \tag{15}$$

De această relaţie nu este nevoie să ne servim dacă facem observaţia (v. Omografia) că dacă *razele omoloage* OM şi OM' se construesc numai cu drepte, cercuri, plane sau sfere, atunci legătura între coeficienţii lor unghiulari este de forma (15).

Reciproca este evidentă: *două fascicole în involuţie determină pe o dreaptă oarecare diviziuni omografice în involuţie.*

12. *Proprietăţile fascicolelor în involuţie* rezultă imediat din felul cum am definit geometric aceste fascicole:

a) *Două fascicole în involuţie sînt perfect determinate cînd se cunosc două perechi de raze omoloage*, fiindcă involuţia însăşi, de pe dreapta (Δ), care determină razele OM, OM', este determinată prin două perechi de puncte omoloage.

b) *Condiţia necesară şi suficientă ca trei perechi de raze* (OM_1, OM_1'); (OM_2, OM_2'); (OM_3, OM_3') *să fie în involuţie este ca raportul anarmonic a patru oarecare din cele şase raze (cel puţin cîte una din fiecare pereche), să fie egal cu raportul anarmonic al razelor omoloage*, căci punctele (M_1, M_1'), (M_2, M_2'), (M_3, M_3'), trebuie să satisfacă o condiţie asemănătoare (§ 4).

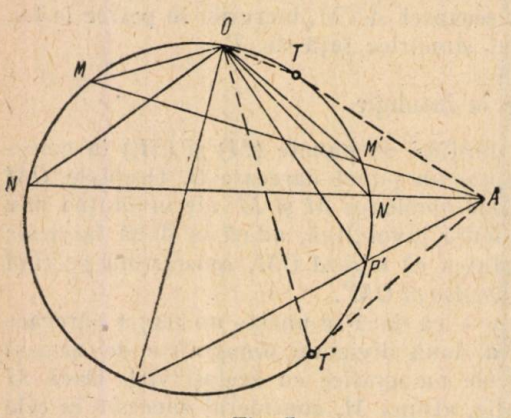


Fig. 7

13. *Razele duble* a două fascicole în involuţie pot fi sau *reale şi distincte* sau *imaginare.*

În adevăr, am găsit că involuţiile pe o dreaptă sînt de două feluri: cu *puncte duble reale* şi distincte (primul tip) şi cu puncte *duble imaginare* (al doilea tip), iar ca involuţie particulară, *simetria.*

În primul caz unind un punct oarecare O al planului cu punctele omoloage M, M' într-o involuţie pe o dreaptă (Δ), se obţin razele omoloage OM, OM', deci cînd M şi M' coincid, atunci le corespund razele duble ale fascicolului.

Se ştie însă (§ 7) că două puncte omoloage oarecare sînt conjugate faţă de punctele duble, de unde rezultă că *două raze omoloage sînt conjugate faţă de razele duble reale.* Prin urmare, pentru fascicolele de acest tip, cele două raze duble, împreună cu o pereche de raze omoloage, formează un *fascicol armonic.*

Reciproca este evidentă.

În al doilea caz, cînd punctele duble ale involuției pe (Δ) sînt imaginare, și fascicolele corespunzătoare au razele duble imaginare, oricare ar fi vîrful O comun fascicolelor.

În particular, vîrful O poate coincide cu vîrful unghiului drept care determină pe dreapta (Δ) involuția (§ 7). De aci rezultă că *două fascicole care au razele omoloage perpendiculare sînt în involuție, iar razele duble sînt imaginare.*

În sfîrșit, să considerăm pe dreapta (Δ) involuția simetrică avînd centrul (punctul dublu) în ω. Dacă M,M' sînt două puncte omoloage, atunci conjugatul lui ω față de M și M' este la infinit, deoarece ω este mijlocul lui $\overline{MM'}$. Se obțin prin urmare, două fascicole în involuție, dacă se unește un punct O al planului cu M, M'; razele duble sînt $O\omega$ și $O\infty$ (paralela prin O la Δ), iar OM, OM' sînt conjugate față de ele. Fascicolele în involuție sînt prin urmare tot de primul tip, cu raze duble reale.

Reciproc, *două fascicole în involuție, cu raze duble reale, determină pe o dreaptă* (Δ), *paralelă la una din razele duble, o simetrie al cărei centru se află la intersecția celeilalte raze duble cu* (Δ).

În particular, dacă punctul O se află pe perpendiculara dusă în ω pe (Δ), atunci *razele omoloage* OM, OM' *sînt simetrice dată de* $O\omega$. În acest caz *razele duble* $O\omega$ *și* $O\infty$ *sînt bisectoarele unghiului* MOM'.

13. *Se dă un cerc* (Γ), *un punct fix* O *pe cerc și un punct fix* A *nesituat pe cerc.* O *secantă dusă prin* A *taie cercul în* M, M'. *Cînd secanta se rotește în jurul lui* A, OM *și* OM' *formează razele a două fascicole în involuție.*

În adevăr, unui punct M îi corespunde un singur punct M' și reciproc, deci unei raze OM îi corespunde o singură rază OM' și reciproc. În plus, raza OM, în orice fascicol ar fi considerată, are ca rază omoloagă pe OM', prin urmare fascicolele sînt în involuție. Dacă A este exterior cercului, atunci se pot duce tangentele AT, AT' la cerc. OT și OT' sînt razele duble ale involuției. Dacă A este interior cercului, nu se mai pot duce tangente și involuția este cu raze duble imaginare. Dacă A este în centrul cercului, cele două fascicole au razele omoloage perpendiculare.

14. *Teorema lui Frégier. Fie* O *un punct fix al unui cerc și* OM, OM' *două raze omoloage a două fascicole în involuție* (M *și* M' *pe cerc). Cînd razele* OM, OM' *variază, dreapta* MM' *trece printr-un punct fix.*

Fie (OM, OM'), (ON, ON'), (OP, OP') trei perechi de raze omoloage, adică trei poziții succesive ale dreptelor OM, OM'. Trebuie să arătăm că dreptele MM', NN', PP' sînt concurente. Fie A punctul comun lui MM' și NN'. Presupunem că AP taie din nou cercul în P''. Conform proprietății precedente (OM, OM'), (ON, ON'), (OP, OP'') sînt perechi de raze omoloage într-o involuție; aceasta însă are două perechi de raze omoloage comune cu involuția dată, anume (OM, OM') și (ON, ON'), deci cele două involuții de fascicole coincid și ca atare $OP' \equiv OP''$. Așa dar, PP' trece prin A.

Dacă se definesc două fascicole în involuție prin două perechi de raze omoloage, cu ajutorul teoremei lui Frégier putem să construim: a) raza corespunzătoare unei raze oarecare date; *b)* razele duble, cînd acestea există.

În adevăr, ducînd un cerc arbitrar prin vîrful O comun celor două perechi de raze, acesta le mai taie în (M, M'), (N, N'). Dreptele MM', NN' se taie în A și de aci: *a)* dîndu-se o rază OP, se poate construi omoloaga ei OP'; *b)* se pot construi razele duble ca la (§ 13).

Teoremele lui Desargues

15. I. *O secantă oarecare întîlnește laturile opuse și diagonalele unui patrulater în trei perechi de puncte care aparțin aceleiași involuții.*

Fie patrulaterul $ABCD$ și transversala (Δ) care taie laturile AB, CD, BC, DA respectiv în M, M', N, N', iar diagonalele AC, BD în P, P'. Fascicolele (AB, AC, AD, AP'), (CB, CA, CD, CP') au același raport anarmonic $(BIDP')$ unde I este intersecția diagonalelor, deci ele determină pe (Δ) rapoartele anar-

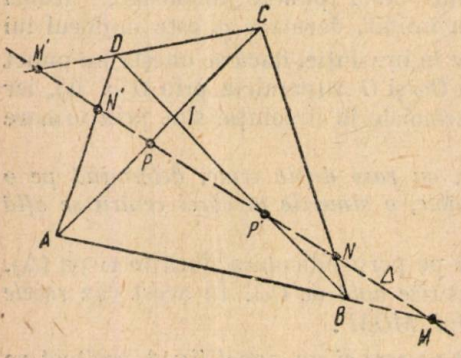


Fig. 8

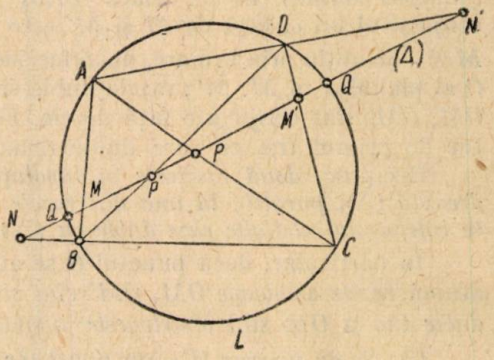


Fig. 9

monice egale $(MPN'P') = (NPM'P')$ care se mai pot scrie și sub forma $(MPN'P') = (M'P'NP)$; aceasta este condiția necesară și suficientă ca punctele (M, M'), (N, N'), (P, P') să fie în involuție pe (Δ).

II. Dacă un patrulater oarecare este înscris într-un cerc, o secantă arbitrară întîlnește laturile opuse, diagonalele și cercul în patru perechi de puncte care aparțin aceleiași involuții.

Să considerăm patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc și secanta (Δ) care taie laturile AB, CD, BC, DA, respectiv în M, M', N, N', diagonalele AC, BD în P, P' și cercul în Q, Q'.

Dacă un punct L se mișcă pe cerc, unind acest punct cu două puncte fixe, de ex. A, D, se obțin două fascicole omografice, ceeace este ușor de văzut.

Rezultă că dacă L ocupă succesiv pozițiile Q, Q', B, C, atunci cele două fascicole (AQ, AQ', AB, AC), (DQ, DQ', DB, DC) se corespund omografic și prin urmare au același raport anarmonic (v. Omografia). Ele determină pe (Δ) grupuri de patru puncte care au același raport anarmonic $(QQ'MP) = (QQ'P'M')$ sau, deoarece $(QQ'P'M') = (Q'QM'P')$, care se poate verifica direct, rezultă

$$(QQ'MP) = (Q'QM'P'),$$

condiție necesară și suficientă ca perechile de puncte (M, M'), (P, P'), (Q, Q') să fie în involuție. Din prima teoremă rezultă însă că și (N, N') aparține aceleiași involuții, deci cele patru perechi de puncte sînt în involuție pe dreapta (Δ).

Enunțăm și teoremele următoare (corelative), fără demonstrație.

Teorema III. Dacă se unește un punct oarecare din plan cu vîrfurile opuse ale unui patrulater complet, se obțin trei perechi de drepte care sînt în involuție.

Teorema IV. Dacă se unește un punct oarecare O din plan cu vîrfurile opuse ale unui patrulater complet, circumscris unui cerc, dreptele obținute,

împreună cu tangentele duse din O la cerc, formează patru perechi de drepte care aparțin la două fascicole în involuție.

16. *Aplicații.* I. *Dacă un patrulater înscris într-un cerc dat* (Γ) *se deformează astfel că trei din laturile sale trec prin trei puncte fixe în linie dreaptă, atunci și a patra latură trece printr-un punct fix, situat pe dreapta celorlalte trei.*

Aceasta este o consecință imediată a teoremei *II*, căci notînd cu (Δ) dreapta pe care sînt așezate punctele fixe M, M', N prin care trec laturile AB, CD, BC și cu P, Q intersecția dreptei (Δ) cu cercul, cele cinci puncte împreună cu N', intersecția lui (Δ) cu AD, aparțin aceleiași involuții, deci N' este fix, situat pe (Δ).

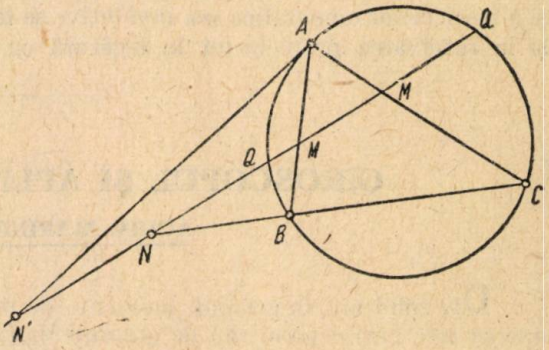


Fig. 10

Proprietatea este asemănătoare cu aceia a triunghiului în care vîrfurile se deplasează pe trei drepte concurente și două din laturi trec prin două puncte fixe (Omografia, G.M F.B.).

II. *Să se înscrie într-un cerc dat* (Γ) *un triunghi, știind că laturile sale BC, CA, AB trec prin trei puncte fixe colineare.*

Dacă în figura 9 presupunem că D se confundă cu A, atunci AD devine tangenta la cerc în A, P' se confundă cu M și M' cu P, deci obținem (fig. 10) perechile de puncte în involuție (M, M'), (N, N') și (Q, Q').

Dacă cele trei laturi au punctele fixe colineare M, M', N, dreapta MM' taie cercul în Q, Q'. Involuția este determinată prin perechile de puncte omoloage (M, M'), (Q, Q'), deci se construește N' omologul lui N (§ 8) și se duc tangentele din N' la cerc. Fie A unul din punctele de tangență; AM, AM' sînt laturile triunghiului, iar BC rezultă. Analog pentru a doua tangentă ce se poate duce din N'. Sînt două soluții.

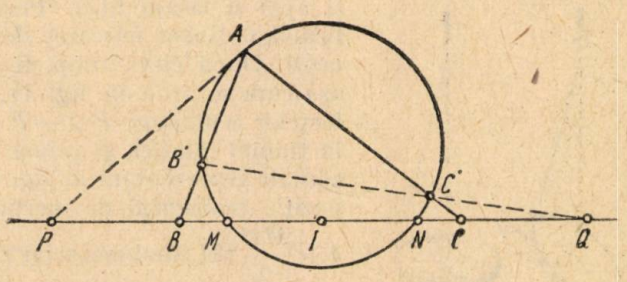


Fig. 11

III. *Se dă un cerc, o coardă MN în acest cerc și două puncte B, C simetrice față de mijlocul I al coardei MN. Un punct arbitrar A de pe cerc, unit cu B și C, determină pe cerc punctele B', C'. Să se demonstreze că dreapta B'C' și tangenta în A la cerc taie dreapta MN în două puncte simetrice față de I.*

Triunghiul $AB'C'$ poate fi privit ca un patrulater înscris în care vîrfurile A, D coincid, deci o dreaptă oarecare taie laturile opuse $(AP, B'C')$, (AB', AC')

și cercul în trei perechi de puncte care aparțin unei involuții. În cazul problemei, punctele sînt (P, Q), (B, C), (M, N), însă numai două perechi determină involuția și acestea sînt (B, C), (M, N) simetrice față de I. Involuția este deci o simetrie față de I și toate punctele omoloage sînt simetrice față de I; în particular P și Q.

În articolele privitoare la omografie și involuție s-au făcut aplicații la rezolvări de probleme, adică într-un cadru restrîns, atît cît îngăduie nivelul revistei. Este bine să informăm însă pe cititori, că teoria omografiei, involuției și a fascicolelor omografice sau involutive se folosește pe larg la studiul conicelor și la rezolvarea problemelor în legătură cu conicele.

GIROSCOPUL ȘI APLICAȚIILE SALE

ACHIM MARINESCU

UN solid are, în general, momente de inerție diferite în raport cu diferite axe ce trec prin centrul său de greutate[1]). În raport cu unul dintre aceste axe solidul are un moment de inerție maxim, iar în raport cu un ax perpendicular pe acesta, un moment de inerție minim. Aceste două axe împreună cu un al treilea ax perpendicular pe planul primelor două se numesc axe principale de inerție ale solidului, iar momentele de inerție respective se numesc momente principale de inerție.

Dacă solidul se rotește în jurul unui ax, această rotație va fi cea mai stabilă cînd axul de rotație coincide cu axul principal de inerție din direcția celui mai mare moment de inerție.

Experiența reprezentată în fig. 1, arată că un corp în rotație liberă tinde să ia poziția în care axul de rotație se află în direcția celui mai mare moment de inerție, adică ia poziția pentru care momentul său de inerție este maxim.

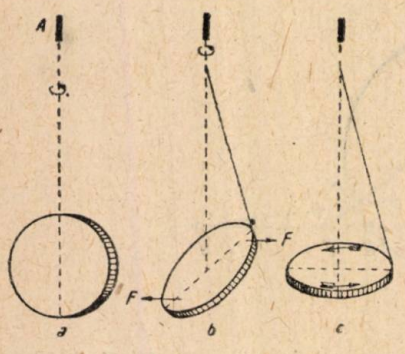


Fig. 1

Legăm un fir de ață la un disc, îl răsucim și apoi îl lăsăm liber. Prin desrăsucirea firului obținem mișcarea de rotație a discului. După cîtva timp discul se înclină, așa cum se vede în fig. 1b, sub acțiunea forțelor centrifuge F și $-F$ ce iau naștere în timpul rotației, și ajunge în poziția orizontală reprezentată în fig. 1c. În această poziție momentul de inerție este maxim: $I = \frac{Mr^2}{2}$ (M fiind masa, iar r raza discului).

Corpurile în mișcare de rotație rapidă în jurul axului principal, cu cel mai mare moment de inerție, își păstrează neschimbat axul de rotație.

Dacă aruncăm în aer un corp nu putem ști exact unde va cădea, dar dacă îi imprimăm în prealabil o mișcare de rotație, putem afla aceasta cu mult mai

---

[1]) Vezi G. M. F. (B) Nr. 2, 1154 «Despre momentul de inerție».

multă precizie. Aruncînd discul atletul îi imprimă o mişcare de rotaţie. Dacă atletul are abilitatea să arunce discul astfel încît axul de rotaţie să coincidă cu axul de simetrie, discul păstrează pe tot lungul traiectoriei aceeaşi poziţie în spaţiu, ceea ce face ca el să aibă aceeaşi suprafaţă de susţinere în aer şi să cadă la o distanţă mai mare decît atunci cînd discul ar fi fost aruncat la întîmplare.

Tăieturile filetate din ţeava armelor imprimă proiectilului o rotaţie rapidă în jurul axei sale, datorită cărui fapt el îşi păstrează direcţia invariabilă (fig. 2).

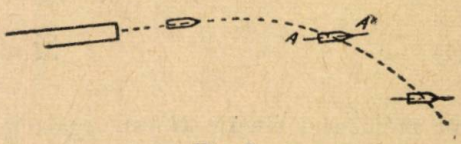


Fig. 2

Momentul forţelor care apar ca urmare a presiunii exercitate de aer pe suprafaţa inferioară AA' împiedică răsturnarea proiectilului.

Tot astfel ne explicăm dece sfîrleaza, care este un disc circular ce se roteşte repede în jurul axei sale de simetrie, se menţine în poziţie verticală, deşi centrul ei de greutate se găseşte deasupra punctului de sprijin. O asemenea sfîrleză se numeşte giroscop. Vom da denumirea generală de giroscop corpurilor simetrice care se rotesc cu viteză unghiulară mare.

Forma de giroscop întîlnită de cele mai multe ori este aceea a unui disc metalic prevăzut cu un ax, a cărui periferie se încarcă cu plumb, pentru a-i mări momentul de inerţie (fig. 3). Axul este prevăzut la un capăt cu un vîrf rotunjit de oţel cu care poate pivota într-o cuvă de agat.

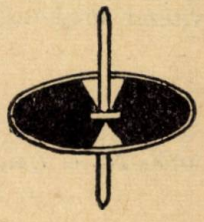


Fig. 3

Giroscopul poate avea şi o formă apropiată de aceea reprezentată în fig. 4; el este astfel construit, încît centrul său de greutate să coincidă cu punctul de sprijin O.

Pentru multe aplicaţii se foloseşte suspensia cardanică (fig. 5). În acest caz axul giroscopului se roteşte în două lagăre fixate în cercul K, care se poate roti la rîndul său în jurul diametrului orizontal BB' al cercului K_1. Inelul metalic

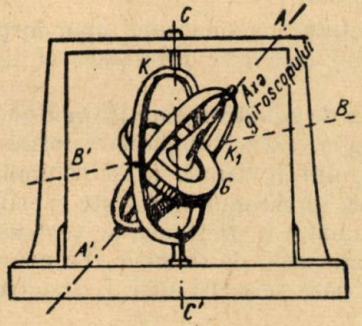


Fig. 4

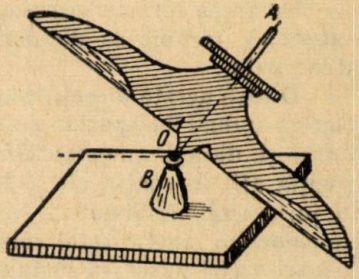


Fig. 5

K se poate roti în jurul axului vertical CC'. Se vede uşor pe fig. 5 că rotaţia este posibilă în toate planurile şi sensurile.

Fiecare dintre aceste modele, rotindu-se cu viteză unghiulară mare, cînd asupra lor nu acţionează forţe, deci momentul forţelor exterioare este egal cu zero, îşi păstrează axul de rotaţie neschimbat.

Stabilitatea rotației este cu atît mai mare cu cît momentul de inerție față de axul de simetrie și viteza unghiulară sînt mai mari.

Să cercetăm care este efectul unei forțe exterioare, deci al unui moment de rotație exterior, asupra unui giroscop care se rotește.

Se știe că variația în raport cu timpul a momentului cinetic este egală cu momentul $\vec{M}$ al forței

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta t}\ ^{2}), \tag{1}$$

iar momentul cinetic N este egal cu produsul dintre momentul de inerție I al corpului față de axa instantanee de rotație și viteza unghiulară ω, deci $N = I \cdot \omega$.

Să notăm cu M_x, M_y și M_z proiecțiile momentului forțelor exterioare pe axele de coordonate X, Y, Z, care coincid cu axele principale de inerție ale corpului, cu N_x, N_y și N_z, proiecțiile momentelor cinetice, cu I_x, I_y și I_z momentele principale de inerție și cu ω_x, ω_y și ω_z proiecțiile componentelor vitezei unghiulare instantanee. Evident, vom avea:

$$M_x = \frac{\Delta N_x}{\Delta t}, \quad M_y = \frac{\Delta N_y}{\Delta t}, \quad M_z = \frac{\Delta N_z}{\Delta t},$$

unde $N_x = I_x \omega_x$, $N_y = I_y \omega_y$, $N_z = I_z \omega_z$;

dacă $\omega_x \neq \omega_y$, $\omega_x \neq \omega_z$, $\omega_y \neq \omega_z$ și $I_x \neq I_y$, $I_x \neq I_z$, $I_y \neq I_z$,

direcția axei instantanee de rotație $\vec{\omega}$ nu coincide cu axa de simetrie și cu vectorul momentului cinetic rezultant $\vec{M}$ al corpului.

De aceea într-un giroscop care se află sub acțiunea momentului unor forțe exterioare trebuie să distingem trei direcții (axe) care trec prin punctul fix al corpului.

Dintre aceste direcții este vizibilă numai axa de simetrie, care își modifică poziția numai în spațiu, pe cînd celelalte: direcția vitezei unghiulare instantanee și direcția momentului cinetic rezultant, sînt invizibile și își schimbă poziția atît în spațiu cît și în corpul însuși. Dacă giroscopul se rotește repede în jurul axei de simetrie, vectorul vitezei unghiulare instantanee și vectorul momentului cinetic total coincid practic cu direcția axei de simetrie. Se poate urmări astfel mișcarea instantanee de rotație pe baza mișcării axei de simetrie a corpului.

În cazul unei acțiuni de scurtă durată a forțelor exterioare (în cazul unui șoc), Δt fiind foarte mic, creșterea momentului cinetic ΔN va fi de asemenea foarte mică ($\Delta N = M \Delta t$). În acest caz giroscopul reacționează printr-o mișcare perpendiculară pe cea impusă de forța exterioară și mișcarea durează atît cît acționează forța exterioară.

---

[2]) Semnul Δ arată variații foarte mici ale mărimii înaintea căreia este pus.

Să considerăm cazul cînd forţele exterioare acţionează un timp mai îndelungat. Este potrivit să folosim aparatul reprezentat în fig. 6, în care giroscopul D se poate învîrti odată cu axul său în interiorul unui inel fixat la capătul tijei metalice B. Tija se poate roti faţă de sprijinul A prin suspensia cardanică, care permite să ia orice poziţie în spaţiu. Greutatea P echilibrează sistemul. Cînd sistemul este în echilibru, momentul forţelor aplicate faţă de O este nul. Axul geometric al giroscopului păstrează în spaţiu o poziţie fixă.

Dacă deplasăm greutatea P spre dreapta sau spre stînga, giroscopul fiind în repaus, tija se apleacă într-o parte sau în alta. Dacă însă giroscopul se află în rotaţie rapidă în jurul axei sale Ox, deplasarea greutăţii P are ca efect o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară constantă în jurul axei verticale Oz. Rotaţia aceasta în jurul axului vertical Oz datorită momentului forţei exterioare se numeşte mişcare de *precesie*; ea este cunoscută şi sub denumirea de efect giroscopic.

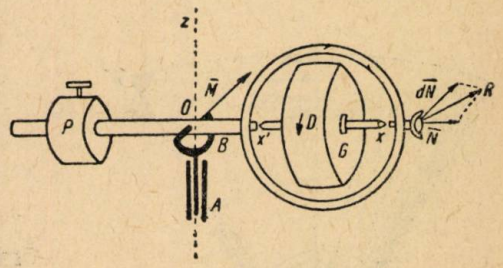


Fig. 6

Să determinăm viteza unghiulară a precesiei, adică viteza de rotaţie a axei giroscopului. Giroscopul rotindu-se cu viteza unghiulară ω constantă posedă un moment cinetic $\vec{N} = I\vec{\omega}$, reprezentat în fig. 6 prin vectorul $\vec{N}$ (I = momentul de inerţie faţă de axa de simetrie).

La apariţia momentului M al forţei active, momentul cinetic $\vec{N}$ suferă o variaţie $\Delta\vec{N}$ perpendiculară pe direcţia sa primitivă. Compunînd pe $\Delta\vec{N}$ cu $\vec{N}$, obţinem vectorul moment cinetic rezultant $\vec{R}$. Axul geometric al giroscopului tinde să ia direcţia acestui ax şi sistemul se pune în rotaţie în jurul axului său vertical Oz. Dacă axul geometric s-a rotit în timpul Δt cu unghiul $\Delta\varphi$, variaţia vectorului moment cinetic total va fi:

$$\Delta N = N\Delta\varphi$$

de unde $\frac{\Delta N}{\Delta t} = N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, unde $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \Omega$ este viteza de precesie a mişcării giroscopului.

Deoarece $M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ şi $N = I\omega$, rezultă că

$$\Omega = \frac{M}{\omega I},$$

adică viteza de precesie este proporţională cu momentul M al forţei active şi este cu atît mai mică cu cît viteza de rotaţie ω este mai mare.

Să calculăm viteza de precesie în cazul unei sfîrleze (titirez) obişnuite. Se dă titirezului (fig. 7), sprijinit vertical pe vîrful O, o rotaţie de viteză unghiulară ω în jurul axului său de simetrie. Acest ax rămîne imobil în spaţiu atîta

timp cît viteza de rotaţie păstrează o anumită valoare şi greutatea proprie este anihilată de reacţiunea ce se dezvoltă în punctul de sprijin. Se înclină giroscopul cu un unghi α. În acest caz asupra giroscopului acţionează greutatea sa $G = mg$, aplicată în centrul de greutate O, aflat la distanţa d de punctul de reazim.

Această forţă dă un moment $M = mg \sin\alpha \cdot d$ faţă de O, care caută să răstoarne sfîrleaza. Apare atunci mişcarea de precesie a axului geometric în jurul

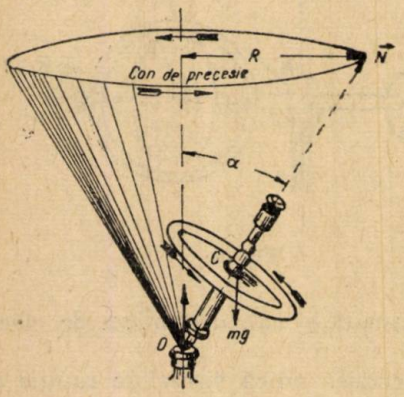


Fig. 7

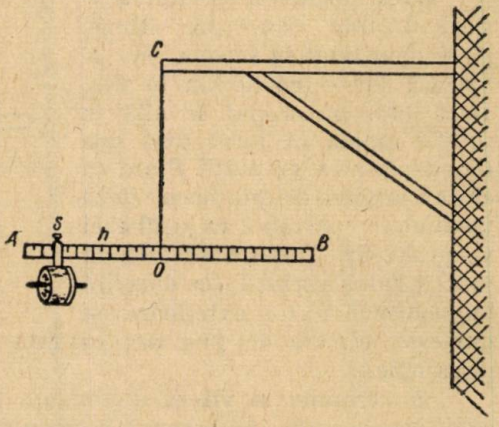


Fig. 8

axei Oz[1]). În aceste condiţii vîrful vectorului moment cinetic $\vec{N} = I\vec{\omega}$ descrie o circumferinţă de rază $R = I\omega \sin\alpha$. Se vede uşor că $\Delta N = R\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$ = unghi de precesie) iar $\frac{\Delta N}{\Delta t} = R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\Omega = I\omega \sin\alpha\,\Omega$.

Egalînd cu momentul forţei active, obţinem:

$$I\omega \sin\alpha \cdot \Omega = mg \sin\alpha \cdot d, \text{ de unde}$$

$$\Omega = \frac{mgd}{I\omega}.$$

Din această relaţie se vede că viteza de precesie este independentă de unghiul de înclinaţie a sfîrlezei, fiind cu atît mai mică, cu cît viteza unghiulară a giroscopului este mai mare.

Pentru a lămuri bine proprietăţile mişcării giroscopului, să observăm următoarea experienţă de laborator.

Se foloseşte un giroscop care se poate roti liber în jurul axei orizontale şi al celei verticale (fig. 8). Aparatul se compune dintr-o tijă AB metalică gradată, suspendată la mijloc de un fir CO fixat de o consolă. Această tijă se poate roti în jurul axelor orizontale şi verticale care trec prin mijlocul său. La un capăt al tijei se poate deplasa şi fixa cu ajutorul unui şurub S un motor mic, al cărui rotor se roteşte cu viteză mare şi constituie giroscopul propriu zis. După ce motorul a ajuns la turaţie maximă, în urma închiderii circuitului de alimentare,

---

[1]) Axul descrie un con în jurul axului vertical care trece prin O, denumit conul de precesie, iar capătul axului descrie un cerc orizontal în sensul în care se roteşte giroscopul în jurul axei sale. Se observă în acelaşi timp şi un slab tremur al axei, denumit *nutaţie*.

se aşază orizontal tija, pentru ca firul de suspensie să fie vertical şi se lasă încet giroscopul liber. El va începe să efectueze mişcarea de precesie. Să determinăm cu ajutorul cronometrului timpul unei rotaţii totale de precesie a giroscopului. Cunoscînd acest timp, determinăm viteza unghiulară de precesie $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, care corespunde momentului M creat de greutatea motorului.

Momentul $M = P \cdot h$, unde P reprezintă greutatea motorului, care este cunoscută, iar h — distanţa de la punctul de suspensie O pînă la centrul de greutate al giroscopului. Determinăm viteza de precesie Ω pentru diferite valori ale braţului h, deci ale momentului M.

În timpul funcţionării stabile a motorului (ω = const) respectăm condiţia $\frac{M}{\Omega} = \frac{M_1}{\Omega_1} = \ldots = C = \text{const}$.

Substituind pe C în relaţia $M = I\omega\Omega$ obţinem:

$$C = N = I\omega \quad , \quad \text{de unde} \quad \omega = \frac{C}{I},$$

relaţie care permite determinarea vitezei unghiulare ω a rotaţiei proprii a giroscopului

Se vede că pentru aceasta trebuie să cunoaştem şi momentul I de inerţie al giroscopului (al motorului, în cazul descris).

Pentru determinarea lui I se fixează succesiv, rotorul şi un cilindru etalon pe un fir de oţel, şi cu ajutorul cronometrului se determină perioadele oscilaţiilor de torsiune T_1 şi T_2 ale cilindrului şi motorului.

Perioada T a oscilaţiilor de torsiune este dată de formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$, în care I este momentul de inerţie al corpului, iar f modulul de torsiune al firului.

Momentul de inerţie al cilindrului etalon se stabileşte cu formula $I_0 = \frac{mr^2}{2}$. Pentru aceasta se determină prin cîntărire masa m şi se măsoară cu un şubler raza r. Scriind formula care dă perioada de oscilaţie pentru cilindru şi motoraş şi eliminînd din aceste ecuaţii pe f, obţinem:

$$I = \frac{T_2^2}{T_1^2} I_0 .$$

Aplicaţii. — Efectul giroscopic intervine într-un mare număr de fenomene şi aplicaţiile giroscopului în fizică şi în tehnică sînt foarte răspîndite şi continuă să se înmulţească mereu.

În fizica atomului, datorită efectului giroscopic s-au putut explica o serie întreagă de fenomene observate în spectrul atomului şi al moleculei.

Un exemplu de giroscop cu ax liber, asupra căruia acţionează forţe exterioare este şi Pămîntul. Pămîntul avînd forma de geoid, forţele de atracţie exercitate de Soare asupra sa dau în raport cu centrul său de greutate un moment perpendicular pe planul de simetrie definit de axul de rotaţie al Pămîntului şi centrul Soarelui. Ca şi la giroscopul în rotaţie, axul de rotaţie al Pămîntului ia o mişcare de precesie în jurul normalei la planul elipticei. Pămîntul descrie

astfel, în timp de 25 800 ani, un con al cărui vîrf are deschiderea dublă înclinării Pămîntului pe eliptică, adică 46°54′ (fig. 9 și 10).

Datorită acestei mișcări de precesie, în momentul de față axul întîlnește bolta cerească foarte aproape de steaua polară. Cu timpul altă stea îi va lua locul, deci și numele.

Aplicațiile practice ale giroscopului, din cauza tendinței lui de a menține direcția axei de rotație, sînt foarte variate în tehnica modernă; voi indica aici sumar, cîteva dintre ele.

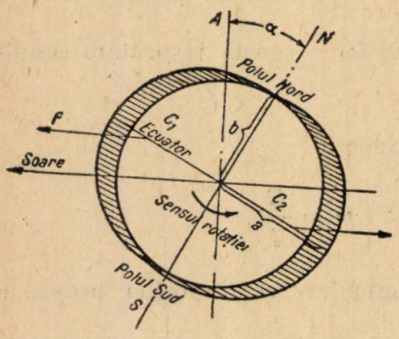


Fig. 9

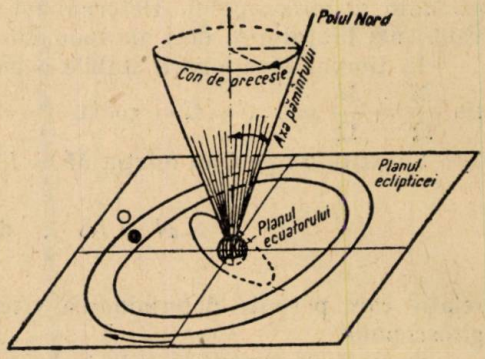


Fig. 10

Foucault a fost primul care la mijlocul secolului al XIX-lea a exprimat ideea că, cu ajutorul giroscopului nu numai că ne putem convinge de mișcarea de rotație a Pămîntului, dar a și dovedit că giroscopul poate fi folosit ca busolă și ca indicator de latitudine. Lui Foucault îi aparține și denumirea de « giroscop » formată din două cuvinte grecești, care înseamnă « rotație » și « observ ».

Efectul giroscopului găsește o largă aplicare la armele ghintuite. Filetul din țeava armelor transmite proiectilului o rotație rapidă în jurul axului și-l transformă în giroscop. Momentul forțelor care apar datorită rezistenței aerului produce numai precesia proiectilului în jurul tangentei la traiectorie și nu răsturnarea lui.

Proiectilul își păstrează în timpul mișcării axul aproximativ paralel cu viteza, adică axul coincide aproximativ cu tangenta în fiecare punct al traiectoriei. Dacă am neglija forța de frecare în aer a proiectilului, axul proiectilului și-ar păstra direcția constantă în spațiu, după cum se arată în fig. 2.

Dar forța de frecare R care acționează asupra proiectilului (fig. 11), ce se mișcă după direcția v (viteza centrului lui de greutate) nu trece prin centrul lui de greutate O. Să deplasăm pe R în centrul de greutate, ceea ce se poate face numai prin aplicarea unui cuplu al cărui moment este perpendicular pe planul figurii. Deci, axa proiectilului va executa o precesie arătată în fig. 11 prin circumferința cu săgeată, cu un unghi de precesie mic φ, adică va conserva în mod practic direcția traiectorei. Pentru ca proiectilul să nu execute precesia cu un unghi prea mare, se alege pe cale experimentală relația cea mai favorabilă între viteza de mișcare a proiectilului și viteza lui de rotație, determinată de ghintuirea țevii.

Una dintre cele mai interesante aplicații ale efectului giroscopic în tehnică este compasul giroscopic sau busola giroscopică. Ea servește ca busolă pe vasele de fier unde, din cauza acțiunii magnetice a maselor metalice consi-

derabile, întrebuinţarea unei busole magnetice ordinare devine imposibilă Busola giroscopică serveşte la determinarea direcţiei de mers a navelor marine sau aeriene şi de curînd, la menţinerea automată a direcţiei acestora ca pilot automat.

Această busolă este un giroscop cu o turaţie pînă la 25 000 rot/min, care pluteşte într-un vas cu mercur.

S-a văzut că un giroscop aflat în rotaţie rapidă şi asupra căruia nu acţionează nici o forţă, îşi păstrează neschimbată axa sa de rotaţie, care se poate aranja să coincidă de exemplu, cu direcţia Nord-Sud geografică. Dacă giroscopul are o suspensie cardanică, oricum s-ar schimba direcţia de mers a navei pe care se află, direcţia axei sale trebuie să rămînă aceiaşi.

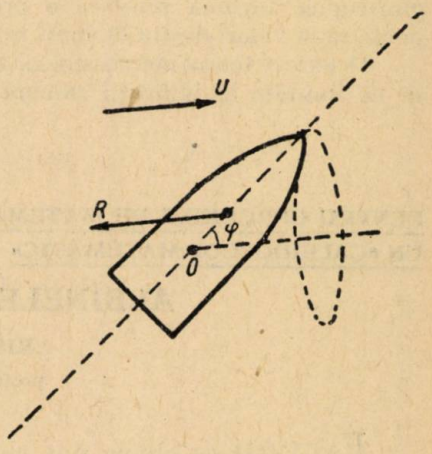


Fig. 11

Ca avantaj al folosirii compasului giroscopic este suficient să amintim că utilizarea busolei magnetice implică existenţa unei hărţi magnetice a regiunii respective, care hartă trebuie mereu modificată, deoarece declinaţia magnetică variază în timp.

Dificultatea folosirii compasului giroscopic constă în aceea că este imposibil să se realizeze un giroscop asupra căruia să nu acţioneze nici o forţă exterioară. Dispozitivul din fig. 12, permite totuşi folosirea giroscopului drept compas.

Se suspendă iniţial giroscopul astfel, încît axul aşezat orizontal să arate direcţia vest-est (poziţia *I*). În această poziţie, punctul de suspensie *O* se găseşte deasupra centrului de greutate (şi nu confundat cu el) şi pe aceeaşi verticală. Sistemul în acest caz, este în echilibru.

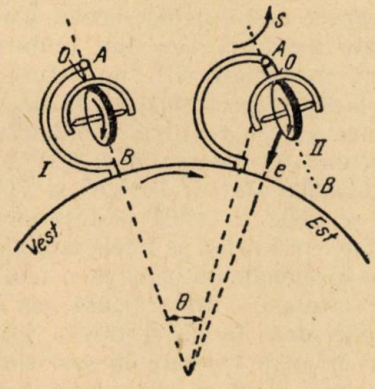


Fig. 12

Să presupunem că Pămîntul s-a rotit cu un unghi θ în jurul axei sale şi că giroscopul a ajuns în poziţia *II*. În acest caz, giroscopul căutînd să-şi menţină aceiaşi direcţie a axului său ca în poziţia *I*, face ca centrele de greutate şi de suspensie să nu se mai afle pe aceiaşi verticală. Forţa *G* dă naştere unui moment *M* faţă de punctul *O*, care va determina ca giroscopul să descrie o mişcare de precesie în jurul axului *AB* în sensul arătat de săgeata *S*. Această mişcare de precesie va continua însă, pînă cînd centrul de greutate şi de suspensie vor ajunge din nou pe aceiaşi verticală şi astfel axul giroscopului ajunge pe direcţia stabilită iniţial.

După cum se vede, acest giroscop poate să înlocuiască busola magnetică.

Giroscoapele pot fi folosite pentru atenuarea balansării vaselor. Utilizarea dispozitivelor giroscopice de atenuare a balansării pentru vase mici a dat rezultate satisfăcătoare. Utilizînd giroscoape se poate construi o cale ferată

cu o singură șină, în care stabilitatea vagonului va fi menținută printr-un giroscop în rotație; totuși, o astfel de cale ferată de tip industrial nu a fost construită încă pînă în prezent.

În numeroase alte cazuri întîlnim fenomene giroscopice. Acestea pot avea o influență dăunătoare cînd mecanismele sînt înzestrate cu părți masive care se rotesc rapid. De exemplu, la înclinarea vagonului datorită apariției forțelor giroscopice turbina produce o presiune suplimentară asupra lagărelor care poate să ia valori destul de mari pentru a le distruge.

Deoarece teoria mecanismelor giroscopice este destul de complicată a trebuit să ne limităm la indicații sumare asupra unora dintre acestea.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICI,
UN «CALEIDOSCOP MATEMATIC»

ALBINELE ȘI GEOMETRIA

KISS ELEMER,
profesor, Tg. Mureș

FAGURII de albine sînt cunoscuți de toată lumea. Oricine recunoaște că albinele sînt maiestre în construirea lor, dar puțini știu cîte probleme interesante de geometrie trebuie rezolvate pentru a ajunge la forma desăvîrșită a celulelor în care matca își depune ouăle, în care cresc larvele și unde albinele depozitează mierea.

Să analizăm modul în care albinele își construiesc fagurii și care este menirea acestei construcții interesante.

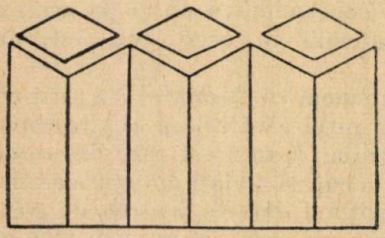


Fig. 1

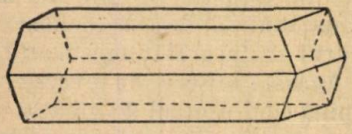


Fig. 2

1. Fagurii sînt compuși din celule. Fiecare celulă are forma unui poliedru cu șase fețe laterale trapeze dreptunghice egale. Unghiurile ascuțite ale trapezelor sînt reunite două cîte două în același vîrf, iar laturile oblice ale acelorași trapeze sînt și laturile a trei fețe rombice ale poliedrului. Romburile poliedrului au un vîrf comun (fig. 1 și 2). Unghiurile romburilor sînt de 109°28′ și 70° 32′. În fig. 1 se vede o celulă desfășurată. Dacă așezăm fețele celulelor pe fețele laterale ale unei prisme exagonale obținem ca o margine a fețelor laterale, o linie frîntă cu 6 vîrfuri, trei îndreptate în sus și trei în jos. Între cele trei vîrfuri îndreptate în sus, sînt interpuse cele trei romburi care formează fundul celulelor (fig. 2). Mai multe celule de forma arătată mai sus sînt grupate într-un rînd de faguri. Acest rînd are ca bază o față plană formată dintr-o rețea de exagoane regulate egale (fig. 4) iar fundul rîndului este compus din proeminențele alcătuite de fețele rombice ale celulelor (fig. 2). Fiecare stup este compus din grupe de cîte două rînduri de celule. Celulele din două rînduri adiacente nu sînt construite una în pre-

lungirea celeilalte, ci axa unei celule este în prelungirea muchiei comune la trei celule din celălalt rînd (fig. 3). De exemplu, dacă introducem cîte un ac prin cele trei romburi care formează fundul unei celule şi după aceia rotim fagurele, atunci vom întîlni cele trei ace în trei celule învecinate. Să vedem acum, menirea acestei construcţii.

2. Prin faptul că bazele celulelor au forma exagonală, albinele au făcut o economie de ceară şi de spaţiu. Orice altă formă poligonală regulată pentru aceste celule, afară de triunghiul echilateral, pătrat sau exagon, n-ar putea duce la o construcţie a celulelor fără pierdere de spaţiu datorită golurilor care ar fi trebuit să rămînă între feţele lor. (A se vedea «Caleidoscopul matematic», G.M.F.-B 6/1955.) A rămas forma exagonală, deoarece triunghiul şi pătratul ar fi produs o pierdere prea mare de spaţiu în unghiurile dintre feţele prismelor (fig. 4) datorită faptului că larvele au formă cilindrică. În afară de acest fapt, pe o suprafaţă pe care încap 1000 pătrate putem aşeza în acelaşi timp, 1154 de exagoane regulate cu aceeaşi «lărgime» (fig. 5). Demonstrarea acestui fapt se face uşor, deoarece dacă notăm aria unui exagon regulat cu S_6, iar aria unui pătrat cu aceiaşi «lărgime» cu S_4, putem scrie aproximativ:

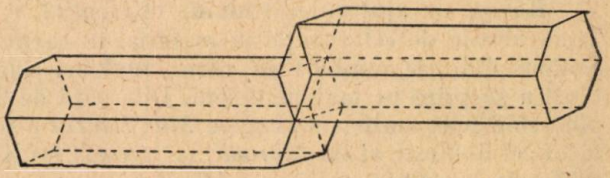


Fig. 3

$$S_6 : S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$$

sau

$$1000\ S_6 \approx 866\ S_4,$$

adică $1154\ S_6 \sim 1000\ S_4$.

În afară de aceste avantaje ştim că forma exagonală acumulează mai multă căldură (ceea ce este foarte important la albine, mai ales iarna) şi, ceea ceare mai multă importanţă, este faptul că reţeaua exagonală este cea mai rezistentă.

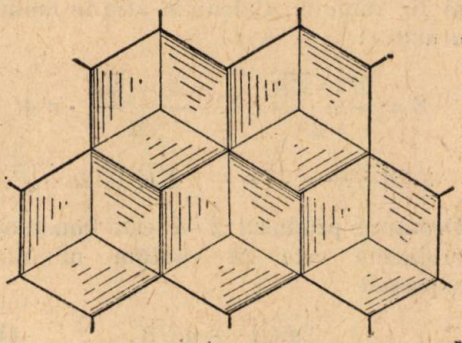


Fig. 4

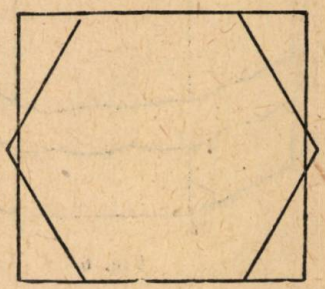


Fig. 5

3. În zadar ar fi fost construită baza poliedrului aşa de frumos dacă construcţia fundului ar fi fost greşită. Aici s-a rezolvat o problemă mult mai grea, pentru a economisi cît mai mult spaţiu, ceară şi muncă.

Pentru prima dată celulele albinelor au fost examinate de către *Maraldi*, astronom francez, în anul 1712. El a găsit că unghiurile romburilor care formează fundul celulelor sînt de 109°28′ şi de 70°32′. Réaumur, presupunînd că la construcţia fundului scopul principal este economia de ceară, a propus vestitului matematician german *Kőnig*, următoarea problemă fără să cunoască rezultatele obţinute de către *Maraldi*:

« În ce mod trebuie construit fundul necunoscut al unui poliedru cu o bază exagonală regulată, avînd o capacitate dată, din cît mai puţin material ?»

Kőnig, cu ajutorul calculului diferenţial, a ajuns la rezultatul următor: avem nevoie de cel mai puţin material în cazul cînd fundul poliedrului este compus din trei romburi ale căror unghiuri sînt de 109°26′ şi 70°34′. Rezultatul a surprins pe matematicieni. Diferenţa de 2 minute a fost mult căutată, pînă cînd matematicianul englez *Mac Laurin* a reuşit să arate (1743) că rezultatul cel bun este al lui *Maraldi*, iar greşala lui König rezultă din inexactitatea tablei de logaritmi pe care a folosit-o.

4. Să urmărim raţionamentul lui *Mac Laurin* în rezolvarea problemei cu ajutorul geometriei elementare:

Fie S vîrful comun celor trei romburi care alcătuiesc fundul, iar c latura lor (fig. 6). Să intersectăm poliedrul cu un plan perpendicular pe axa lui în aşa fel, încît planul să treacă prin vîrful A al rombului $ABCS$. Fie a latura exagonului găsit şi O centrul lui care este totodată şi proiecţia punctului S pe acest plan. Să unim punctele A şi C şi punctele K şi O. Un plan oarecare ce trece prin dreapta AC intersectînd planul $TABU$, $UBCV$, SOC, ASO determină rombul $AGCG'$. Notăm $\overline{AT} = l$ şi $\overline{AP} = d$.

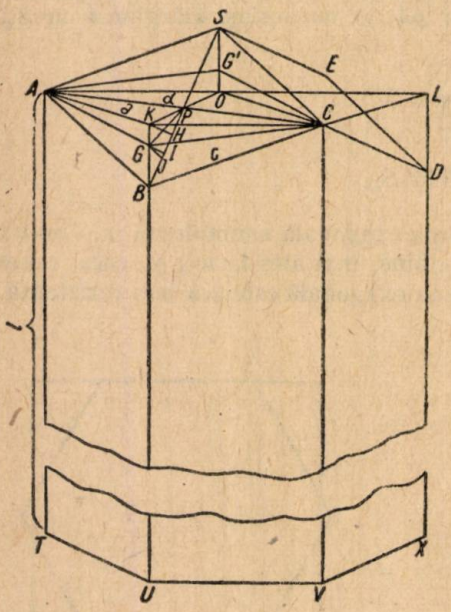


Fig. 6

Examinînd numai o treime din fund, trebuie să găsim acea poziţie a planului $AGCG'$ în aşa fel ca suma:

Aria $TAGU$ + aria $UGCV$ + aria $AG'CG$

să fie minimă. Calculăm aria în modul următor:

$$S = \frac{2l - \overline{GK}}{2} \cdot a + \frac{2l - \overline{GK}}{2} \cdot a +$$

$$+ 2d \cdot \overline{GP} = 2la - a \cdot \overline{GK} + 2d \cdot \overline{GP}.$$

Deoarece produsul $2la$ este constant, problema este să căutăm minimul expresiei

$$2d.\overline{GP} - a.\overline{GK}. \qquad (1)$$

Pentru aceasta luăm punctul B pe dreapta UK în aşa fel ca:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{a}{2d}. \qquad (2)$$

Din punctul P (intersecția dreptelor AC și KO) ca centru, în planul BKF descriem un arc de cerc cu raza PG care intersectează dreapta PB în punctul J. Fie, $KH \perp BP$ și $GI \perp BP$. Din triunghiurile asemenea BIG, KHB și BKP, luînd în considerație relația (2), deducem:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{a}{2d}$$

de unde,

$$\frac{\overline{BH} - \overline{BI}}{\overline{BK} - \overline{BG}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{GK}} = \frac{a}{2d} \quad \text{sau} \quad a.\overline{GK} = 2d.\overline{IH}.$$

Acum, relația (1) se poate scrie în felul următor:

$$2d \cdot \overline{GP} - 2d \cdot \overline{IH} = 2d\,(\overline{GP} - \overline{IH}) = 2d\,(\overline{JI} + \overline{HP});$$

unde d și $\overline{HP}$ sînt constante. $\overline{JI}$ are o valoare minimă cînd $\overline{JI} = 0$, adică atunci cînd punctele J și I se confundă, ceea ce înseamnă că punctul G coincide cu punctul B. Deci, ca suma ariilor $TAGU$, $UGCV$ și $AG'CG$ să fie minimă e necesar ca planul GAC să treacă prin punctul B pe care-l determină relația (2). În felul acesta am găsit cum trebuie construit fundul unui poliedru cu baza exagonală regulată, astfel ca aria totală a poliedrului găsit să fie minimă! Tocmai în felul acesta construiesc și albinele celulele lor.

5. Problema se poate rezolva și pe altă cale, dacă exprimăm aria totală a poliedrului care se compune din șase trapeze și trei romburi în funcție de $SO = x$. În acest caz, aria totală este

$$S = 3a\,(2l - x) + 3a\sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}.$$

Trebuie căutat minimul acestei funcții. Acest minim se găsește cu ajutorul calculului diferențial, el are loc în cazul cînd

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Rezultatul este același ca și cel precedent.

6. Să calculăm acum, unghiurile romburilor care formează fundul celulelor. Din triunghiul dreptunghic BKP găsim

$$\overline{BP}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KP}^2.$$

Deoarece $\overline{BK} = \overline{BP} \cdot \frac{a}{2d}$ (relația (2)) și $\overline{KP} = \frac{\overline{KO}}{2} = \frac{a}{2}$, găsim

$$\overline{BP} = \frac{ad}{\sqrt{4d^2 - a^2}},$$

dar $\overline{AP} = d$, deci

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sqrt{4d^2 - a^2}}{a}. \qquad (3)$$

Distanța d este jumătatea laturii AC care în același timp este și latura triunghiului echilateral înscris în cercul cu raza a:

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Introducînd această valoare în relația (3) găsim $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \sqrt{2}$. Deci, diagonala mare a rombului $ABCS$ este în același timp și diagonala patratului construit pe diagonala mai mică a rombului. Valoarea lui $\overline{BP}$ este $\overline{BP} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Raportul $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ este egal cu tg $(\widehat{ABP})$, adică tg $(\widehat{ABP}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \sqrt{2}$, de unde $\widehat{ABP} = 54°44'8''$, adică $\widehat{ABC} = 109°28'16''$ și $\widehat{BAS} = 70°31'44''$. Acestea sînt unghiurile pe care le-a găsit și *Maraldi*.

7. Nu e greu de arătat un lucru interesant: volumul poliedrului nu se schimbă cînd planul $AG'CG$ se mișcă. Propunem cititorilor să demonstreze acest lucru.

8. Acum putem calcula și economia pe care o realizează albinele prin forma pe care o dau celulelor. În acest scop, calculăm aria totală a unei celule cu fundul plat (S_1) și aria totală a unei celule pe care o construiesc albinele, adică la care vîrful se termină cu corpul avînd ca fețe laterale cele 3 romburi (S_2).

Dacă măsurăm dimensiunile celulelor observăm că $l = \frac{25a}{6}$ ($a = 2{,}797$ mm, iar valoarea lui l este între 11,5 mm și 12,5 mm). Putem scrie:

$$S_1 = 6 \cdot \frac{25a^2}{6} + \frac{6a \cdot a\sqrt{3}}{4} = 25a^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{3}) \approx \frac{a^2}{2} \cdot 55{,}1963$$

și

$$S_2 = \frac{6(2l - \overline{BK})a}{2} + 3 \cdot \overline{BP} \cdot 2d = 3\left(\frac{50a}{6} - \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)a +$$

$$+ 6\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{2}) \approx \frac{a^2}{2} \cdot 54{,}2426.$$

Raportul celor două arii este

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{50 + 3\sqrt{2}}{50 + 3\sqrt{3}}$$

care corespunde raportului numerelor 54 și 55, ceea ce înseamnă că albinele realizează la fiecare 55 celule o economie de 1 celulă.

9. Problema tratată mai sus este foarte interesantă pentru că rezultatele calculului teoretic corespund în mod uimitor cu măsurătorile de precizie executate asupra celulelor fagurilor de miere.

În natură se mai găsesc multe forme regulate geometrice. Cercul, spirala logaritmică, elicea şi spirala desfăşurată în spaţiu sînt curbele cele mai întîlnite în lumea vie. Le găsim de exemplu, în construcţia cochiliilor de foraminifere, scoici, melci, la construcţia unor organe (urechea internă, coarne) sau a unor organisme microscopice; în mişcarea de agăţare a plantelor etc.

Ele nu trebuiesc însă privite ca simple curiozităţi sau ca opere de artă ale vieţii, ci ca materializări ale unor legi care conduc procesele generatoare de forme. Oricît de perfectă este construcţia albinelor ea este departe de munca omului. Aşa cum scrie *Marx*: « Păianjenul face operaţii care seamănă cu cele ale ţesătorului, iar albina prin construcţia celulelor ei de ceară, face de ruşine pe mulţi arhitecţi din rîndul oamenilor. Ceea ce distinge însă din capul locului pe cel mai prost arhitect de albina cea mai perfectă este faptul că el a construit celula în capul său înainte de a o construi din ceară ».

NOTE MATEMATICE

2. Asupra problemei 1925

Soluţia problemei 1925 dată la admiterea în Institutul politehnic din Cluj, în august 1955, a mai fost dată în G.M.F., seria B, nr. 10, 1956.

In enunţul problemei înlocuim $\cos\varphi = \alpha$, $-\sin\varphi = \beta$, $\sin\varphi = \gamma$ şi $\cos\varphi = \delta$ şi obţinem:

$$A_1 = \alpha^2 A + \alpha\gamma B + \gamma^2 C,$$
$$B_1 = 2\alpha\beta A + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, B + 2\gamma\delta C,$$
$$C_1 = \beta^2 A + \gamma\delta B + \delta^2 C.$$

Să arătăm că $B_1^2 - 4A_1C_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (B^2 - 4AC)$.

Ecuaţia $A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0$ devine

$$A(\alpha x + \beta)^2 + B(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) + C(\gamma x + \delta)^2 = 0.$$

Împărţind cu $(\gamma x + \delta)^2$ şi notînd $\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = y$ avem:

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

Discriminanţii celor două ecuaţii,

$$B^2 - 4AC \quad \text{şi} \quad B_1^2 - 4A_1C_1$$

sînt de acelaşi semn, ştiindu-se că rădăcinile lor sînt de aceiaşi natură.

În particular, pentru $A = C = 0$, $B = 1$, avem:

$$A_1 = \alpha\gamma; \quad B_1 = \alpha\delta + \beta\gamma; \quad C_1 = \beta\delta.$$

Deci, $B_1^2 - 4A_1C_1 = (\alpha\delta - \beta\delta)^2$, iar $B^2 - 4AC = 1$.

Relaţia $B_1^2 - 4A_1C_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (B^2 - 4AC)$ este verificată.

Ţinînd seamă de notaţiile făcute, avem $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

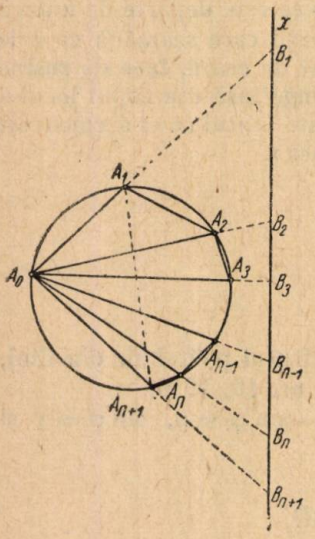
Marius Stoka, Bucureşti

N o t ă. În rezolvarea problemei 1925 din G.M.F. — B, p. 538/1956, s-a arătat că există relaţia $B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$, fără a face particularizarea $A = C = 0$ şi $B = 1$, făcută mai sus.

3. O generalizare a teoremei lui Ptolomeu

Între laturile şi diagonalele unui poligon înscris într-un cerc există relaţia

$$\frac{\overline{A_1A_{n+1}}}{\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_0A_{n+1}}}=\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_0A_1}\cdot\overline{A_0A_2}}+\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_0A_2}\cdot\overline{A_0A_3}}+\ldots+\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{A_0A_n}\cdot\overline{A_0A_{n+1}}}.$$



Să considerăm poligonul $A_0A_1\ldots A_nA_{n+1}$ înscris în cercul O. Din punctul B_1 situat pe prelungirea laturii AA_1 ducem dreapta xy astfel ca unghiul A_0B_1y să fie egal cu unghiul $A_0A_2A_1$.

Prelungim dreptele A_0A_i $(i=1,2,\ldots,n,n+1)$ pînă intersectează dreapta xy respectiv în punctele B $(i=1,2,\ldots,n,n+1)$.

Triunghiurile $A_0A_1A_2$ şi $A_0B_1B_2$ sînt asemenea avînd unghiul $A_1A_0A_2$ comun, iar $\widehat{A_0A_2A_1}=\widehat{A_0B_1y}$ prin construcţie.

Triunghiurile $A_0A_iA_{i+1}$ şi $A_0B_iB_{i+1}$ sînt asemenea avînd unghiul $A_iA_0A_{i+1}$ comun, iar unghiul $A_0A_{i+1}A_i$ egal cu unghiul $A_0B_iB_{i+1}$ fiindcă ele sînt suplimentare unghiurilor egale $A_0A_{i-1}A_i$ şi $A_0B_iB_{i-1}$ $(i=2,3,\ldots,n)$.

Să scriem proporţionalitatea laturilor:

$$(1)\qquad \frac{\overline{A_iA_{i+1}}}{\overline{B_iB_{i+1}}}=\frac{\overline{A_0A_i}}{\overline{A_0B_{i+1}}}=\frac{\overline{A_0A_{i+1}}}{\overline{A_0B_i}}\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Din ultimele două rapoarte deducem:

$$\overline{A_0A_i}\cdot\overline{A_0B_i}=\overline{A_0A_{i+1}}\cdot\overline{A_0B_{i+1}}=k.$$

Deci:

$$(2)\qquad \overline{A_0B_{i+1}}=\frac{k}{\overline{A_0A_{i+1}}}$$ (vezi nota G.M.F.B nr. 2).

Din primele două rapoarte ale relaţiei (1) deducem:

$$\overline{B_iB_{i+1}}=\frac{\overline{A_iA_{i+1}}\cdot\overline{A_0B_{i+1}}}{\overline{A_0A_i}}.$$

În baza relaţiei (2) putem scrie

$$(3)\qquad \overline{B_iB_{i+1}}=k\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+1}}}{\overline{A_0A_i}\cdot\overline{A_0A_{i+1}}}.$$

Triunghiurile $A_0A_1A_{n+1}$ şi $A_0B_1B_{n+1}$ sînt şi ele asemenea avînd unghiul $A_1A_0A_{n+1}$ comun, iar $\sphericalangle A_0A_{n+1}A_1=\sphericalangle A_0B_1B_{n+1}$ deoarece $\sphericalangle A_0B_1B_{n+1}=\sphericalangle A_0A_2A_1$ şi $\sphericalangle A_0A_2A_1=\sphericalangle A_0A_{n+1}A_1$ avînd aceeaşi măsură. Deci:

$$\frac{B_1B_{n+1}}{A_1A_{n+1}}=\frac{A_0B_{n+1}}{A_0A_1},\ \text{de unde}\ \overline{B_1B_{n+1}}=\frac{A_1A_{n+1}\cdot A_0B_{n+1}}{A_0A_1}.$$

În virtutea relației (2) putem scrie:

$$(4) \qquad \overline{B_1B_{n+1}} = k \frac{\overline{A_1A_{n+1}}}{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_{n+1}}}.$$

Dar $B_1B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+1} =$

$$= k\left[\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}} + \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3}} + \ldots + \frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{A_0A_n} \cdot \overline{A_0A_{n+1}}}\right].$$

Comparînd relațiile (4) și (5) obținem:

$$\frac{\overline{A_1A_{n+1}}}{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_{n+1}}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}} + \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3}} + \ldots + \frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{A_0A_n} \cdot \overline{A_0A_{n+1}}}.$$

În cazul particular $A_4 = A_i\,(i = 5, 6, \ldots, n, n+1)$ se obține bine cunoscuta teoremă a lui Ptolomeu

$$\overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_2A_4} = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} + \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_4A_1}.$$

Gh. I. Stoian, student, București

4. O însumare prin recurență

Să calculăm suma:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f(n, i) = F(n),$$

unde i ia n valori întregi de la 0 la $n-1$.

În funcția $f(n, i)$ constanta n este legată de limita superioară a simbolului $\sum_{i=0}^{n-1}$. Această legătură complică foarte mult efectuarea sumei, căci:

pentru $n = k - 1$ avem

$$\sum_{i=0}^{k-2} f(k-1, i) = \sum_{i=0}^{k-3} f(k-1, i) + f(k-1, k-2),$$

pentru $n = k$ avem

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(k, i) = \sum_{i=0}^{k-2} f(k, i) + f(k, k-1).$$

Observăm că $\sum_{i=0}^{k-2} f(k-1, i)$ diferă de $\sum_{i=0}^{k-2} f(k, i)$ și deci nu se poate realiza o formulă de recurență pentru a putea găsi suma $F(n)$.

Pentru a putea înlătura acest inconvenient înlocuim funcția $f(n, i)$ prin funcția $f(m, i)$, unde m este o constantă independentă de n din limita superioară a simbolului $\sum_{i=0}^{n-1}$ și atunci identitatea (1) devine:

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f(m, i) = \Phi(m, n).$$

$\Phi(m, n)$ se va obține făcînd suma termenilor din membrul întîi din (2). Pentru a obține $\Phi(m, n)$ vom arăta că putem obține o formulă de recurență. Într-adevăr, avem relațiile de recurență: pentru $n = k - 1$:

$$\sum_{i=0}^{k-2} f(m, i) = \sum_{i=0}^{k-3} f(m, i) + f(m, k-2),$$

pentru $n = k$

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(m, i) = \sum_{i=0}^{k-2} f(m, i) + f(m, k-1).$$

Dacă vom reuși să calculăm suma (2), atunci suma (1) se va obține din (2) făcînd $m = n$.

Aplicație. — Să arătăm că avem:

$$\frac{k^2}{k^2 + k^4} + \frac{k^2 - 2 \cdot 1}{k^2 + [k^2 + 2 \cdot 1]^2} + \frac{k^2 - 3 \cdot 2}{k^2 + [k^2 + 3 \cdot 2]^2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{k^2 - k(k-1)}{k^2 + [k^2 + k(k-1)]^2} = \frac{1}{2k},$$

unde k este număr întreg. Observăm că această relație se poate obține din formula:

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 - (i+1)i}{n^2 + [n^2 + (i+1)i]^2} = \frac{1}{2n},$$

făcînd $n = k$. Notînd cu E_n membrul I al formulei (3) avem:

$$E_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 - (i+1)i}{n^2 + [n^2 + (i+1)i]^2}.$$

Făcînd succesiv $n = 1, 2, 3, \ldots$ obținem:

$$n = 1; \quad E_1 = \frac{1^2}{1^2 + 1^4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 1},$$

$$n=2; \quad E_2 = \frac{2^2}{2^2 + 2^2} + \frac{2^2 - 2}{2^2 + [2^2 + 2]^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{4+36} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 2},$$

$$n=3; \quad E_3 = \frac{3^2}{3^2 + 3^4} + \frac{3^2 - 2}{3^2 + [3^2 + 2]^2} + \frac{3^2 - 6}{3^2 + [3^2 + 6]^2} =$$

$$= \frac{1}{1+9} + \frac{7}{9 + 11^2} + \frac{3}{9 + 15^2} = \frac{1}{10} + \frac{7}{130} + \frac{3}{234} =$$

$$= \frac{13 + 7}{130} + \frac{3}{234} = \frac{20}{130} + \frac{3}{234} = \frac{2}{13} + \frac{3}{234} =$$

$$= \frac{2}{13} + \frac{1}{78} = \frac{156 + 13}{13 \times 78} = \frac{169}{1014} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3},$$

adică tocmai valoarea membrului II al relației (3) pentru $n = 1, 2, 3$.

Pentru $n = k$ urmează să avem:

$$E_k = \frac{k^2}{k^2 + k^4} + \frac{k^2 - 2 \cdot 1}{k^2 + [k^2 + 2 \cdot 1]^2} + \frac{k^2 - 3 \cdot 2}{k^2 + [k^2 + 3 \cdot 2]^2} + \cdots$$

$$+ \frac{k^2 - k(k-1)}{k^2 + [k^2 + k(k-1)]^2} = \frac{1}{2k},$$

adică tocmai identitatea cerută.

Vom arăta că:

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m^2 - (i+1)i}{m^2 + [m^2 + (i+1)i]^2} = \frac{n}{m^2 + n^2},$$

unde m este independent de n. Membrul II se obţine făcînd suma termenilor din membrul I.

Observăm că pentru $m = n$ obţinem tocmai identitatea (3) ca un caz particular. Notînd membrul I al relaţiei (4) prin

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m^2 - (i+1)i}{m^2 + [m^2 + (i+1)i]^2}$$

avem succesiv, făcînd $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$n = 1; \quad \xi_1 = \frac{m^2}{m^2 + m^4} = \frac{1}{m^2 + 1},$$

$$n = 2; \quad \xi_2 = \frac{1}{m^2 + 1} + \frac{m^2 - 2}{m^2 + (m^2 + 2)^2} = \frac{1}{m^2 + 1} + \frac{m^2 - 2}{m^4 + 5m^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{m^2 + 1} + \frac{m^2 - 2}{(m^2 + 1)(m^2 + 4)} = \frac{m^2 + 4 + m^2 - 2}{(m^2 + 1)(m^2 + 4)} =$$

$$= \frac{2(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)(m^2 + 4)} = \frac{2}{m^2 + 4},$$

$$n = 3; \quad \xi_3 = \frac{2}{m^2 + 4} + \frac{m^2 - 6}{m^2 + [m^2 + 6]^2} = \frac{2}{m^2 + 4} + \frac{m^2 - 6}{m^4 + 13m^2 + 36} =$$

$$= \frac{2}{m^2 + 4} + \frac{m^2 - 6}{(m^2 + 4)(m^2 + 9)} = \frac{2(m^2 + 9) + m^2 - 6}{(m^2 + 4)(m^2 + 9)} =$$

$$= \frac{3(m^2 + 4)}{(m^2 + 4)(m^2 + 9)} = \frac{3}{m^2 + 9}.$$

Observăm că ξ_i este de forma $\xi_i = \frac{i}{m^2 + i^2}$. Pentru a dovedi aceasta presupunem adevărată

$$\xi_{n-1} = \frac{n-1}{m^2 + (n-1)^2}$$

și calculăm pe ξ_n. Vom avea:

$$\xi_n = \frac{n-1}{m^2+(n-1)^2} + \frac{m^2-(n-1)}{m+[m^2+n(n-1)^2]} = \frac{n-1}{m^2+(n-1)^2} +$$

$$+ \frac{m^2-n(n-1)}{[m^2+(n-1)^2][m^2+n^2]} = \frac{(n-1)(m^2+n^2)+m^2-n(n-1)}{[m^2+(n-1)^2][m^2+n^2]} =$$

$$= \frac{nm^2+(n-1)n^2-n(n-1)}{[m^2+(n-1)^2][m^2+n^2]} = \frac{n[m^2+(n-1)^2]}{[m^2+(n-1)^2][m^2+n^2]} = \frac{n}{m^2+n^2}.$$

Deci avem:

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m^2-(i+1)i}{m^2+[m^2+(i+1)i]^2} = \frac{n}{m^2+n^2}.$$

Am demonstrat relația (4) și în același timp și relația (3) care este un caz particular.

Corolar. În identitatea $n\frac{n}{m^2+n^2} + m\frac{m}{n^2+m^2} = 1$, înlocuind expresiile $\frac{n}{m^2+n^2}$ și $\frac{m}{n^2+m^2}$ cu echivalentele lor din relația (4), găsim identitatea

$$n\sum_{i=0}^{n-1} \frac{m^2-(i+1)i}{m^2+[m^2+(i+1)i]^2} + m\sum_{i=0}^{m-1} \frac{n^2-(i+1)i}{n^2+[n^2+(i+1)i]^2} = 1,$$

unde m și n sînt numere întregi.

Ing. Florea Nedelcu

5. Relații între bisectoare și laturi într-un triunghi

Fie l_a $(\overline{AD})$ și $l'_a(\overline{AE})$ respectiv bisectoarea interioară și exterioară a unghiului A.

Din aplicarea teoremei bisectoarei, notînd $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ și $\overline{BC}=a$, obținem:

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{DB} = \dfrac{ac}{b+c}\ ; & \overline{CD} = \dfrac{ab}{b+c}\ ; \\ \overline{BE} = \dfrac{ac}{b-c}\ ; & \overline{CE} = \dfrac{ab}{b-c}\ , \end{cases}$$

iar $\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{CE} = \dfrac{2abc}{(b+c)(b-c)}$.

Din triunghiul ADE ($\sphericalangle DAE = 90°$), avem:

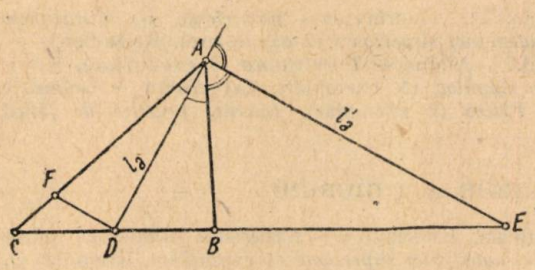
$$(2) \qquad l_a^2 + l_a'^2 = \overline{DE}^2\ , \quad l_a^2 + l_a'^2 = \left(\frac{2abc}{(b+c)(b-c)}\right)^2.$$

Ducem $\overline{DF}$ paralelă cu $\overline{AE}$ şi aplicînd teorema lui Thales obţinem:

$$\frac{\overline{FD}}{l'_a} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}. \tag{3}$$

Cum:

$$\frac{b}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}$$



şi ţinînd seamă de relaţiile (1):

$$\frac{b}{\overline{FA}} = \frac{b+c}{2c}; \quad \overline{FA} = \frac{2bc}{b+c},$$

iar din triunghiul dreptunghic DAF avem:

$$\overline{FD}^2 = \left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2 - l_a^2.$$

Mai ţinînd seamă de relaţiile (1), rezultă că prin ridicarea la patrat a relaţiei (3) şi făcînd substituţiile, obţinem:

$$\frac{4b^2c^2}{(b-c)^2} - l_a^2 = l_a'^2\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2. \tag{4}$$

Relaţiile (2) şi (4) dau sistemul cu cele două necunoscute (l_a şi l'_a).

Rezolvînd acest sistem obţinem relaţiile cunoscute între bisectoare şi laturile triunghiului:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)},$$

$$l'_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Zigulescu Marin, Student Bucureşti

CĂRŢILE ACORDATE BIBLIOTECILOR ŞCOLILOR MEDII PREMIATE

în cadrul întrecerii pe ţară între cercurile de matematică şi fizică pe anul 1956, conform rezultatelor publicate în G.M.F. seria B nr. 11, pag. 585 din noiembrie 1956

I. ŞCOALA MEDIE «I. L. CARAGIALE» PLOEŞTI

Pentcovski — *Nomograme* (3 exemplare), Kudriavţev — *Experienţe simple cu ultrasunete* (3 exemplare), Kreindler O. — *Curs de matematici superioare* (2 exemplare), Kreindler O. — *Elemente de calcul vectorial* (3 exemplare), Vinogradov — *Bazele teoriei numerelor* (1 exemplar), I. Andrei — *Televiziunea* (5 exemplare), Kitaigorodski — *Ordine şi dezordine în lumea atomilor* (2 exemplare), Cetveruhin — *Geometrie proiectivă* (2 exemplare), Perischa ş.a. — *Fizica* (1 exemplar), *Lucrări practice de fizică* (2 exemplare).

II. ŞCOALA MEDIE nr. 4 «AUREL VLAICU» BUCUREŞTI

Pentcovski — *Nomograme* (2 exemplare), Kudriavţev — *Experienţe simple cu ultrasunete* (2 exemplare), Kreindler O. — *Curs de matematici superioare* (2 exemplare), Kreindler O. *Elemente de calcul vectorial* (3 exemplare), Vinogradov — *Bazele teoriei numerelor* (1 exemplar), I. Andrei — *Televiziunea* (3 exemplare), Kitaigorodski — *Ordine şi dezordine în lumea atomilor* (1 exemplar), Cetveruhin — *Geometrie proiectivă* (2 exemplare), Perischa ş. a. — *Fizica* (1 exemplar).

III. ŞCOALA MEDIE nr. 1 RÎMNICU VÎLCEA

Pentkovski — *Nomograme* (1 exemplar), Kudriavţev — *Experienţe cu ultrasunete* (1 exemplar), Kreindler O. — *Curs de matematici superioare* (2 exemplare), Kreindler O. — *Elemente de calcul vectorial* (2 exemplare), I. Andrei — *Televiziunea* (3 exemplare), Kitaigorodski — *Ordine şi dezordine în lumea atomilor* (1 exemplar), Cetveruhin — *Geometrie proiectivă* (1 exemplar), Perischa ş.a. — *Fizica* (1 exemplar), *Lucrări practice de fizică* (1 exemplar).

IV. ŞCOALA MEDIE nr. 1 GIURGIU

Pentkovski — *Nomograme* (1 exemplar), Kudriavţev — *Experienţe simple cu ultrasunete* (1 exemplar), Kreindler O. *Curs de matematici superioare* (1 exemplar), Kreindler O. *Elemente de calcul vectorial* (1 exemplar), I. Andrei — *Televiziunea* (3 exemplare), Kitaigorodski — *Ordine şi dezordine în lumea atomilor* (1 exemplar), Cetveruhin — *Geometrie proiectivă* (1 exemplar), Perischa ş.a. — *Fizica* (1 exemplar), *Lucrări practice de fizică* (1 exemplar).

V. ŞCOALA MEDIE nr. 1 ORAŞUL STALIN

Pentcovski — *Nomograme* (1 exemplar), Kudriavţev — *Experienţe simple cu ultrasunete* (1 exemplar), Kreindler O. *Curs de matematici superioare* (1 exemplar), I. Andrei — *Televiziunea* (1 exemplar) Cetveruhin — *Geometrie proiectivă* (1 exemplar), Kreindler. O. — *Elemente de calcul vectorial* (1 exemplar). H. Ionescu. — *Calcule numerice* (1 exemplar), Gnedenko şi Hincin — *Introducere în calculul probabilităţilor* (1 exemplar).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2028

O rază de lumină cade razant pe faţa unei prisme; această rază iese prin cealaltă faţă a prismei sub un unghi de emergenţă α. *Dacă unghiul prismei este* φ *şi indicele său de refracţie este* n, *să se demonstreze că:*

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

* * *

Soluţie. — Avem: $\frac{\sin 90^\circ}{\sin r_1} = n$, $\sin r_1 = \frac{1}{n}$; $\cos r_1 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$, $\sin r_1 = \frac{\sin\alpha}{n}$, deci $\cos r_2 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}$.

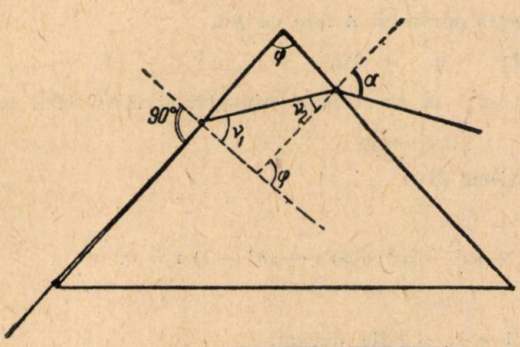
Dar:

(1) $$r_1 + r_2 = \varphi,$$

$$\sin(r_1 + r_2) = \sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = \sin r_1 \cos r_2 + \cos r_1 \sin r_2 = \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\cdot\frac{\sin\alpha}{n},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n^2}.$$



Din relația (1): $\cos(r_1 + r_2) = \cos\varphi$,

$$\cos\varphi = \cos r_1 \cos r_2 - \sin r_2 \sin r_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{n^2-1} - \sin\alpha}{n^2}.$$

Pornim de la membrul al doilea al identității din enunț:

$$E = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2-1}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \sin\alpha\cdot(n^2-1)}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \sin\alpha\cdot\sqrt{n^2-1}} = \sqrt{n^2-1},$$

ceea ce trebuia arătat.

Problema 2084

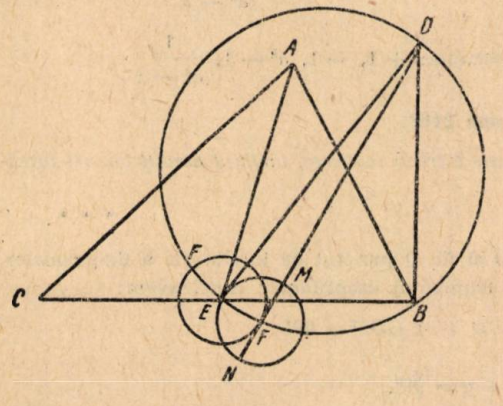
Fie E mijlocul laturii BC a triunghiului ABC în care $b > c$. Pe perpendiculara în B pe BC se ia de aceiași parte cu A față de BC, lungimea BD egală cu AE. Cercul cu centrul în E și rază $\frac{1}{2}(b - c)$ taie cercul EBD în F și F', iar cercul cu centrul în F sau F' de aceeași rază este întîlnit de DF (sau DF') în M și N. Să se demonstreze că lungimile DM și DN sînt egale cu laturile AB și AC.

Construcții și rezultate analoge cînd se consideră cercul cu centrul în E și raza $\frac{b+c}{2}$.

Gh. Buiciu

Soluție. — Deoarece $BD = AE = m_a$ rezultă

$$BD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$



Triunghiul dreptunghic EBD în care

$$EB = \frac{a}{2}$$

dă $ED^2 = BD^2 + EB^2 = \frac{b^2 + c^2}{2}$,

iar triunghiul dreptunghic EFD dă:

$$DF^2 = DE^2 - EF^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} -$$

$$-\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

deci, $$DF = \frac{b+c}{2}.$$

De aici rezultă, M fiind mai aproape de D decît N;

$$DM = DF - MF = \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} = b,$$

$$DN = DF + NF = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} = c.$$

Pentru cazul al doilea D se ia de partea opusă lui A față de BC.

$$DM = AB; \qquad DN = AC.$$

Notă. — Construcția acestora poate servi la construcția triunghiului ABC cînd se cunosc a, m_a și $b = c$.

Problema 2100

Să se rezolve ecuația:

$$(a^2 - 1)\,x^4 - (a^4 - 2a^2 + 2)\,x^3 + (a^4 - 2a^2 + 2)\,x - (a^2 - 1)\,x = 0.$$

* * *

Soluție. — Făcînd substituția: $a^2 - 1 = \lambda$, ecuația devine:

$$x^4 - (\lambda^2 + 1)\,x^3 + (\lambda^2 + 1)\,x - \lambda = 0. \qquad (1)$$

Deoarece suma coeficienților ecuației este nulă înseamnă că ecuația dată admite rădăcina $x_1 = 1$.

Împărțind ecuația (1) prin $x - 1$ obținem ecuația:

$$\lambda x^3 - (\lambda^2 - \lambda + 1)\,x^2 - (\lambda^2 - \lambda + 1)\,x + \lambda = 0$$

care se mai poate scrie:

$$\lambda\,(x^3 + 1) - x\,(x + 1)\,(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

sau:

$$(x + 1)\,[\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)\,x + \lambda] = 0.$$

Această ecuație admite rădăcina $x_2 = -1$ și ne mai rămîne de rezolvat ecuația

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)\,x + \lambda = 0$$

care admite rădăcinile: $x_3 = \lambda$; $x_4 = \dfrac{1}{\lambda}$.

Ținînd seamă că $\lambda = a^2 - 1$, obținem $x_3 = a^2 - 1$; $x_4 = \dfrac{1}{a^2 - 1}$.

Prin urmare, ecuația dată admite rădăcinile: $+1$, -1, $a^2 - 1$, $\dfrac{1}{a^2 - 1}$.

Problema 2102

Să se arate că într-un trapez isoscel înscris într-un semicerc, unghiul ascuțit este cît jumătatea unghiului obtuz format de diagonale.

* * *

Soluție. — Considerăm trapezul $ABCD$ și fie O punctul de intersecție a diagonalelor. Notăm: $\sphericalangle CAB = x$ și $\sphericalangle CAD = y$. În triunghiul dreptunghic ABC avem:

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 90^\circ$$

sau:

$$x + x + y = 90^\circ,$$

de unde:

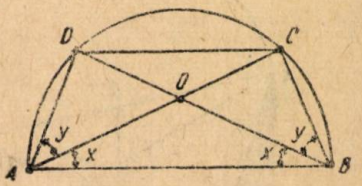
$$x + y = 90° - x. \qquad (1)$$

În triunghiul OAB avem:

$$\sphericalangle AOB = 180° - 2x$$

sau:

$$\frac{1}{2} \sphericalangle AOB = 90° - x. \qquad (2)$$



Comparînd (1) cu (2) deducem:

$$x + y = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB,$$

ceeace justifică enunțul.

Problema 2199

În cercul O se înscrie triunghiul ABC în care AB este latura exagonului regulat înscris în O, iar BC latura pătratului înscris în același cerc. Înălțimea BD a acestui triunghi întîlnește cercul O în E și diametrul CG în F. Să se arate că:

1° *CE este latura triunghiului echilateral înscris în O și este paralelă cu AB;*

2° *AG este latura dodecagonului înscris în O;*

3° *BE este dublul apotemei dodecagonului precedent;*

4° *BF este semisuma dintre latura pătratului și latura dodecagonului.*

Gh. Buicliu

Soluție. — Se urmărește pe figură. 1° Avem evident:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CEB = 45° = \sphericalangle ABE,$$

deci $CE \parallel AB$.

Apoi, $\sphericalangle EBC = 60°$, căci $\sphericalangle ACB = 30°$ și $\sphericalangle CDB = 90°$, deci CE este latura l_3.

2°. $\sphericalangle CGA =$

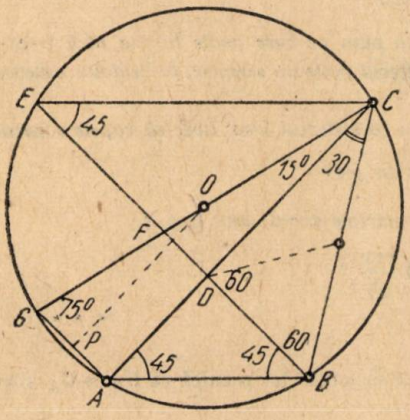
$$= \text{măs.}\frac{\text{arc } AB + \text{arc } BC}{2} = \frac{60° + 90°}{2} = 75°,$$

deci $\sphericalangle ACG = 15°$ și $AG = l_{12}$.

3° În trapezul isoscel $ABCE$ avem $BE = AC = 2.OP$ (OP apotema) căci $OP \parallel AC$ și O mijlocul lui CG.

4° $BF = BD + DF$. Dar în triunghiul dreptunghic BDC avem:

$$BD = \frac{BC}{2} = \frac{l_4}{2};$$



iar în GAC avem:

$$DF = \frac{AG}{2} = \frac{l_{12}}{2}, \quad \text{deci} \quad BF = \frac{l_4 + l_{12}}{2}.$$

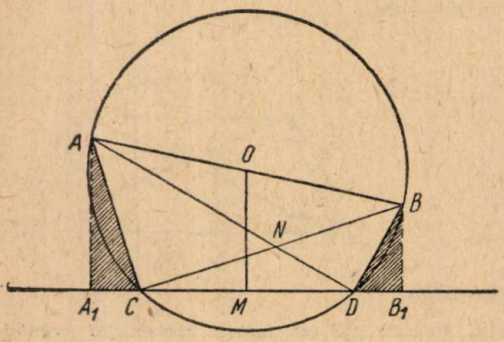
Problema 2200

Într-un cerc dat O se consideră diametrul AB și două coarde AD și BC care se taie în interiorul cercului. Fie M mijlocul coardei CD, iar A_1 și B_1 proiecțiile punctelor A și B pe dreapta CD. Dacă raportul ariilor triunghiurilor AA_1C și BB_1D este n, să se arate că:

$$\frac{AC^2 - BD^2}{4OM^2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

* * *

Soluție dată de **Alex. Emanoil** București. — Deoarece M este mijlocul coardei CD avem $OM \perp CD$ și prin urmare $OM \parallel AA_1 \parallel BB_1$; OM este linie mijlocie în trapezul ABB_1A:



$$OM = \frac{AA_1 + BB_1}{2}.$$

Se observă că $A_1C = DB_1$, deoarece $A_1M = B_1M$ și $CM = DM$, adică: $A_1M - CM = B_1M - DM$, tocmai $A_1C = DB_1$. Înlocuim:

$$A_1A^2 = AC^2 - A_1C^2 - AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2$$

și

$$BD^2 = BB_1^2 + B_1D^2.$$

Relația din enunț devine:

$$\frac{AA_1^2 + A_1C^2 - BB_1^2 - B_1D^2}{(AA_1 + BB_1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$$

sau:

$$\frac{AA_1 - BB_1}{AA_1 + BB_1}; \quad \text{însă} \quad \frac{AA_1}{BB_1} = n.$$

Raportul ariilor triunghiului AA_1C și BB_1D este: $\frac{AA_1}{BB_1} = n$, deci relația din enunț este demonstrată.

Problema 2229

Un corp A de masă $M = 800$ g este așezat pe un plan pe care poate luneca fără frecare. Acest corp este fixat la una din extremitățile unui fir trecut peste un scripete, la cealaltă extremitate fiind atîrnat un corp B de masă $m = 700$ g.

a) *Care trebuie să fie înclinarea planului pentru ca sistemul lăsat liber să capete o accelerație de* $196 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, *mișcarea mașei B avînd loc de sus în jos?*

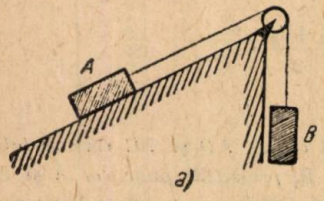
b) *Este posibil să avem o accelerație de aceiași mărime dar de sens opus?*

c) *În ce caz accelerația sistemului va fi de* $490 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$?

* * *

Soluție. — *a)* Dacă mișcarea corpului B se face de sus în jos rezultă că $G_B > G_A \sin \alpha$, unde α este înclinarea planului. Vom avea:

$$G_B - G_A \sin \alpha = a\,(m_A + m_B).$$



a)

Înlocuind avem:

$$\sin \alpha = \frac{700 \times 980 - 196 \times 1500}{800 \times 960}.$$

Efectuînd se obține

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \text{ deci } \alpha = 30°.$$

b) Admitem că avem o accelerație de sens opus celei de la punctul precedent. Avem în acest caz:

$$G_A \sin \alpha - G_B = a\,(m_A + m_B).$$

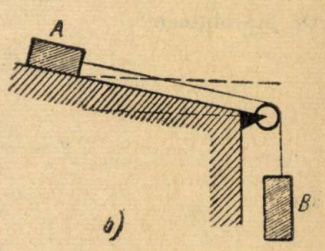
Înlocuind și efectuînd se obține

$$\sin\alpha = \frac{196 \times 1500 + 700 \times 980}{800 \times 980}\ ;\ \sin\alpha = \frac{10}{8} > 1,\ \text{imposibil.}$$

Ajungem la concluzia că o accelerație de aceiași mărime în sens invers este imposibilă.

c) Procedînd în mod analog se obține:

$$\sin\alpha = \frac{700 \times 980 - 490 \times 1500}{800 \times 980}\ ;\ \sin\alpha = -\frac{1}{16}.$$



Adică avem:

$$\alpha = -\arcsin\frac{1}{16}.$$

Această condiție este satisfăcută în felul în care este arătat în fig. 2.

Verificare: $490 \cdot 1500 = 700 \cdot 980 + 800 \cdot 980 \cdot \frac{1}{16}$; (verifică).

Problema 2232

Fie A_k $(k = 0,1,2,\ldots,n,n+1)$, puncte fixe situate pe o aceiași dreaptă (Δ) și O un punct fix exterior lui (Δ). Dacă M este un punct oarecare pe (Δ) și R_k raza cercului circumscris triunghiului MOA_k, să se demonstreze că:

$$\frac{R_k^n}{R_0R_1\ldots R_{k-1}R_{k+1}\ldots R_{n-1}R_n} = \text{const.}\ (k = 0,1,\ldots,n)$$

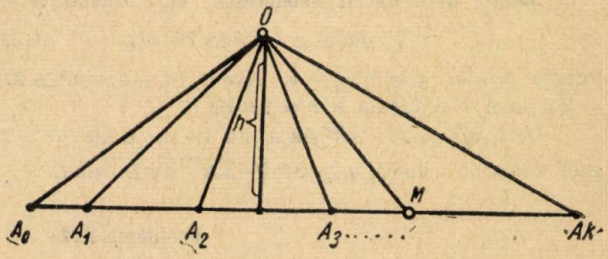
Valeriu Udrescu, student București

Soluție. — Fie h înălțimea tuturor triunghiurilor. Ținînd seamă de relația din triunghiul ABC: $bc = 2Rh_a$ și $R = \frac{bc}{2h_a}$, deducem din triunghiul MOA_k:

$$R_k = \frac{OM \cdot OA_k}{2h}\ ;$$

$$R_1 = \frac{OM \cdot OA_1}{2h};\ \ldots$$

$$R_0 = \frac{OM \cdot OA_0}{2h}.$$



Înlocuind în relația dată și simplificînd avem:

$$\frac{R_k^n}{R_0 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdots R_{n-1}R_n} = \frac{OA_k^n}{OA_0 \cdot OA_1 \cdots OA_k} = \text{const.}$$

căci $A_0, A_1, \ldots, A_k$ și O sînt puncte fixe.

Problema 2236

Să se rezolve sistemul de ecuații: $Ax + By + C = 0$ și $\frac{a-x}{m-x} = \frac{b-y}{n-y}$, *apoi să se arate că*:

$$\left(\frac{Aa + Bb + C}{Am + Bn + C}\right)^2 = \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{(m-x)^2 + (n-y)^2}.$$

C. Ionescu — Țiu

Notăm cu B, b și I bazele și înălțimea trapezului, $DE = y$ și cu x distanța între DE și baza mică.

Ducînd din Q o paralelă la PN se formează două triunghiuri asemenea. Rezultă ecuațiile

$$\frac{B-b}{y-b} = \frac{I}{x}, \quad (B+y)(I-x) = nx(y+b),$$

de unde găsim

$$y = \sqrt{\frac{B^3 + nb^3}{n+1}},$$

ceea ce permite construirea paralelei DE.

Metoda trigonometrică. Reproducem parțial figura cu notația unghiurilor cunoscute α și β alăturate bazei mari a trapezului.

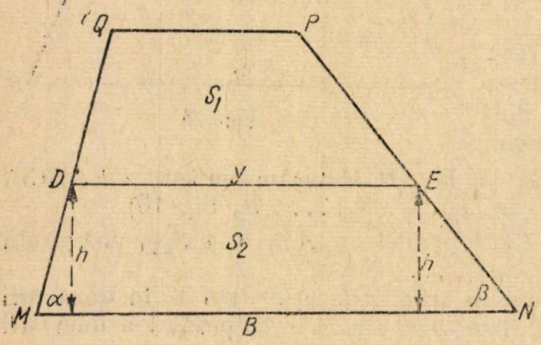


Fig. 18

Se observă ușor că:

$$B + y = \frac{2S_2}{h},$$

$$B - y = h(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta).$$

Înmulțim relațiile și rezultă:

$$B^2 - y^2 = 2S_2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta),$$

de unde

$$y = \sqrt{B^2 - 2S_2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)},$$

deci construcția paralelei $\overline{DE} = y$ este posibilă (fig. 18).

Aceste două metode se pot aplica și cînd figura dată este un triunghi sau chiar un patrulater oarecare, căci prin ducerea unei paralele la o latură, patrulaterul cu aria S_2 este totdeauna un trapez.

RAZELE X ȘI CÎTEVA DIN APLICAȚIILE LOR IN ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

AL. CIOCÂNEL

LARGA utilizare pe care o au razele X, descoperite de V. K. Röntgen în 1895, poate fi ilustrată prin cîteva exemple din diferite domenii. În fizică: — determinarea numărului atomic Z, determinarea exactă a numărului lui Avogadro, determinarea sarcinii electronului și a configurației electronice a atomului, descoperirea de noi elemente etc. În chimie și mineralogie: — deteriminarea elementelor care intră în compoziția diferitelor minereuri și compuși chimici, determinarea structurilor cristaline și a constantelor de rețea, analiza fibrelor organice etc. În tehnică: — controlul calității pieselor turnate, laminate, forjate și sudate, determinarea fisurilor, a incluziunilor nemetalice la arborii

motoarelor, cazanele de înaltă presiune etc. În domeniul medicinii, radiografia Röntgen, este larg aplicată pentru cercetarea şi descoperirea fracturilor, a tumorilor, precum şi pentru tratamentul acestora. În ultimii ani razele X sînt folosite în industria alimentară la analiza produselor finite; în pictură, pentru descoperirea unor tablouri vechi sub straturile de vopsea ale tabloului nou; în arheologie, pentru autentificarea monedelor vechi etc. Pentru o înţelegere mai aprofundată a tehnicii razelor X şi pentru a le putea folosi într-o mai largă măsură, este necesar să se cunoască elementele de bază ale fizicii razelor X.

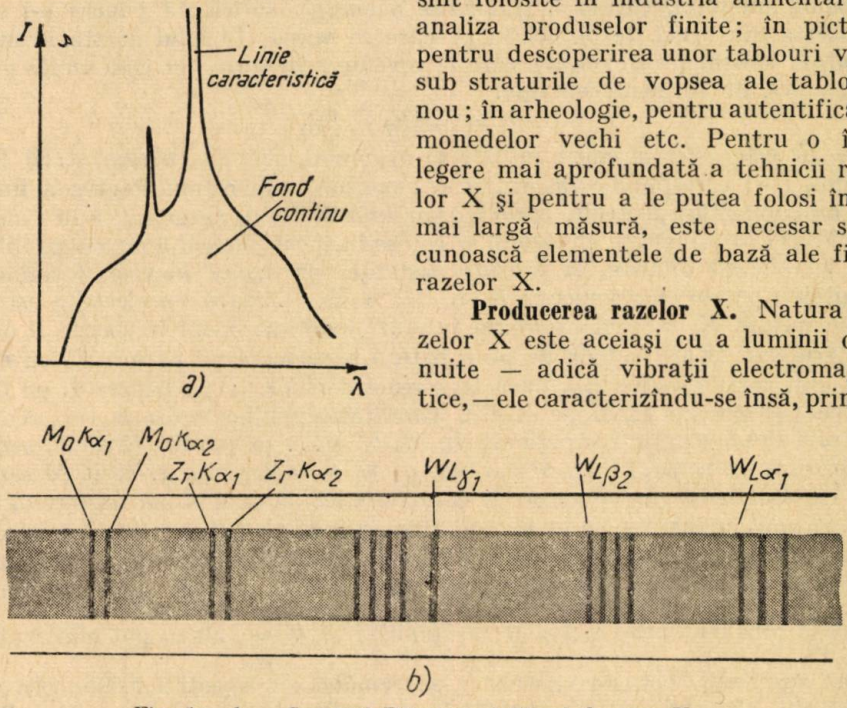


Fig. 1*a*—*b*. — Spectrul Röntgen şi filmul de raze X.

Producerea razelor X. Natura razelor X este aceiaşi cu a luminii obişnuite — adică vibraţii electromagnetice, — ele caracterizîndu-se însă, printr-o frecvenţă de vibraţie foarte mare şi deci o lungime de undă (λ) mică variind de la 1Å pînă la cîteva zeci de Å (1 Å = 10^{-8} cm). Analiza unui spectru de raze X ne arată, că el este format dintr-un fond continuu, peste care se suprapun în anumite condiţii, nişte linii înguste separate, de o lungime de undă bine determinată, aşa cum se arată în fig. 1a şi 1b.

Mecanismul producerii razelor X este următorul: — un electron e este emis de pe un filament incandescent şi accelerat de un cîmp electric $\vec{E}$ pînă la o energie de cîteva sute de mii de electron-volţi. Cu această energie, pătrunzînd într-un material oarecare (anodul), el este frînat în cîmpul electric creat de atomii mediului de frînare. Din electrodinamică se ştie că orice sarcină electrică, mişcîndu-se cu acceleraţie (în cazul de faţă negativă), radiază energie electromagnetică. Această energie, se distribuie pe întreg spectrul, dîndu-ne aşa numitul fond condinuu, de mărime:

$$I = \frac{c}{4\pi} E^2, \tag{1}$$

unde:

$$\vec{E} = \frac{\vec{a}\, e}{r c^3} \sin\theta \tag{2}$$

este cîmpul electric creat de electronul frînat, cu acceleraţia $a < 0$, într-un punct P la o distanţă dată r ($c = 2{,}99776.10^{10}$ cm/s). Electronul care a pătruns în masa anodului (materialul de frînare), poate să ciocnească un electron al atomilor anodului, căruia îi transmite o energie suficientă pentru a-l scoate pe acesta din urmă de pe orbita pe care se mişcă. În felul acesta ia naştere un atom ionizat (sau excitat), care la revenirea în stare normală emite o radiaţie, adică un foton de energie:

$$E = -[E_f - E_i], \tag{3}$$

unde E_i este energia stării iniţiale a atomului, iar E_f energia stării finale. Semnul (—) corespunde absorbţiei sau emisiei unui foton. Pentru a înţelege mai bine apariţia spectrului caracteristic (sau de linii), amintim că în « modelul de pături » al atomului, electronii se rotesc în jurul nucleului cu viteze diferite, deci cu energii diferite, la diferite distanţe, pe orbite închise, formînd aşa numitele « pături electronice »: K, L, M, N, O, . Dacă un electron este scos de pe pătura K, atomul rămînînd în stare excitată, locul lui poate fi ocupat prin trecerea altui electron de pe o pătură superioară pe pătura K, cu emisia unei linii caracteristice K_α, dacă trecerea s-a făcut de pe pătura L pe K, K_β pentru trecerea de pe M pe K etc. Totalitatea liniilor emise la trecerea unui electron de pe o pătură superioară L, M, N, O... pe pătura K ne dă seria K, a trecerilor de pe M, N, O, P,... etc. pe L, seria L ş.a.m.d. seria M seria N, etc. De aici deducem, că spectrele caracteristice de raze X iau naştere datorită transformărilor care au loc în adîncul atomului, adică sînt provocate de electroni de pe păturile interne. Ştim însă, că atomii diferitelor elemente au o structură internă asemănătoare (pe pătura K cu numărul cuantic principal $n = 1$, numărul cuantic orbital $l = 0$ şi spinul $j = \pm \frac{1}{2}$, nu se pot afla mai mult de doi electroni). Aceasta va duce la o asemănare a spectrelor Röntgen emise de diferite elemente şi se vor deosebi doar prin lungimea de undă a liniilor emise, care scade spre sfîrşitul tabloului periodic al elementelor, după legea dată de Moseley (1913—1914):

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z-1)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \tag{4}$$

unde R se numeşte constanta lui Rydberg: $R = 109737{,}42^{-1}$ cm.

La o examinare mai riguroasă a unei linii spectrale, de exemplu, K_α se observă, că la rîndul ei este compusă din două linii: $K_{\alpha 1}$ şi $K_{\alpha 2}$ (fig. 2). Acest fapt se explică astfel: — starea unui electron este caracterizată prin trei numere cuantice n, l, j care pot lua valorile $n = 1, 2, 3, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ şi $j = 1 \pm \frac{1}{2}$. Pătura K se caracterizează prin numărul cuantic principal $n = 1$, numărul cuantic azimutal $l = 0$ şi numărul cuantic de spin $j = \frac{1}{2}$; pătura L: $n = 2, l = 0, 1$ şi $j = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ adică ea se va compune din subnivele, L_{I}, L_{II}, L_{III}. Trecerea unui electron de pe L_{III} pe K ne dă linia $K_{\alpha 1}$, de pe L_{II} pe K linia $K_{\alpha 2}$. În plus, la trecerea de pe un nivel de energie pe altul trebuie satisfăcute condiţiile:

$$\begin{aligned} &\Delta l = \pm 1, \\ &\Delta j = 0, \pm 1, \\ &\Delta n \neq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Aceste condiţii pentru variaţia unui număr cuantic la trecerea între două nivele se numesc « reguli de selecţie ». Astfel, trecerea de pe linia L_I pe K este interzisă deoarece $l_{LI} - l_K = 0$ şi nu ± 1.

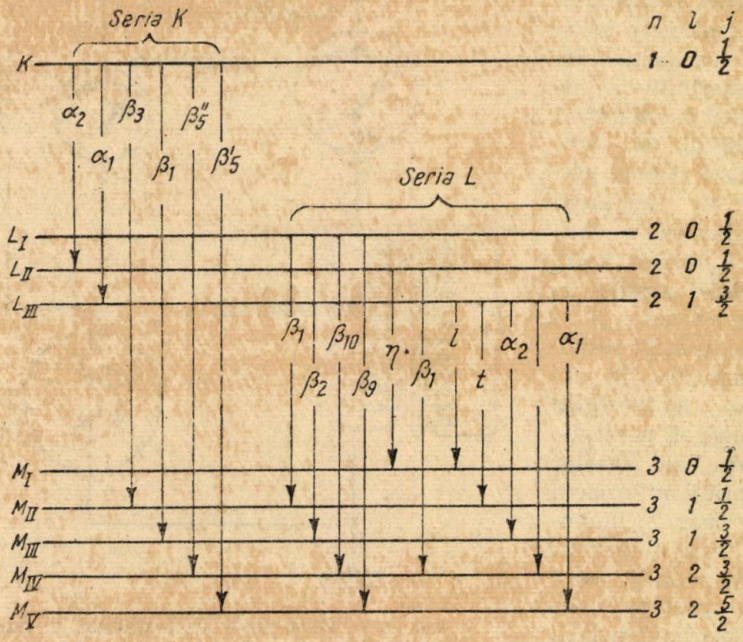


Fig. 2. — Seria K şi L a spectrului caracteristic de raze X.

Datorită simplităţii păturilor interioare ale atomului, spectrele Röntgen emise vor avea un caracter simplu (linii puţine), în comparaţie cu spectrele optice, care numără mii de linii.

Intensitatea spectrului caracteristic este o funcţie complicată de mai mulţi parametri:

$$I_{if} \backsim F_i p_{if} \nu_{if} \tag{6}$$

unde F_i este probabilitatea de ionizare a nivelului iniţial i, p_{if} probabilitatea de tranziţie de pe un nivel iniţial i, pe un nivel final f, ν_{if} frecvenţa fotonului emis la tranziţia $i \rightarrow f$, de aceea nu vom da evaluarea ei teoretică.

În cazul unui anod masiv, I mai depinde de materialul anodului (Co, W, Fe, Cu..), de unghiul φ sub care cad electronii (emişi de pe catod) pe suprafaţa anodului, de tensiunea dintre anod şi catod etc.

La pătrunderea electronilor acceleraţi în anod, se produc de asemenea şi alte fenomene, ca: difuzia Compton, formarea de perechi electron-pozitron, raze X secundare, care nu au importanţă în cazul de faţă.

Tipul cel mai simplificat de instalaţie pentru producerea razelor X (fig. 3), se compune din: — un generator de înaltă tensiune E (10 .. 1000 kV) şi un tub cu doi electrozi (A — anod K — catod), în care se poate face un vid cît mai bun de $10^{-5} \ldots 10^{-6}$ torri. Înalta tensiune se obţine cu ajutorul transformatorilor de înaltă tensiune care pot da o putere de ordinul 1 kW în regim

de lucru. Pentru a opri faza neutilizabilă a tensiunii, se folosesc supape-chenotroane, sau redresori mecanici (fig. 4).

Electronii care pătrund în masa anodului *A*, pierd cea mai mare parte a energiei lor pentru încălzirea anodului şi de aceea anodul trebuie răcit cu un curent de apă. Astăzi există tipuri perfecţionate de instalaţii care funcţionează la tensiuni de 1 milion volţi.

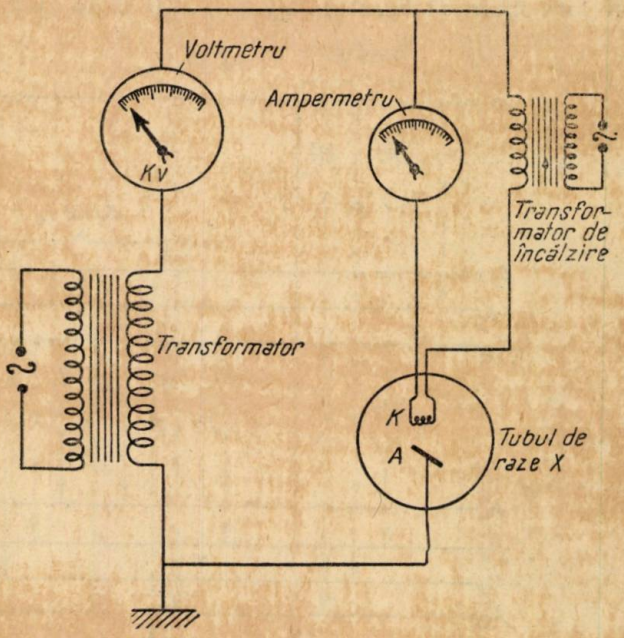


Fig. 3. — Tipul clasic de instalaţie de raze X.

Absorbţia razelor X. — Utilizarea razelor X în analiza chimică, în radiografiile medicale, în defectoscopia metalurgică etc., se bazează pe legile de absorbţie ale razelor X. Considerăm un fascicul paralel de raze X monocromatice (raze de aceiaşi lungime de undă), care cade pe suprafaţa unui material absorbant de grosime *d* (fig. 5).

Dacă măsurăm intensitatea fasciculului înainte şi după trecerea prin materialul dat, vom găsi valori diferite ale intensităţii fasciculului şi anume, intensitatea fasciculului primar scade în funcţie de grosimea materialului străbătut, de natura materialului (*Z* — numărul atomic al absorbantului), precum şi de intensitatea iniţială a fasciculului de raze X. Este de subliniat proprietatea remarcabilă a absorbţiei radiaţiei X, de a nu depinde deloc de proprietăţile optice ale mediului dat. De exemplu, sticla de plumb (*Pb*), perfect transparentă pentru lumină, absoarbe complet razele X, pe cînd o foiţă de aluminiu (Al),

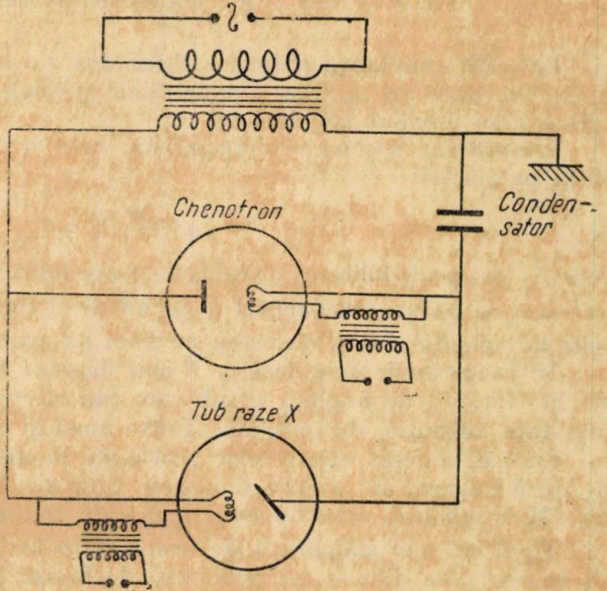


Fig. 4. — Instalaţie de raze X cu Chenotron.

care nu este transparentă pentru lumină, absoarbe foarte puţin razele X. Scăderea intensităţii fasciculului se produce pe două căi foarte deosebite între ele:

a) — scăderea intensităţii prin difuzie, constînd din devierea unor raze din fascicul, care astfel sînt scoase din fasciculul incident (fig. 6). (Mai exact, difuzia constă în devierea fotonilor în cîmpul electric al atomilor, ceea ce se numeşte o « ciocnire elastică », fără pierdere de energie),

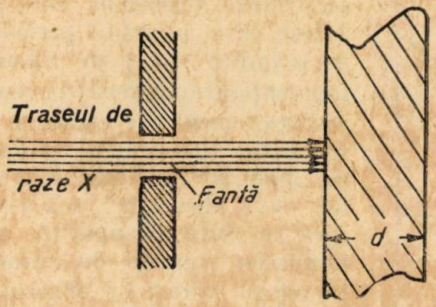


Fig. 5. — Absorbţia razelor X.

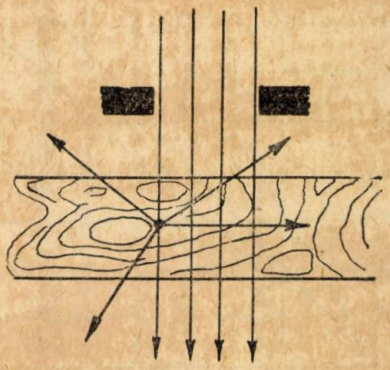


Fig 6. — Difuzia razelor X.

b) — absorbţia fotonilor — adică dispariţia unor raze X din fasciculul incident. Acest fenomen se produce prin efect fotoelectric, cînd energia fotonului Röntgen se cheltuieşte pentru ionizarea atomilor mediului absorbant. Scăderea intensităţii fasciculului dat, se face după legea:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu d} \tag{7}$$

unde I este intensitatea fasciculului măsurată fără absorbant, d — grosimea stratului de materie parcursă, μ coeficientul liniar de absorbţie, care este o constantă pentru un material dat, de o anumită grosime. Coeficientul liniar de absorbţie se măsoară în cm^{-1}. Dacă se ia o suprafaţă de 1 cm^2 pe care cade un fascicul de raze X paralele şi normale pe suprafaţa dată, atunci μ se poate defini ca fiind energia fasciculului absorbită într-un cm^3 de materie. În mod analog se defineşte un « coeficient de absorbţie masică » μ_m ca reprezentînd energia absorbită de unitatea de masă de absorbant, secţiunea fasciculului fiind 1 cm^2:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} (cm^3 \cdot g^{-1}). \tag{8}$$

Spre deosebire de μ, μ_m nu depinde de starea de agregare a absorbantului şi de temperatura lui, ci numai de tipul atomilor daţi, adică de numărul atomic Z al elementului dat. De exemplu:

$$\mu_m (\text{apă}) = \mu_m \cdot (\text{vapori de apă}).$$

Coeficientul de absorbţie atomic este:

$$\mu_a = \frac{\mu}{n} (n = \text{numărul de atomi pe } cm^3) \tag{9}$$

Experienţa arată că μ_a nu depinde de combinaţia chimică în care intră un element dat.

Toate afirmaţiile de mai sus sînt valabile pentru cazul unui fascicul monocromatic de raze X. În caz contrar μ depinde de grosimea d, deoarece radiaţia cu lungimea de undă λ mare, este absorbită în primele straturi, fasciculul devenind astfel mai dur şi deci mai penetrant. Pe de altă parte, dacă considerăm mediul absorbant format din oscilatori electronici (electroni care se rotesc cu o anumită perioadă pe o ordită dată) de diferite frecvenţe, atunci, dacă frecvenţa radiaţiei incidente coincide cu una din frecvenţele proprii ale materialului absorbant are loc o absorbţie selectivă, ceea ce duce la apariţia aşa numitelor «creste de absorbţie» (sau salturi de absorbţie, fig. 7).

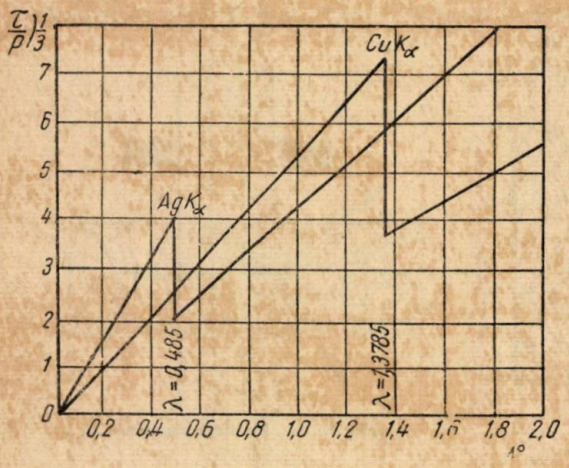


Fig. 7. — Variaţia coeficientului de absorbţie a razelor X cu lungimea de undă.

Experimental se constată că absorbţia depinde de tensiunea aplicată pe tub aproximativ invers proporţional cu pătratul tensiunii $\frac{k}{V^2}$, este direct proporţională cu lungimea de undă λ şi cu Z^4 (fig. 7).

Se poate găsi şi coeficientul de absorbţie moleculară:

$$\mu_{mol} = \frac{M}{N}\mu_m \qquad (10)$$

unde M este greutatea moleculară, iar N — numărul lui Avogadro:

$$N = 6{,}058 \cdot 10^{23}.$$

Difracţia razelor X. Înţelegem prin difracţia undelor electromagnetice,

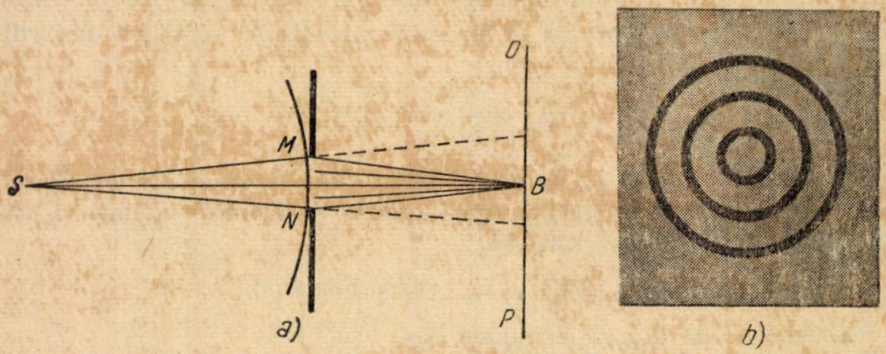


Fig. 8 *a—b*. — Difracţia printr-un orificiu circular şi figurile de difracţie.

redistribuţia intensităţii radiaţiei (în cazul de faţă razele X), după ce undele respective au trecut prin deschideri mici, sau au întîlnit în calea lor obstacole, de dimensiuni comparabile cu lungimea lor de undă.

De exemplu, la trecerea luminii printr-un orificiu MN circular (fig. 8a), pe ecranul OP apar zone luminoase, alternînd cu zone întunecate sub formă de cercuri concentrice în jurul punctului B (fig. 8 b).

Acelaşi fenomen se observă dacă în locul orificiului MN din fig. 8 a, aşezăm un ecran circular. Dacă se ia acum un ecran care să aibă mai multe orificii, de dimensiuni tot mai mici, se ajunge la noţiunea de « reţea de difracţie », care prezintă o deosebită importanţă. Se poate considera deci, că o linie materială (în cazul mai general o suprafaţă), de-a lungul căreia puterea de transmisie variază de la un punct la altul după o lege periodică (în cazul de faţă distanţa dintre două orificii), formează o reţea de difracţie. Experienţele făcute cu asemenea reţele arată că lumina care cade pe un paravan aşezat în spatele reţelei se stinge în anumite regiuni bine determinate. Poziţia acestora este dată de:

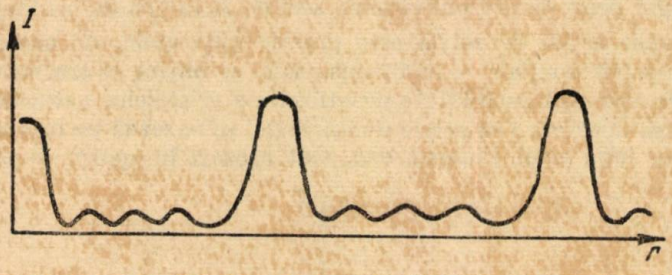


Fig. 9. — Maxime de difracţie.

$$n\lambda = d \sin \varphi \qquad (11)$$

unde d este o constantă, φ unghiul făcut de raza difractată cu raza incidentă, iar λ lungimea de undă a radiaţiei incidente.

Din relaţia (11), dacă luăm $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ obţinem aşa numitele maxime principale de interferenţă (sau difracţie) (fig. 9).

Perioada reţelii, pe care am definit-o ca distanţa între două puncte cu putere de transmisie egală (centre difuzante) şi lungimea de undă λ a radiaţiei

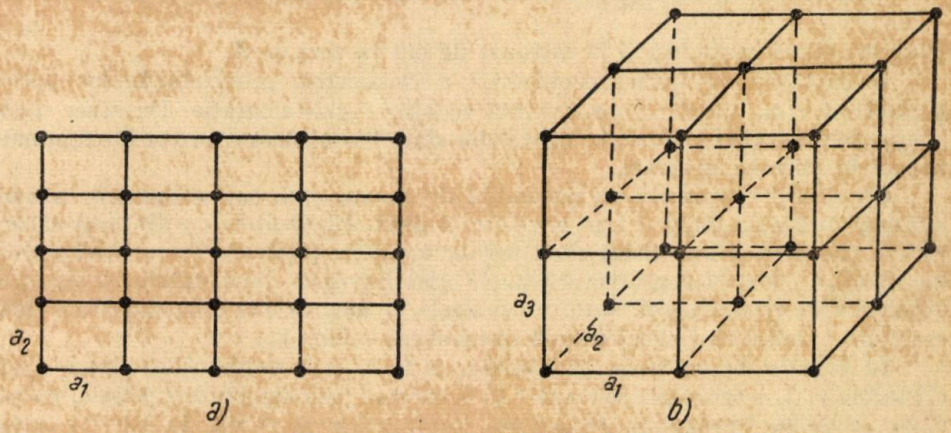


Fig. 10. a—b. — Reţele de difracţie plane şi spaţiale

incidente sînt mărimile cele mai importante din studiul difracţiei. Pentru a obţine o reţea plană de difracţie, pe care puterea de transmisie să varieze după două direcţii, putem aşeza două reţele liniare de perioade a_1 şi a_2 una peste alta (fig. 10 a). O reţea spaţială se vede în figura 10 b.

S-a spus mai sus că pentru a obţine difracţia razelor X, ele trebuie să treacă prin orificii foarte mici; cu alte cuvinte distanţa între două centre difuzante (perioada reţelei), trebuie să fie foarte mică. De obicei reţelele se obţin trasînd un mare număr de linii, foarte apropiate între ele, pe sticlă. În cazul razelor X însă, lungimile de undă fiind de ordinul cîtorva zeci de Å (adică de ordinul 10^{-8} cm), construirea unor astfel de reţele este practic imposibilă, de aceea difracţia razelor X prin reţele spaţiale — tridimensionale, se obţine la trecerea lor prin cristale naturale. Această posibilitate de utilizare a cristalelor naturale (sare de bucătărie, calcită, mică etc.) ca reţele de difracţie, se bazează pe faptul că în cristal, atomii sau ionii unui element dat, sînt aşezaţi în spaţiu după

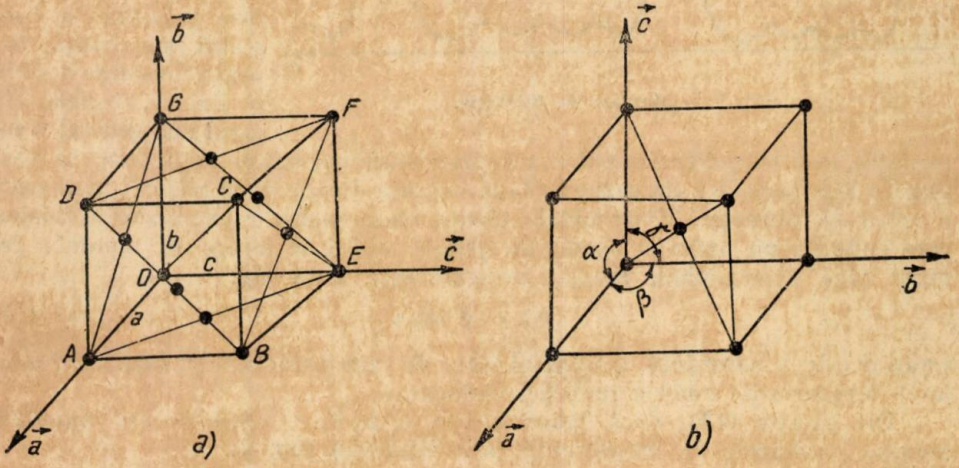


Fig. 11. *a.—b.* — Reţea cubică cu feţe centrate şi cu volum centrat. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt axele cristalului; *a*, *b*, *c* perioadele pe cele trei axe; *ABCD*, *BCEF*,... planele cristaline.

anumite reguli periodice şi la distanţe de cîteva zeci de Å.

În legătură cu forma geometrică a cristalelor, proprietăţile lor optice şi electrice etc., a apărut o adevărată ştiinţă, — cristalografia. Deoarece unele considerente asupra geometriei cristalelor sînt absolut necesare, vor fi examinate sumar în cele ce urmează.

Un cristal reprezintă un ansamblu de atomi, ioni, sau grupuri de atomi, aranjaţi în spaţiu după o lege geometrică dată. Elementele cu ajutorul cărora putem caracteriza un cristal sînt: perioada reţelei (distanţa între două noduri în cristal), axele cristalografice şi planele cristalografice. De exemplu, în sistemul cubic în care cristalizează NaCl, Fe şi altele, se aleg ca axe cristalografice chiar muchiile cubului elementar (celulă elementară — fig. 11).

În funcţie de mărimea perioadelor *a*, *b*, *c*, şi a unghiurilor dintre axele cristaline α, β, γ cristalele se împart în 7 sisteme (sau singonii): triclinic, monoclinic, rombic, tetragonal, hexagonal, romboedric şi cubic. În fig. 11 avem un cristal din sistemul cubic pentru care $a=b=c$, $\alpha=\beta=\gamma=90°$. Evident, un punct oarecare din reţea va fi definit prin trei numere, de exemplu: 0 (o, o, o), *B* (*a*, *b*, o), *C* (*a*, *o*, *b*) etc. sau printr-un vector de poziţie $\vec{r}$ care uneşte origina axelor cu centrul respectiv:

$$\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \qquad (12)$$

unde u, v şi w sînt numere întregi care ne arată cîte perioade au fost luate pe axa respectivă. Putem duce plane cristaline care să treacă prin trei noduri ale reţelei, planele paralele între ele fiind aşezate la o distanţă d. În fig. 12 sînt duse «feţele unitare» ale unui cristal. Se notează cu: $[u, v, w]$ planul pe care este perpendicular vectorul $\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$ şi cu (u, v, w) un nod al reţelei. Definim acum reţeaua inversă cu axele $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$, care să satisfacă relaţiile

$$\begin{gathered}\vec{a}_1\vec{b} = \vec{a}_1\vec{c} = \vec{b}_1\vec{a} = \vec{b}_1\vec{c} = \vec{c}_1\vec{a} = \vec{c}_1\vec{b} = 0,\\ \vec{a}\cdot\vec{a}_1 = \vec{b}\cdot\vec{b}_1 = \vec{c}\cdot\vec{c}_1 = 1.\end{gathered} \tag{13}$$

De aici se vede că axa reciprocă $\vec{a}_1$ este o perpendiculară pe planul [1,0,0], $\vec{b}_1$ pe [0, 1, 0] şi $\vec{c}_1$ pe [0,0, 1]. În reţeaua inversă (sau reciprocă), un punct oarecare al reţelei (nod) va fi reprezentat de vectorul:

$$\vec{r}_1 = h\vec{a}_1 + k\vec{b}_1 + l\vec{c}_1 \tag{14}$$

şi va fi un vector normal la planul $[h, k, l]$ în reţeaua directă, adică

$$|\vec{r}_1| = \frac{1}{d(h, k, l)}, \tag{15}$$

de unde rezultă în cazul reţele cubice simple:

$$d(h, k, l) = \frac{1}{|h\vec{a}_1 + k\vec{b}_1 + l\vec{c}_1|} \tag{16}$$

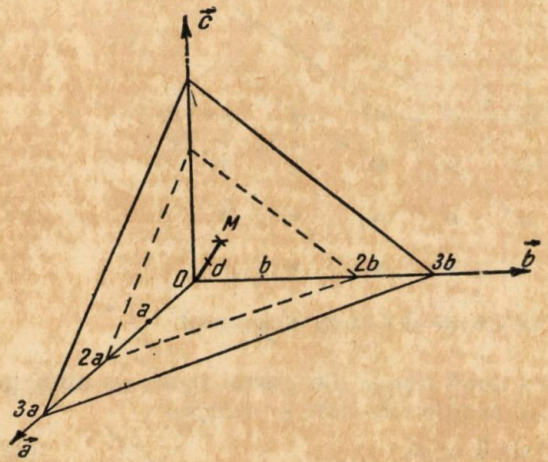


Fig. 12. — Plane unitare în cristal

Însă:

$$\begin{aligned}|\vec{r}_1|^2 = |h\vec{a}_1 + k\vec{b}_1 + l\vec{c}_1|^2 = h\vec{a}_1^2 + k^2\vec{b}_1^2 + l^2\vec{c}_1^2 + 2hk\vec{a}_1\vec{b}_1 +\\ + 2kl\vec{b}_1\vec{c}_1 + 2lh\vec{c}_1\vec{a}_1 = h^2\vec{a}_1^2 + k\vec{b}_1^2 + l^2\vec{c}_1^2 + 2hk\,a_1b_1\cos(\vec{a}_1, \vec{b}) +\\ + 2kl\,b_1c_1\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) + 2lk\,c_1a_1\cos(\vec{c}_1, \vec{a}_1).\end{aligned} \tag{17}$$

În cazul reţelei cubice, unghiurile dintre axe vor fi de 90°, iar $a_1 = b_1 = c_1$, de unde rezultă:

$$|\vec{r}_1|^2 = h^2a_1^2 + k^2b_1^2 + l^3c_1^2. \tag{18}$$

Substituind această valoare în (16) găsim:

$$d(k, k, l) = \frac{1}{\sqrt{|\vec{r}_1|^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2a_1^2 + k^2b_1^2 + l^2c_1^2}} = \frac{1}{a_1\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \tag{19}$$

unde am pus $a_1 = b_1 = c_1 = a_1$. Din relaţia de definiţie (13) deducem că:

$$\vec{a} \cdot \vec{a_1} = 1 \; ; \; \vec{b}\,\vec{b_1} = 1 \; \vec{c} \cdot \vec{c_1} = 1 \, , \text{ adică: } a_1 = \frac{1}{a} \tag{20}$$

şi deci:

$$d(h, k, l) = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \cdot \tag{21}$$

Aci a este parametrul de reţea pentru o reţea cubică simplă, (h, k, l) numere întregi, iar d distanţa între două plane paralele în cristal.

Revenind la subiect, să vedem ce se întîmplă cu un fascicul de raze X care trece printr-o reţea spaţială simplă de tipul analizat mai sus. Razele X monocromatice căzînd pe diferite noduri ale reţelei, de exemplu pe nodurile aşezate în planele paralele cu una din feţele cristalului (fig. 13) vor suferi

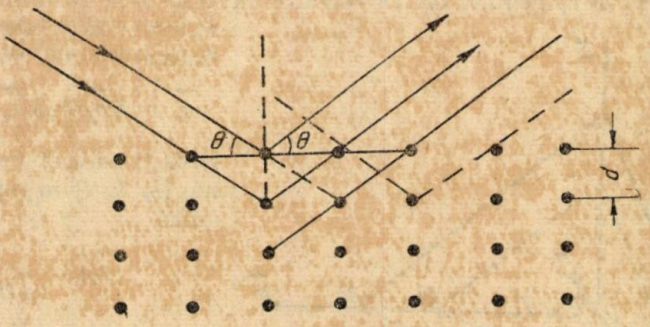


Fig. 13. — Difracţia în cristale şi formula Bragg-Wulf.

fenomene de interferenţă şi vor da după ieşirea din cristal figuri de difracţie — adică maxime şi minime a căror poziţie este dată de relaţia:

$$2d(h, k, l) \sin \theta = n\lambda \tag{22}$$

Evident, deoarece razele X nu sînt perceptibile cu ochiul liber, pentru a obţine figurile de difracţie trebuie să aşezăm în calea lor un film sau o placă fotografică. Formula (22) care stă la baza întregii cristalografii cu raze X, a fost dedusă de W. H. Bragg (1913) şi independent de el, de cristalograful rus I. W. Wulf.

Dacă lucrăm cu un fascicul de raze X, în care lungimea de undă (λ) este dată şi măsurăm într-un fel oarecare unghiul θ din formula (22), atunci cu ajutorul relaţiei (21) putem determina constanta de reţea a, care are o deosebită importanţă în anumite lucrări tehnice şi ştiinţifice. Dispunînd de elementele de bază ale fizicii razelor X se poate trece la examinarea cîtorva din aplicaţiile lor principale în practica de laborator şi industrială.

Analiza chimică prin emisie. În metoda calitativă de analiză prin emisie, se foloseşte un tub demontabil în a cărei anticatodă (anodul), se pune o cantitate mică din substanţa de cercetat, sub formă de pulbere. Această substanţă va juca rolul de anod şi la bombardarea ei cu electroni proveniţi de pe filamentul tubului, va emite un fond continuu şi un număr oarecare de linii monocromatice, caracteristice substanţelor chimice care intră în compoziţia pulberii studiate. Razele X emise sînt reflectate pe un cristal convenabil ales, după

legea lui Bragg-Wulf, şi culese pe o placă sau un film fotografic. Se developează apoi filmul şi se compară liniile obţinute, cu cele din tabelele spectrale, determinîndu-se astfel natura elementelor respective. Avantajele acestei metode faţă de metodele spectroscopice din vizibil şi ultraviolet sînt: utilizarea unor cantităţi foarte mici de materie, rezultate simple şi exacte, rapiditatea analizei şi recuperarea completă a probei. Analiza cantitativă este mult mai delicată şi se reduce în fond la o problemă de fotometrie, adică de măsurare a intensităţii liniilor obţinute.

Analiza chimică prin absorbţie. Fie M grame din substanţa de studiat (soluţie sau praf), traversată de un fascicul de raze X cu secţiune de 1 cm^2. Să determinăm cîte m grame dintr-un element dat, se găsesc în cele M grame în substanţa cercetată.

Absorbţia fasciculului definită de expresia (7) se poate considera ca datorîndu-se, o parte elementului dozat: $e^{-m\mu/\rho}$ şi alta, tuturor celoralalte elemente: $e^{-[M-m]\mu'/\rho}$,

În vecinătatea unei lungimi de undă λ are loc o absorbţie selectivă. Dacă notăm cu i_1 intensitatea fasciculului înainte de a introduce substanţa pentru $\lambda > \lambda_A$, şi i_2 pentru $\lambda < \lambda_A$ iar cu I_1 intensitatea după introducerea substanţei pentru $\lambda > \lambda_A$ şi I_2 pentru $\lambda < \lambda_A$ vom avea:

$$I_1 = i_1 e^{-[M-m]\frac{\mu_1'}{\rho'}} \times e^{-m\frac{\mu_1}{\rho}},$$
$$I_2 = i_2 e^{-[M-m]\frac{\mu_2'}{\rho'}} \times e^{-m\frac{\mu_2}{\rho}}. \tag{23}$$

Dacă ne situăm în vecinătatea imediată a unei linii de absorbţie, atunci putem scrie cu o eroare neglijabilă:

$$i_1 = i_2 \quad \text{şi} \quad \mu_1' = \mu_2'. \tag{24}$$

Din (23) vom obţine deci:

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-m\left[\frac{\mu_2}{\rho} - \frac{\mu_1}{\rho}\right]} \tag{25}$$

sau

$$f = \frac{I_2}{I_1} = e^{-mG}, \tag{26}$$

unde

$$G = \frac{\mu_2}{\rho} - \frac{\mu_1}{\rho}. \tag{27}$$

Măsurînd pe I_1 şi I_2 şi cunoscînd pe G putem determina fără dificultate pe m. Valorile lui G pentru o serie de elemente, sînt:

Z	42	47	50	51	56	58	74	82	90
Element	Mo	Ag	Sn	Sb	Ba	Ce	W	Pb	Th
G	60	45	34	31	24	22,5	8	5,7	3,2

Analiza structurală. Pe baza difracţiei razelor X se pot determina sistemul (sau singonia) din care face parte un cristal, dimensiunile celulei de bază (celulă elementară), poziţia diferiţilor atomi în celulă etc. În acest scop se utilizează diferite metode dintre care amintim: — metoda Laue în care un fascicul policromatic de raze X cade pe un monocristal fix şi dă figuri de difracţie pe un film de asemenea fix (fig. 14 şi 15).

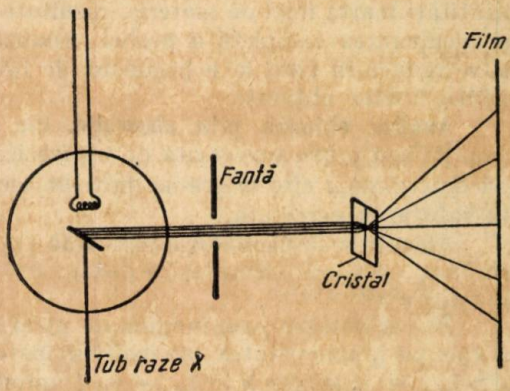


Fig. 14. — Metoda Laue

Din figura de difracţie obţinută, prin metode speciale gnomonice şi stereoscopice se poate deduce apoi geometria spaţială a cristalului dat.

Metoda Debye-Scherer, sau metoda pulberilor cristaline, foloseşte un fascicul monocromatic de raze X care cad pe un mic cilindru rotitor format prin presarea pulberii. Datorită orientării haotice a microcristalelor pulberii, se vor găsi întotdeauna, unele dintre ele, care să satisfacă relaţia (22) şi să dea linii de difracţie pe un film aşezat circular în jurul cristalului, într-o aşa numită « cameră de difracţie » (fig. 16 şi 17).

S-a văzut că pentru a determina parametrul de reţea din relaţia lui Bragg

$$2\,d \sin \theta = n\,\lambda$$

trebuie să determinăm pe θ şi să cunoaştem pe λ.

În acest scop se foloseşte o cameră Debye (fig. 18) şi din măsurarea distanţei dintre două linii de pe film se găseşte:

$$\frac{p}{\pi D} = \frac{4\theta}{360^\circ}, \qquad (28)$$

de unde

$$\theta = \frac{90}{\pi D}\,p = \text{const. } p. \qquad (29)$$

(p se măsoară pe film — fig. 18).

Folosind relaţiile (21), (22) şi (29) găsim:

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \sin.\ \text{const. } p = n\,\lambda. \qquad (30)$$

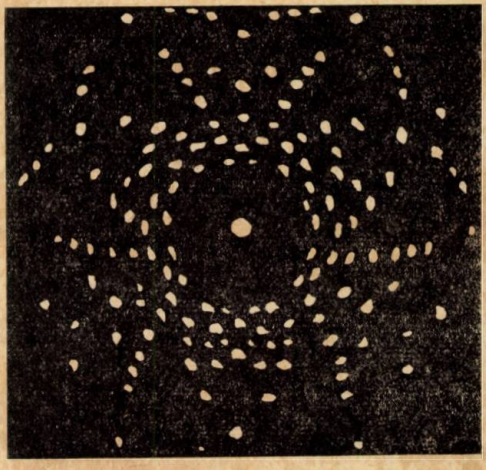


Fig. 15. — Laue-grama pe cristal de cuarţ.

Pentru o reţea cubică simplă difracţia se face numai pe acele plane pentru care indicii cristalografici (h, k, l) satisfac o relaţie de forma

$$h^2 + k^2 + l^2 = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Relaţii analoge se stabilesc pentru celelalte tipuri de reţea.

Tot cu ajutorul difracţiei razelor X se pot cerceta tensiunile în reţelele cristaline, deformările reţelei etc. Pe lîngă aplicaţiile lor în practica de laborator, razele X (în ultimul timp, şi razele γ date de Co^{60}) se aplică foarte mult direct în uzinele producătoare de maşini, materiale de construcţii etc. Toate aceste aplicaţii formează obiectul aşa numitei defectoscopii.

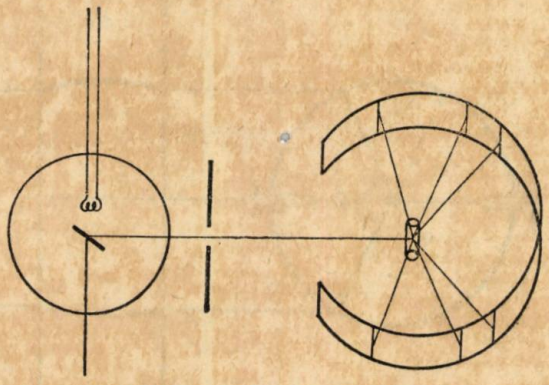


Fig. 16. — Metoda Debye-Scherer.

Defectoscopia cu raze X. Instalaţiile de raze X pentru defectoscopie, lucrează la tensiuni mari de ordinul 250 kV şi sînt instalate în atelierele prelucrătoare, pe şantiere navale, sau de construcţii etc. Pentru cercetarea calităţii unei suduri, de pildă la un cazan de locomotivă, se pune un film fotografic într-o casetă de cauciuc, care se fixează pe un suport de lemn de peretele cazanului în dreptul sudurii. În partea opusă a peretelui se aşază tubul de raze X şi apoi se lasă fasciculul să iradieze sudura respectivă, în funcţie de grosimea peretelui dat, un număr oarecare de minute. Se developează apoi filmul şi din analiza înnegririi lui, se vede dacă sudura este omogenă.

În industria sîrmei, razele X sînt folosite la cercetarea orientării cristalitelor din materialul respectiv (Cu, Al, oţel etc.), în funcţie de procesul de prelucrare (laminare, tratamente termice etc.).

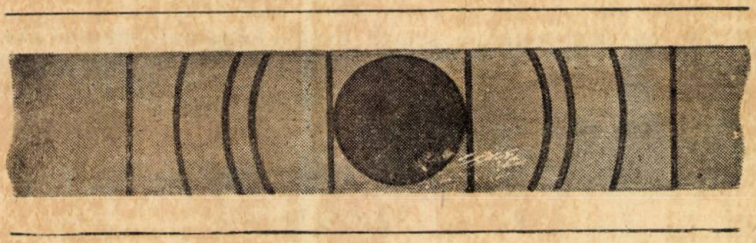


Fig. 17. — Debye-grama.

Din cercetarea datelor obţinute se pot trage o serie de concluzii asupra proprietăţilor materialului: conductibilitate electrică, rezistenţă mecanică, rezistivitate etc.

De remarcat că analiza cu raze X în unele lucrări industriale (precum şi defectoscopia γ) mai ales pe şantierele navale, este normă obligatorie pentru produsele respective.

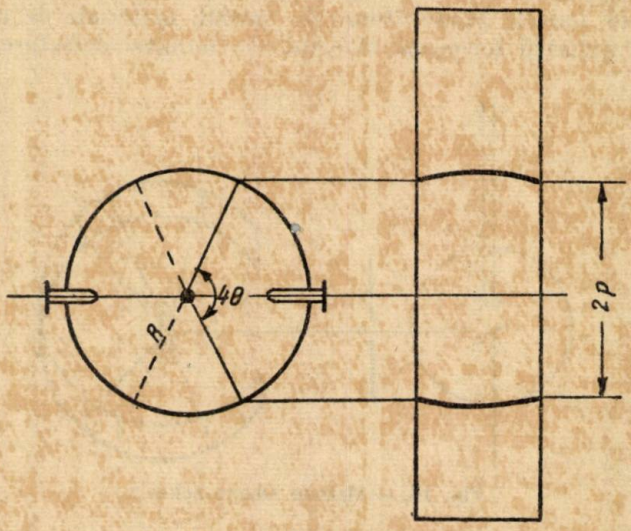


Fig. 18. — Cameră Debye şi calculul unghiului θ.

Din analiza de mai sus rezultă importanţa deosebită a metodelor moderne de cercetare a materiei, pe care ni le pun la dispoziţie razele X.

NOTE MATEMATICE

ASUPRA PATRULATERULUI CONVEX ŞI TEOREMA LUI PTOLEMEU

REDĂM în întregime, o scurtă notă a matematicianului Dimitrie Pompeiu publicată în Revista Matematică din Timişoara, anul XXII, nr. 6, pag. 67, sub titlul: «*O observare asupra patrulaterului convex şi o problemă*».

«1. Să plecăm de la identitatea:

$$\frac{x+y}{y+z} \equiv \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)(x+z)} \tag{1}$$

în care x, y şi z sînt numere oricare: reale sau complexe.

Efectuînd calculele în membrul al doilea al identităţii (1), găsim:

$$\frac{x+y}{y+z} \equiv \frac{yz + x(x+y+z)}{xy + z(x+y+z)}. \tag{2}$$

2. Să presupunem acum că x, y şi z sînt numere complexe şi să interpretăm identitatea (2) vectorial, în modul următor: $ABCD$ este un patrulater convex cu laturile *orientate* astfel:

vectorul $\overline{AB}$ corespunde numărului complex x;

vectorul $\overline{BC}$: numărului complex y; iar numărul z corespunde vectorului $\overline{CD}$.

În aceste condiţii vectorului $\overline{AD}$ îi corespunde suma de numere complexe, $x + y + z$; iar numerele complexe $x + y$ şi $y + z$ au, ca interpretare geometrică: diagonalele AC şi BD, segmente orientate (vectori).

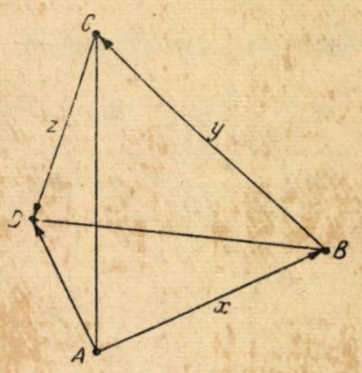


Fig. 1

3. Am interpretat astfel, geometriceşte sau mai bine, vectorial, identitatea (2). Ce înseamnă dar, geometriceşte, această identitate (2)?

Într-un patrulater convex oricare, orientat, raportul între diagonale-vector este egal cu raportul între sumele de produse ale laturilor-vectori care, respectiv, se întîlnesc la capetele fiecăreia din diagonale.

Însă, în cărţile clasice de Geometrie, noi avem o teoremă analogă pentru patrulaterul convex, însă cu condiţia expresă ca acest patrulater să fie *inscriptibil.*

În teorema clasică e vorba de lungimi simple (numere pozitive) adică, dacă ne raportăm la vectorii noştri, *de module.*

Prin urmare, păstrînd tot notaţiile noastre, cu numere complexe, în cazul particular al patrulaterului inscriptibil, identitatea (2) rămîne adevărată şi sub forma:

$$(3) \qquad \frac{|x+y|}{|y+z|} \equiv \frac{|y|\cdot|z|+|x|\cdot|x+y+z|}{|x|\cdot|y|+|z|\cdot|x+y+z|}.$$

Aceasta este teorema clasică pentru patrulaterul *inscriptibil.*

4. Dar atunci se impune următoarea cercetare: Cum se face că, prin introducerea condiţiei de *inscriptibilitate* în relaţia (2) numerile complexe (cu modul şi argument) ajung să fie înlocuite cu modulele lor?

Aceasta este problema pe care o punem cititorului pe care chestiunea îl poate interesa ».

★

Folosind relaţia (3) din nota de mai sus, tov. *Gh. Bercea*, student, Timişoara, face următoarele particularizări şi observări.

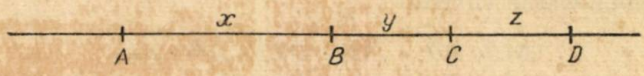


Fig. 2

II. Să presupunem că punctele A, B, C, D sînt pe o axă (fig. 2), în acest caz relaţia (3) este evident satisfăcută.

1. Fie acum cele patru puncte A, B, C, D aşezate pe un arc (fig. 3). Dreapta $A'B'C'D'$ este transformata prin inversiune a cercului $ABCD$, centrul de inversiune fiind un punct I pe cercul $ABCD$, anume pe arcul AD,

iar puterea de inversiune $k > 0$. Cu notaţiile $A'B' = x$, $B'C' = y$, $C'D' = z$ relaţia (3) se scrie:

$$(4) \qquad \frac{A'C'}{B'D'} = \frac{B'C' \cdot C'D' + A'B' \cdot A'D'}{A'B' \cdot B'C' + C'D' \cdot A'D'}.$$

Cum însă

$$A'C' = AC \cdot \frac{k}{IA \cdot IC}\ ;\ \text{etc.},$$

relaţia (4) se transformă în

$$\frac{AC\dfrac{k}{IA \cdot IC}}{BD\dfrac{k}{IB \cdot ID}} = \frac{BC \cdot CD\dfrac{k^2}{IB \cdot IC \cdot IC \cdot ID} + AB \cdot AD\dfrac{k^2}{IA \cdot IB \cdot IA \cdot ID}}{AB \cdot BC\dfrac{k^2}{IA \cdot IB \cdot IC \cdot ID} + CD \cdot AD\dfrac{k^2}{IA \cdot ID \cdot IC \cdot ID}}$$

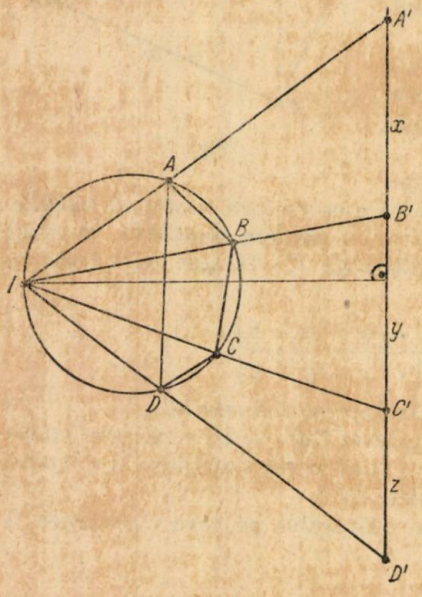


Fig. 3

sau

$$(5) \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{IA^2 \cdot BC \cdot CD + IC^2 \cdot AB \cdot AD}{ID^2 \cdot AB \cdot BC + IB^2 \cdot CD \cdot AD}.$$

Ţinînd seama şi de relaţia clasică (3) putem scrie:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD} =$$

$$= \frac{IA^2 \cdot BC \cdot CD + IC^2 \cdot AB \cdot AD}{ID^2 \cdot AB \cdot BC + IB^2 \cdot CD \cdot AD}.$$

Cititorii pot observa că relaţia (5) se menţine oriunde ar fi I pe cercul $ABCD$.

2. Cînd I se confundă cu A ($I \equiv A$), atunci

$$IA = 0;\ IC = AC;\ ID = AD;\ IB = AB$$

şi relaţia (5) devine

$$\frac{AC}{BD} = \frac{0 + AC^2 \cdot AB \cdot AD}{AD^2 \cdot AB \cdot BC + AB^2 \cdot CD \cdot AD}$$

sau făcînd simplificările cuvenite:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD,$$

adică cunoscuta teoremă a lui Ptolomeu.

Se pot face şi alte particularizări ale relaţiei (5); de exemplu, dacă patrulaterul $ABCD$ devine trapez isoscel (AD şi BC baze), atunci se obţine:

$$AD\ (IB^2 - IC^2) = BC\ (IA^2 - ID^2)\ \text{etc.}$$

* * *

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2221 *)

Într-un cerc printr-un punct oarecare C de pe coarda AB se duc coardele MN și PQ. Fie D și E intersecțiile dreptei AB cu dreptele PN și MQ respectiv. Există relația:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{DC}.$$

În cazul că $AC = BC$ avem problema 2221.

* * *

Soluție și generalizare date de *Nicolae Teodorescu*, cl. X. s.m. 2 București. — Dreptele PN și MQ se întîlnesc în O. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiul ODE, tăiat de transversalele PCQ și MCN, avem:

$$\frac{OP}{DP}\cdot\frac{DC}{CE}\cdot\frac{EQ}{OQ}=1,$$

$$\frac{OM}{EM}\cdot\frac{CE}{DC}\cdot\frac{DN}{ON}=1.$$

Împărțind aceste relații obținem:

$$(1)\qquad \frac{DC^2}{CE^2}=\frac{DP\cdot OQ\cdot OM\cdot DN}{OP\cdot EQ\cdot EM\cdot ON}.$$

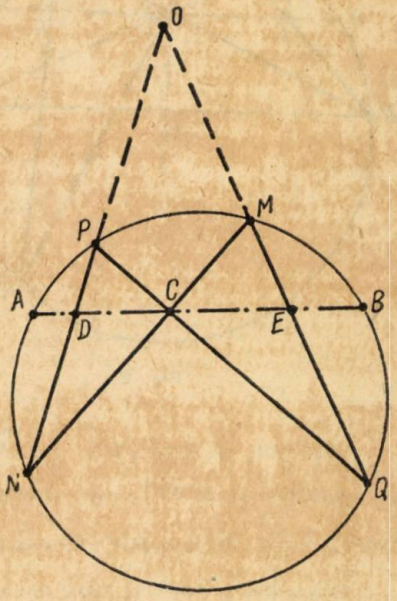


Fig. 1

Dar ținînd seama de puterea punctului Q față de cerc avem:

$$OP\cdot ON=OM\cdot OQ,$$

$$(2)\qquad \frac{DC^2}{CE^2}=\frac{DP\cdot DN}{EM\cdot EQ},$$

Ținînd seamă de puterile punctelor D și E față de cerc avem:

$$DP\cdot DN=DA\cdot DB;$$
$$EM\cdot EQ=EB\cdot EA$$

și ținînd seama că:

$$DA=AC-DC\ ;\ DB=BC+DC;$$
$$EB=BC-CE\ ;\ EA=AC+CE;$$

avem:

$$DA\cdot DB=(AC-DC)(BC+DC)=AC\cdot BC+AC\cdot DC\cdot DC-DC\cdot BC-DC^2,$$
$$EB\cdot EA=(BC-CE)(AC+CE)=AC\cdot BC+BC\cdot CE-AC\cdot CE-CE^2.$$

Relația (2) devine

$$\frac{DC^2}{CE^2}=\frac{AC\cdot BC+AC\cdot DC-DC\cdot BC-DC^2}{AC\cdot BC+BC\cdot CE-AC\cdot CE-CE^2},$$

*) Problema 2221, în cazul particular al enunțului a mai fost rezolvată la pag 155, nr. 3/ 1957.

de unde

$$DC^2 \cdot AC \cdot BC + DC^2 \cdot BC \cdot CE - DC^2 \cdot AC \cdot CE - DC^2 \cdot CE^2 =$$
$$= CE^2 \cdot AC \cdot BC + CE^2 \cdot AC \cdot DC - CE^2 \cdot DC \cdot BC - DC^2 \cdot CE^2$$

Această relație devine succesiv:

$$DC^2 \cdot AC \cdot BC + DC^2 \cdot CE\,(BC - AC) = CE^2 \cdot AC \cdot BC - CE^2 \cdot DC \cdot (BC - AC)$$

sau,

$$CE^2 \cdot DC \cdot (BC - AC) + DC^2 \cdot CE\,(BC - AC) = CE^2 \cdot AC \cdot BC - DC^2 \cdot AC \cdot BC,$$

sau

$$CE \cdot DC\,(BC - AC)(CE + DC) = AC \cdot BC\,(CE - DC)(CE + DC),$$

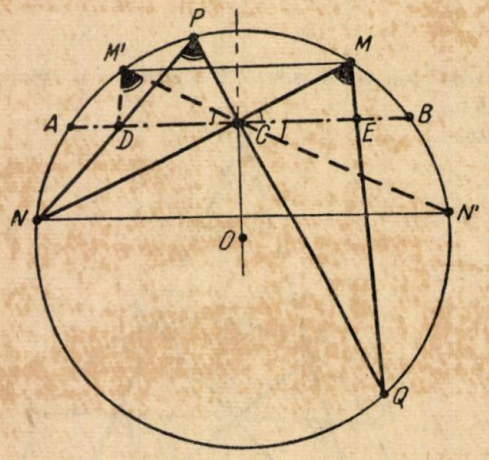


Fig. 2

aus

$$\frac{BC - AC}{AC \cdot BC} = \frac{CE - DC}{CE \cdot DC},$$

sau

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{DC} - \frac{1}{CE},$$

adică

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{DC} + \frac{1}{BC}.$$

Pentru $AC = BC$ avem problema 2221, adică $DC = CE$.

Altă soluție—Problema 2221 se poate rezolva astfel: Considerăm $AC = BC$. Fie M_1CN' simetrica lui MCN față de diametrul ce trece prin C. Avem evident,

$$MM' \parallel NN' \parallel AB;\ CM' = CM;$$
$$\sphericalangle M'CD = \sphericalangle MCE.$$

Observăm că $\sphericalangle M'PD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AM'} + \overset{\frown}{AN}\right) = \sphericalangle M'CD$, deci patrulaterul $M'PCD$ este inscriptibil și $\sphericalangle DM'C = \sphericalangle DPC$; dar cum $\sphericalangle DPC = \sphericalangle CME = \frac{\overset{\frown}{NQ}}{2}$, avem $\sphericalangle DM'C\,\acute{A} = \sphericalangle CM'E$, și cum $M'C = MC$, avem $\sphericalangle M'CD = \sphericalangle MCE$.

Triunghiurile $DM'C$ și EMC sînt egale, deci $DC = CE$.

Problema 2306

Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ cu centrul de greutate G și un punct Z din spațiu. Să se stabilească relația:

$$\sum ZA_1^2 = 4ZG^2 + \sum GA_1^2.$$

M. D. Zigulescu, student București

Soluție. — Facem notațiile: $A_iA_j = a_{ij}$, $i,\ j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$.

1. Dacă ABC este un triunghi oarecare cu centrul de greutate G, iar M este un punct în spațiu sau în același plan cu triunghiul, atunci există relația

(1) $$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

a cărei demonstrație este expusă în nota tov. **S. Postolache**, nr 6/956 G.M.F.—B (pentru cazul M în planul triung. ABC). Demonstrația nu diferă chiar dacă M este în spațiu Relația (1) se mai scrie:

(1') $$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(BC^2 + AB^2 + AC^2).$$

2. Aplicînd relaţia (1′) celor 4 feţe ale tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$, obţinem:

pentru triunghiul $A_1A_2A_3$: $ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 = 3G_4Z^2 + \frac{1}{3}(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)$ şi încă trei relaţii analoage pentru feţele $A_1A_2A_4$; $A_1A_3A_4$; $A_2A_3A_4$.

Prin adunare:

$$3(ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2) =$$

$$= 3(G_1Z^2 + G_2Z^2 + G_3Z^2 + G_4Z^2) + \tag{2}$$

$$+ \frac{2}{3}(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2).$$

Aplicînd în triunghiul ZA_iG_i relaţia lui *Stewart*, avem:

$$ZA_i^2 \cdot GG_i + ZG_i^2 \cdot A_iG_i =$$

$$= ZG^2 \cdot A_iG_i + A_iG \cdot GG_i \cdot A_iG_i. \tag{3}$$

Notînd $A_iG_i = m_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; (m_i = mediane)

avem: $GG_i = \frac{1}{4}m_i$; $A_iG = \frac{3}{4}m_i$; $A_iG_i = m_i$.

Relaţiile (3) devin:

$$\frac{ZA_i^3}{4} + \frac{3}{4}ZG_i^2 = ZG^2 + \frac{3}{16}m_i^2.$$

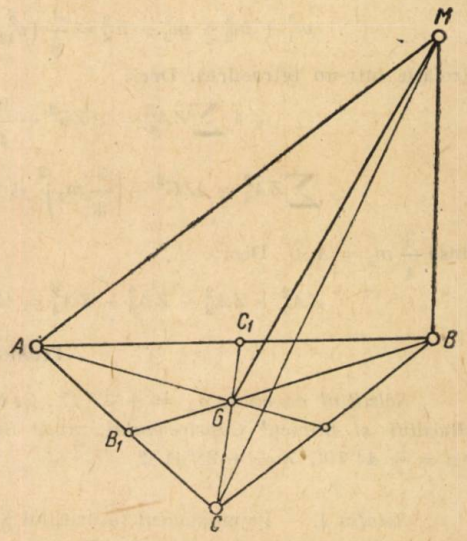


Fig. 1

Prin adunare obţinem:

$$\frac{1}{4}\sum ZA_i^2 + \frac{3}{4}\sum ZG_i^2 = 4ZG^2 + \frac{3}{16}\sum m_i^2. \tag{4}$$

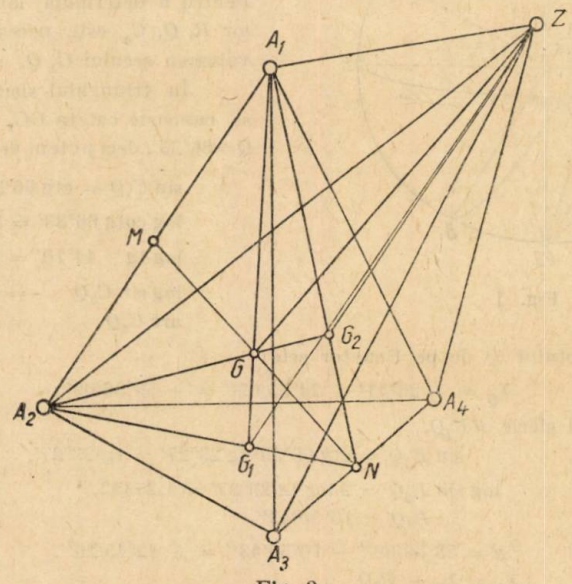


Fig. 2

Ţinînd seama de (4) relaţia (2) devine

$$4\sum ZA_i^2 = 16\,ZG^2 + \frac{3}{4}\sum m_i^2 + \frac{2}{3}\sum a_{ij}^2; \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, (i \neq j).$$

Dar:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = \frac{4}{9}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right)$$

(relaţie într-un tetraedru). Deci:

$$4\sum ZA_i^2 = 16ZG^2 + \frac{9}{4}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_2^2 + m_4^2\right);$$

$$\sum ZA_i^2 = 4ZG^2 + \left(\frac{3}{4}m_1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}m_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}m_3\right)^2 + \left(\frac{3}{4}m_4\right)^2,$$

însă $\frac{3}{4}m_i = A_iG$. Deci:

$$ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2 = 4ZG^2 + GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2.$$

Problema 2334

Solstiţiul de vară, $\delta_+ = +23°27'$. *Ce longitudine au punctele de pe Ecuator, tropicul Racului şi tropicul Capricornului, unde Soarele răsare în acelaşi timp ca la Constanţa* ($\varphi = +44°10'$, $\lambda = +28°41'$)?

C. V. Costăchescu

Soluţia I. — În momentul răsăritului Soarelui, emisferul $AE'B$ este luminat de Soare, iar emisferul AEB este întunecat. Pe semicercul A, C (Constanţa), R (punct pe tropicul Racului), Q (punct pe Ecuator), C_a (punct pe tropicul Capricornului B) Soarele răsare.

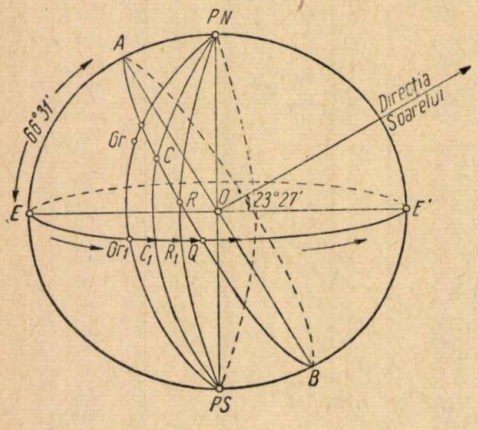


Fig. 1

Unghiul dintre planul Ecuatorului şi planul cercului mare AQB este de 66°33′. Pentru a determina longitudinea punctelor R, Q, C_a este necesar să determinăm valoarea arcului C_1Q.

În triunghiul sferic CC_1Q ($C_1 = 90°$) se cunoaşte cateta $CC_1 = 44°10'$ şi unghiu $Q = 66°33'$, deci putem determina arcul C_1Q:

$$\sin C_1Q = \operatorname{ctg} 66°33' \operatorname{tg} 44°10'$$
$$\log \operatorname{cotg} 66°33' = \bar{1},63726$$
$$\log \operatorname{tg} \quad 44°10' = \bar{1},98737$$
$$\log \sin C_1Q \quad = \bar{1},62463$$
$$\operatorname{arc} C_1Q \quad = 24°55'09''$$

Longitudinea punctului Q de pe Ecuator este:

$$\lambda_Q = +28°41' + 24°55'09'' = +53°36'09''.$$

În triunghiul sferic RR_1Q,

$$\sin R_1Q = \operatorname{ctg} 66°33' \operatorname{tg} 23°27' = \operatorname{tg}^2 23°27',$$
$$\log \sin R_1Q = 2 \log \operatorname{tg} 23°27' = \bar{1},27452,$$
$$R_1Q = 10°50'43'',$$
$$\lambda_R = 53°36'09'' - 10°50'43'' = +42°45'26'',$$
$$\lambda_R = \lambda_Q - R_1Q.$$

Analog,

$$\lambda C_a = \lambda_Q + QC_{a_1} = + 64°26'52''.$$

Soluția II. — Considerăm formula înălțimii:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \delta \cos P \ (P = \text{unghiul la pol}).$$

În momentul răsăritului, $h = 0$, $\sin h = 0$.

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P,$$

$$\cos P = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Însă,

$$P_{est} + t_a = 12^h \rightarrow 180°$$

(t_a = timpul adevărat al locului),

$$\cos P = \cos (12 - t_a) = - \cos t_a = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

$$\cos t_a = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},98737$$

$$\log \operatorname{tg} \delta = \bar{1},63726$$

$$\log \cos t_a = \bar{1},62463$$

$$t_a = 65°04'51''$$

$$- \lambda_c = 28°41'$$

$$T_a = 36°23'51''$$ (timpul adevărat la Greenwich)

Pentru punctul Q de pe Ecuator:

$$\cos t_a = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = 0$$

$$t_a = 90°$$

$$T_a = 36°23'51''$$

Rezultă: $\lambda_a = 53°36'09''$.

Pentru punctul R de pe tropicul Racului:

$$\cos t_a = \operatorname{tg} 23°27' . \operatorname{tg} 23°27'$$

$$\cos t_a = \bar{1},27452$$

$$t_a = 79°09'17''$$

$$T_a = 36°23'51''$$

$$\lambda_R = 42°45'26''.$$

Analog, $\lambda_{Ca} = + 64° . 26'52''$.

Problema 2335

Să se determine numerele întregi a, b, c astfel ca numărul $N = \dfrac{ab}{ac + b}$ *să fie întreg.*

Gh. Buicliu

Soluție. — Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, adică

(1) $$a = d\alpha \quad \text{și} \quad b = d\beta$$

cu α și β prime între ele. Expresia lui N devine

(2) $$N = \frac{d^2 \alpha\beta}{cd\alpha + \alpha\beta} = \frac{d\alpha\beta}{c\alpha + \beta}.$$

Numărul α fiind prim cu β, nu poate divide numitorul acestei fracții și nici nu poate avea divizori comuni cu el, căci atunci ar trebuie să dividă pe β sau să aibă divizori comuni cu β.

Din contră, numărul β poate divide numitorul fracției (2) sau poate avea divizori comuni cu el, dar în acest caz are divizori comuni și cu c, așa că dacă d' este cel mai mare divizor comun al numerelor β și c, trebuie să avem:

(3) $$\beta = d'\beta' \quad \text{și} \quad c = d'c'$$

cu β', c' prime între ele. Înlocuind în (2) avem:

(4) $$N = \frac{d\alpha\beta'}{\alpha c' + \beta'}$$

și fiindcă nici α, nici β' nu pot divide sau nu pot avea divizori comuni cu $\alpha c' + \beta'$, trebuie să avem:

$$d = K(\alpha c' + \beta')$$

și atunci,

$$N = K\alpha\beta',$$

iar a, b, c, după ce se trece de la (3) la (1), devin:

$$a = K\alpha\ (\alpha c' + \beta'); \quad b = K\beta' d'(\alpha c' + \beta'); \quad c = d'c',$$

unde α este prim cu β' și β' este prim cu c', iar K și d' pot fi orice numere, inclusiv unu.

Problema 2336

Într-un triunghi oarecare ABC, trei ceviene AA_1, BB_1, CC_1 concură în M. Dreapta B_1C_1 taie pe AA_1 în A_2. Să se arate că:

(1) $$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{MA_1}{MA_2},$$

(2) $$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{B_1C}{C_1B}.$$

Gh. I. Bercea, student

Soluție. — 1) Conform teoremei lui Menelaus, în triunghiul C_1AM cu transversala BA_1C; în triunghiul BAM cu transversala C_1A_2B; în triunghiul C_1BM cu transversala AB_1C, avem:

(1) $$\frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{A_1A}{A_1M} \cdot \frac{CM}{CC_1} = 1,$$

(2) $$\frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{A_2A}{A_2M} \cdot \frac{B_1M}{B_1B} = 1,$$

(3) $$\frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{BB_1}{B_1M} \cdot \frac{CM}{CC_1} = 1.$$

Împărțind (1) la (2) și (3) deducem după simplificări:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{MA_1}{MA_2}.$$

2. Conform teoremei lui Menelaus, în triunghiul BB_1C cu transversala MA_2A; în triunghiul C_1AM cu transversala BA_1C; în triunghiul B_1MA cu transversala BA_1C; în triunghiul BC_1M cu transversala ACB_1, avem:

(I) $$\frac{MB}{MB_1} \cdot \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{AC_1}{AB} = 1,$$

(II) $$\frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{A_2A}{A_1M} \cdot \frac{CM}{CC_1} = 1,$$

(III) $$\frac{BB_1}{BM} \cdot \frac{A_1M}{A_2A} \cdot \frac{CA}{CB_1} = 1,$$

(IV) $$\frac{AB}{AC_1} \cdot \frac{CC_1}{CM} \cdot \frac{B_1M}{BB_1} = 1.$$

Înmulțind (I) cu (II) și (III) cu (IV) după simplificări rezultă relația din enunț.

Observare. — Relația (1) este evidentă deoarece se știe că într-un patrulater complet (în cazul de față AC_1MB_1BC) două diagonale divid armonic pe a treia.

Problema 2338

Să se determine x și y astfel ca relațiile:

$$\cos(7x - a) = \sqrt{2}\cos(5x - a) - \cos(3x - a),$$

$$\cos(6x - a) = y\cos(5x - a) - \cos(4x - a),$$

să devină identități.

Alex. Dan Popescu, student. București

Soluție. — Prima relație se scrie:

$$\cos(7x - a) + \cos(3x - a) = \sqrt{2}\cos(5x - a),$$

$$2\cos(5x - a)\cos 2x = \sqrt{2}\cos(5x - a),$$

de unde

$$2\cos 2x = \sqrt{2},$$

deci,

(1) $$x = (8k + 1)\frac{\pi}{8}.$$

Relația a doua devine:

$$\cos(6x - a) + \cos(4x - a) = y\cos(5x - a)$$

$$2\cos(5x - a)\cos x = y\cos(5x - a),$$

de unde

$$y = 2\cos x,$$

deci,

(2) $$y = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

PROBLEME PROPUSE *

2772. Dacă $(a^2 - b^2)\sin 2x - 2ab\cos^3 x = 0$, să se afle ce valori poate avea $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ și $\operatorname{tg} 2x$. Caz numeric $a = 1$, $b = 2$.

C. Ionescu-Țiu

2773. Bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C ale unui triunghi taie laturile opuse respectiv în A', B', C'.

1°. Puterile X, Y, Z ale punctelor A, B, C în raport cu cercul $A'B'C'$ au următoarele expresii:

$$X = \frac{1}{2}bc\left(-\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right); \quad Y = \cdots; \quad Z = \cdots;$$

ultimele două expresii se deduc din prima prin permutarea circulară a literelor a, b, c.

2° Axele radicale ale cercurilor $AB'C'$; $BC'A'$; $CA'B'$ cu cercul ABC întâlnesc laturile BC, CA, AB în trei puncte situate pe polara triliniară a izogonalului complementarului centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

3° Să se generalizeze luînd în loc de bisectoare niște ceviene oarecari.

C. Coșniță

---

* La problemele de fizică nu se trimite partea teoretică, ci numai rezolvarea problemei dată la Olimpiadă.

2774. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$5(x^2 + y^2) + 4xy = 902.$$

* * *

2775. Să se arate că în orice triunghi cercul celor nouă puncte este tangent cercurilor înscrise în triunghiurile determinate de ortocentru și două din vîrfuri.

Iacob Hadîrcă, profesor Breaza

2776. Fie C un punct pe mediatoarea segmentului AB. Să se afle locul geometric al punctelor pentru care: $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2AC^2$.

N. N. Anițescu, Tg. Jiu.

2777. Se notează

$$A = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)};$$

$$B = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} + \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)};$$

$$2C = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} + \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}.$$

Să se demonstreze relația: $AB - C^2 = 1:2$.

Gh. Popescu, profesor, Lugoj

2778. Se se arate că:

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2 3\alpha} + \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\cos^2 3\alpha\cos^2 5\alpha} + \frac{\cos 10\alpha - \cos 2\alpha}{\cos^2 5\alpha\cos^2\alpha} = 0.$$

Em. Alexandru, student București

2779. Să se construiască triunghiul oarecare ABC cunoscînd raza r a cercului înscris, latura AB, precum și segmentul DB (D punctul de tangență a laturii BC cu cercul înscris).

Ion Matescu, profesor Giurgiu

2780. Se dă o piramidă pentagonală regulată $VABCDE$, iar pe muchia VA se ia punctul A'. Pe muchiile alăturate se iau respectiv punctele G și F. Să se determine grafic intersecția planului GAF cu planul bazei și cu fețele laterale.

* * *

2781. Se dă un paralelogram $ABCD$. Pe latura AB se ia un punct M și pe latura BC un punct N. Dreapta AN taie dreptele DM și CM respectiv în U și V; dreapta CM se taie cu DN în T.

Să se arate că suma ariilor triunghiurilor AUM, CNT, și a patrulaterului $MVNB$ este echivalentă cu aria patrulaterului $DUVT$.

Simon St. Petre

2782. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) și M un punct mobil pe BC. Perpendiculara ridicată în M pe latura BC taie laturile AB și AC în F și E. Notăm cu O_1 și O_2 centrele cercurilor BFM și CEM, iar cu L a doua intersecție a lor.

a) Să se găsească locul geometric al punctului L.

b) Dacă B' este simetricul punctului B față de dreapta MO_1, iar C' simetricul lui C față de MO_2, să se arate că punctele C, L, B' și punctele B, L, C' sînt colineare.

c) Să se arate că dreapta ML trece printr-un punct fix.

d) Să se arate că dreptele CC' și BB' trec printr-un punct fix comun.

Kiss Elemer

2783. În triunghiul ABC notăm cu d_a, d_b, d_c distanțele centrului de greutate respectiv la laturile BC, AC, AB. Să se demonstreze relația:

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}=\frac{3}{r},$$

r fiind raza cercului înscris triunghiului ABC.

* * *

2784. Pentru a determina indicele de refracție al unui lichid s-a folosit dispozitivul următor :

Printr-o lunetă L cu reticul, ce formează un unghi constant $\alpha = 45°$ cu verticala, se vizează o riglă gradată R așezată în poziție verticală într-un vas V, la început gol. Se constată că în lunetă, în dreptul reticului, se vede punctul A unde se află trasată pe riglă diviziunea 10 cm. Se toarnă în vas lichidul de studiat pînă la diviziunea $N = 20$ cm și se constată că în lunetă se vede acum diviziunea $A' = 3$ cm.

Să se deducă indicele de refracție al lichidului.

* * *

2785. Într-o fabrică de eter se produc în timpul fabricației diverse gaze; după condensarea eterului din ele aceste gaze sînt evacuate în atmosferă printr-un tub, fiind saturate în eter. Tubul de evacuare are diametrul de 2 cm, viteza gazelor în tub este de 2m/s, iar temperatura gazelor de 10° C. Se propune să se treacă gazele printr-un tub răcitor așezat într-un vas cu amestec refrigerent la — 10°. Care va fi cantitatea de eter ce se va recupera în 24 ore?

Tensiunea vaporilor de eter la + 10° este 29 cm; la — 10° este 12 cm.

* * *

2786. Fie B', C' punctele de tangență ale laturilor AC, AB cu cercul I înscris triunghiului ABC. Se notează analog cu (B'_a, C'_a), (B'_b, C'_b); (B'_c, C'_c) punctele de tangență ale aceloraşi laturi respectiv cu cercurile exînscrise I_a, I_b, I_c. Să se demonstreze că dreptele $B'C'$, $B'_a C'_a$, $B'_b C'_b$, $B'_c C'_c$ formează un dreptunghi ale cărui vîrfuri se află la intersecțiile bisectoarelor unghiurilor B și C cu cercul de diametru BC.

Gh. Buicliu

2787. Aerul din interiorul unei bule cu aer de rază $R = 2.10^{-4}$ mm, aflată în interiorul unui lichid, se găsește sub o presiune de P atm. Să se determine natura lichidului pentru care avem satisfăcută relația:

$$P - h = H + 0{,}72 \text{ atm},$$

unde H este presiunea atmosferică și h este presiunea exercitată de lichid asupra aerului din bulă.

Stăncescu N. Emil, student București

2788. Fie un segment AB și M mijlocul său. Prin M se duce o dreaptă care taie cercul tangent în B, la AB în C și D. Dreptele AC și AD taie cercul respectiv în F și E. Dreptele AF și EB se întîlnesc în P. Dreapta MP taie cercul în Q. Dreptele QE și QF taie pe AB în G și H. Să se arate că:

a) dreapta EF rămîne paralelă cu AB.

b) $AG = BH$.

(În legătură cu problema 1548).

N. Teodorescu, elev București

2789. Să se afle locul geometric al ortopolului unei drepte variabile care trece printr-un punct fix, față de un triunghi fix.

V. Baltag, elev Ploești

2790. Ce putere are motorul unui autocamion a cărui greutate proprie împreună cu încărcătura este de 7000 kg, dacă ridică uniform în timp de 10 minute un deal de 500 m înclinat faţă de orizontală cu 30°. Se neglijează frecările.

Teorie: Compunerea forţelor paralele; centru de greutate.

(Olimpiada de fizică 1957, etapa finală, clasa VIII-a)

2791. O locomotivă cu randamentul de 12% lucrează trei ore avînd puterea medie de 2000 C.P.

Ce cantitate de cărbuni consumă ea în acest timp, puterea calorică a cărbunilor fiind de 7000 kcal/kg.

Teorie: Vapori saturanţi, vapori nesaturanţi; proprietăţile şi legile lor.

(Olimpiada de fizică 1957, etapa finală, clasa IX-a)

2792. Un voltmetru cu rezistenţa de R ohmi este folosit pentru măsurarea tensiunilor pînă la U volţi. Se cere:

Mărimea rezistenţei suplimentare ce trebuie introdusă în circuitul voltmetrului pentru ca să se poată măsura cu el o tensiune de 6 U volţi.

(Olimpiada de fizică 1957, etapa finală, clasa X-a)

2793. Într-un circuit cu rezistenţa de 0,5 Ω intensitatea curentului electric variază de la 2 la 20 A. Se cere:

— să se construiască graficul căderii de tensiune în circuit în funcţie de intensitatea curentului;

— care va fi graficul în cazul cînd rezistenţa circuitului devine egală cu 1 Ω?

— Care va fi reprezentarea grafică a curentului dintr-un circuit în funcţie de variaţia rezistenţei, ştiind că tensiunea aplicată este de 5 V?

Teorie: Metode pentru determinarea lungimilor de undă.

(Olimpiada de fizică 1957, etapa finală, clasa X-a)

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA EXAMENUL DE MATURITATE ÎN IUNIE 1957 — BUCUREŞTI

Subiectul 1.

2794. O piramidă cu vîrful S şi baza dreptunghiul $ABCD$, are muchiile egale cu m, muchia sa formează cu latura AB un unghi a şi cu latura AD un unghi b.

1) Să se afle aria laterală şi volumul piramidei.

2) Să se determine unghiurile a şi b, ştiind că $a - b = 45°$, iar aria laterală a piramidei este egală cu m^2.

2795. Să se rezolve sistemul

$$x^2 + 4y^2 = \frac{2m^2 + 8m - 39}{2},$$

$$xy = \frac{8m^2 - 28m + 9}{8}.$$

Între ce valori trebuie să varieze m pentru ca rădăcinile sistemului să fie reale?

2796. Într-un semicerc cu raza de 10 cm se înscrie un triunghi dreptunghic ABD cu vîrful unghiului drept în A şi cu unghiul din B de 30°. Într-un punct

al ipotenuzei M se ridică o perpendiculară care întîlneşte cateta AC în N, prelungirea catetei AB în P şi cercul în punctul Q.

1) Să se demonstreze că $\overline{MQ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{MP}$.

2) Să se determine poziţia lui M astfel încît raportul volumelor corpurilor rezultate prin rotirea segmentelor NC şi BP în jurul diametrului BC să fie $\frac{1}{24}$.

Subiectul 2.

2797. Două cercuri cu centrele O şi O' cu razele de 3 cm şi 4 cm, cu distanţa centrelor $OO' = 5$ cm. Fie A şi B punctele de intersecţie ale celor două cercuri. Se duc tangentele comune exterioare care se intersectează în punctul S. Se notează cu T şi T' punctele de contact ale uneia din aceste tangente cu cele două cercuri.

Prin punctul A de intersecţie al celor două cercuri se duc două secante oarecari care taie cercul de centru O în punctele C, D iar celălalt cerc în punctele C, D'.

1) Să se calculeze lungimea segmentelor TT' şi SO'.

2) Să se arate că dreptele CD şi $C'D'$ sînt perpendiculare.

3) Să se afle aria corpului rezultat prin rotirea cercurilor în jurul dreptei OO'.

2798. Să se rezolve ecuaţia

$$m \cos 2x + 2 (m^2 + 3) \sin x - 7 m = 0.$$

Între ce valori trebuie să varieze m, ca ecuaţia să admită rădăcini reale?

2799. Să se formeze ecuaţia de gradul II cunoscînd suma S a rădăcinilor şi realizantul R.

$$S = 2 (m - 1) \quad ; \quad R = 4 (m^2 - m - 2).$$

Rădăcinile acestei ecuaţii fiind x_1 şi x_2 să se determine m aşa ca $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = 2$.

Subiectul 3 dat la examenul de maturitate, corijenţă iunie 1957

2800. Într-o sferă de rază r se înscrie un con a cărei generatoare face cu planul bazei un unghi u dat de ecuaţia

$$\frac{\cos u}{1 + \sin u} = 2 - \operatorname{tg} u.$$

1. Să se determine la ce distanţă de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferenţa ariilor secţiunilor determinate în sferă şi con să fie egală cu aria bazei conului.

2. Să se afle în funcţie de r, volumul tetraedrului regulat circumscris sferei.

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE MATURITATE DIN REGIUNEA TIMIŞOARA, 1957

Subiectul I.

2801. Se consideră o sferă şi perpendicular pe mijlocul unei raze OA se duce un plan care taie sfera după un cerc C în care latura pătratului înscris este egală cu a. Se prelungeşte raza OA pînă înţeapă a doua oară sfera în B. Se cere volumul conului care are vîrful în B şi ca bază, cercul (C).

2802. Să se rezolve ecuația

$$\log_{z^2}(x^2 - 2\,ab) + \log_z(x^2 - 2\,ab) = 3$$

în care $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2803. Să se rezolve ecuația:

$$2 \text{ arc tg } x + \text{arc sec } 5x = \frac{\pi}{2}.$$

Subiectul II.

2804. Se consideră un cerc cu diametrul AB. Tangentele la cerc în punctele A și B sînt intersectate în C și D de o a treia tangentă la cerc. Figura $ABCD$ rotită în jurul lui AB dă naștere unui trunchi de con. Se cere volumul acestui corp cunoscînd raza cercului R și lungimea $CD = a$.

2805. Să se rezolve ecuația

$$29 \log_{25} x^2 + 2x^2 \log_{\sqrt{x}} 2\sqrt{2} = 9 \log_{25} x + 1 - 9 \log_{25} x.$$

2806. Să se afle toate soluțiile ecuației

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 1013. Cinci elevi au fiecare aceiași sumă de bani. Dacă fiecare cheltuiește cîte 8 lei, atunci toți împreună vor mai avea cît a avut fiecare la început. Cîți lei a avut fiecare?

* * *

E: 1014. Cîți litri de apă cu temperatura de 96° și cîți litri de apă cu temperatura de 12° trebuie să se amestece pentru a se obține 100 litri de apă cu o temperatură egală cu temperatura unui amestec de 30 litri la 30° cu 50 litri la 50°?

C. I. Ț.

E: 1015. Să se arate că dacă $ab = xy$, avem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}.$$

Să se cerceteze dacă și reciproca este adevărată.

* * *

E: 1016. Dacă $a^3 + b^3 + c^3 = abc$ să se arate că

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} = \frac{(ab - c^2)(bc - a^2)(ca - b^2)}{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}.$$

(V: E: 1013, 1017, 1022, 1023, 1024).

* * *

E: 1017. O suprafață de 225 ha se repartizează pentru patru feluri de culturi; astfel că raportul părții întîia către a doua să fie egal cu 1:2; al părții a doua către a patra să fie 5:9, iar partea treia să formeze $\frac{2}{3}$ din a patra.

Să se afle suprafața de teren repartizată pentru fiecare fel de cultură în parte.

Leontin Domide, Rodna

E: 1018. Din relația:

$$\left[x-3+\frac{2}{\sqrt{3}}(z+2)\right]\left[x-3-\frac{2}{\sqrt{3}}(z+2)\right]=$$

$$=\left(1+y\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}z+\frac{3\sqrt{4}}{3}\right)\left(1-y\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}z-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

să se deducă relația

$$(x-3)^2+3\left(y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(z+2)^2=1,$$

precum și relația

$$x^2+3y^2+4\,yz-6x+8y+8=0.$$

C. I. Ț

E: 1019. Din relația $(x-1)^2+(y+z)^2-(y-z)^2=1$ să se deducă relația

$$x^2+4\,yz-2x=0.$$

* * *

E: 1020. O pilă electrică cu rezistență interioară $r=0{,}99\ \Omega$ este legată de bornele B, C ale unei rezistențe electrice $R_1=2\,\Omega$. Ampermetrul A cu rezistența $r=0{,}01\ \Omega$, montat în circuit, arată 0,6 A. Ce intensitate de curent va arăta ampermetrul A, dacă la bornele B, C se montează încă o rezistență $R_2=2\ \Omega$?

C. Necșoiu

E: 1021. Să se arate că:

$$3\,\frac{x-1}{x-2}+5\,\frac{x-2}{x-1}+\frac{x^2-x-5}{x^2-3x+2}=9.$$

Gh. Dobrotescu, profesor Predeal

E: 1022. Dacă împărțim numerele 13037 și 28 715 prin același număr, se obține respectiv restul 17 și restul 5. Care este împărțitorul?

(Clasa V, olimpiada tinerilor matematicieni, mai 1957)

E: 1023. Clasele a VIII-a, a IX-a și a X-a dintr-o școală au cumparat din fondurile claselor, materiale sportive în valoare de 4 000 lei. Clasa a VIII-a are 48 elevi și face 4 zile pe săptămînă cîte o oră pe zi antrenament; clasa a IX-a are 39 elevi și face 2 zile pe săptămînă cîte $1\frac{1}{2}$ ore antrenament pe zi; clasa a X-a are 30 elevi și face într-o singură zi pe săptămînă 2 ore de antrenament. Cît va trebui să plătească fiecare clasă dacă suma plătită trebuie să fie direct proporțională cu numărul elevilor și invers proporțională cu numărul orelor de antrenament?

Leontin Domide, Rodna

E: 1024. Ce sumă a avut cineva, dacă după ce a cheltuit $\frac{3}{5}$ din sumă, a mai cheltuit $\frac{3}{4}$ din cît îi mai rămăsese după prima cumpărătură, iar după ce a mai cheltuit încă 34 lei, constată că i-a mai rămas necheltuiți 14 lei (verificare).

(Clasa V, olimpiada tinerilor matematicieni, mai 1957)

POȘTA REDACȚIEI

— *Dorobanțu Valeriu*, absolvent Slatina. — Problemelor propuse ce ați trimis nu le-ați dat o soluție potrivită, astfel că nu pot fi publicate.

— *Osinceanu Dan*, elev Slatina. — Enunțul problemei propuse este cunoscut.

— *Tomoiagă M. Dorin*, elev Sighet. — Problemele ce le-ați propus pentru școala de 7 ani sînt prea cunoscute încît nu pot fi publicate.

— *Pop Gheorghe*, elev Satu Mare. — Odată cu rezolvările ce ați trimis am primit și angajamentul dv. de a fi un rezolvitor activ.

— *Dumitru Gh. Petre*, absolvent Tîrgoviște. — Unele probleme fără autor, cum este și problema 2482, sînt cunoscute, însă se repetă prezentînd și unele soluții interesante.

— *Lezeu Aurel*, Tulca Oradea, și *altor colaboratori*. — Problemele ce ați propus nu prezintă nici o originalitate și fiind prea banale nu se pot publica.

— *Socoliuc Gh.* elev Suceava. — Ați trimis probleme propuse fără să verificați dacă textul corespunde cu notațiile din figură. Problemele fiind prea elementare nu pot fi publicate. Urmează să vă îndepliniți mai întîi angajamentul de a fi un harnic colaborator în rezolvări de probleme și apoi să încercați să propuneți.

— *Grosu Virgil*, elev Botoșani. — Am primit odată cu rezolvările ce ați trimis și angajamentul de a rezolva cît mai multe probleme.

— *Vătu Valeriu*, elev R. Vîlcea. —Decît să trimiteți spre publicare ca originale probleme copiate din culegeri sau reviste, vă sfătuim să încercați rezolvarea unor probleme din G.M.F-B ca să puteți deveni un bun colaborator.

— *Precupan Theodor*, elev Tg. Neamț. — Trebuie să respectați indicațiile date pe coperta revistei la « Redactarea soluțiilor »; notațiile trebuie să corespundă cu textul enunțului pentru a se putea face corectarea soluțiilor. Nu înseamnă că publicarea unor chestiuni de examen folosește ca model fidel pentru respectivele examene viitoare; de aceea în G.M.F-B se caută să se propună probleme cît mai variate și mai interesante.

— *Mai multor corespondenți*. — Angajamentele ce ați luat de a rezolva cît mai multe din problemele propuse în G.M.F-B ne bucură; așteptăm rezolvarea și vă sfătuim să vă conformați și instrucțiunilor date la rubrica « *Redactarea soluțiilor* ». Propunătorii de probleme să nu mai trimită probleme cunoscute, iar cele originale să fie însoțite de soluții corecte pentru a putea fi luate în seamă.

★

ERATA

— La problema 2554 în loc de (n-1) se va scrie $(n-1)^2$.
— Problema 2502 fiind aceiași cu 2411 se înlocuiește cu 2502*.
— Problema 2594 fiind aceiași cu E: 904 se înlocuiește cu 2594*.
— La problema 2683 în loc de 1 kg se va scrie 20 kg.
— La problema 2657 în loc de EP se va scrie BP.
— La problema 2665 în loc de OD se va scrie CD.
— La problema 2692 în loc de AN se va scrie AB.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 15 mai 1957 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Niculescu Stelian (cl. 10 Caracal), *Iftimie Viorel* (cl. 10 Rădăuți), *Velicescu Mircea* (cl. 8 Tg. Jiu), *Costinescu Anca* (cl. 10 s.m. 2 Iași), *Ianuș Stere* (cl. 10 Constanța), *Vișinescu Mihai* (cl. 9 Giurgiu), *Alexa Ion* (an. III s.m.a. Sibiu), *Berca Eugen* (cl. 8 Tg. Jiu), *Cernău Rodica* (cl. 8 Dej), *Răileanu Gh.* (S.m.a. Tecuci), *Bașlurescu Mugurel* (cl. 9 Caracal), *Ciobanu Marin* (abs. Giurgiu), *Chirică Daurian* (cl. 9 s.m. 13 București), *Petre Gheorghe* (cl. 10 Giurgiu), *Strătescu Ion* (cl. 10 Călărași), *Rădulescu Constantin* (cl. 10 s.m. 4, București), *Jilăveanu Gh.* (cl. 8 Mediaș), *Dorobanțu Valeriu* (abs. Slatina), *Anițescu Nicolae* (cl. 9 Tg. Jiu), *Verveagă T.* (absolvent Bistrița, Cluj), *Stoica Dan* (cl. 8 s.m. 26 București), *Popescu Cristian* (cl. 8 Giurgiu), *Vasilescu Florian* (cl. 9 Giurgiu), *Mititelu Ștefan* (cl. 9 Călărași), *Cîrnu Mircea* (cl. 9 s.m. 3 Tîrgoviște), *Mihăiță Gh.* (cl. 10 Tg. Jiu), *Rusu Constantin* (cl. 10 Tr. Severin), *Lăscuțoiu Virgil* (abs. Ghelar, Hunedoara), *Marțiș Ioan* (cl. 10 s.m. 4 București), *Glasberg Vladimir* (cl. 9 s.m. 12 București), *Bătireanu Gh.* (abs. Buzău), *Stepan Ionel* (zidar Cobadin, Constanța), *Butulescu Ion* (cl. 10 Tg. Jiu), *Boiangiu Nicolae* (cl. 10 Ploiești), *Grigore Mihai* (an. II șc. pedag. Iași), *Bencovici Ion* (cl. 8 Tg. Jiu), *Căsăndroiu Tudor* (cl. 10 Ploiești), *Șerban Viorel* (cl. 8 Tg. Jiu), *Pupăzan Nic.* (an. II s.m.a. Sibiu), *Bergthaler Cristian* (cl. 9 Petroșani), *Grosescu Radu* (cl. 8 lic. mil. Breaza), *Croitoru Florica* (cl. 10 s.m. 2 Focșani), *Anghel Constantin* (cl. 10 Constanța), *Dinuț Teodor* (abs. Craiova), *Drăgan Petre* (cl. 8 Giurgiu), *Dimitriu Gh.* (cl. 10 lic. mar. Galați), *Ploeșteanu Ion* (cl. 10 Alexandria), *Ionavetz Rudolf* (cl. 9 Ploești), *Ciobanu Traian* (abs. Roman), *Isbășescu A. R.* (cl. 10 s.m. 1 București), *Ciorăscu Virgil* (cl. 8 Botoșani), *Tagă Mihai* (cl. 9 Ploești), *Mîrlogeanu Florea* (cl. 9 Giurgiu), *Lupescu Const.* (cl. 10 Tg. Jiu), *Constantin Radu* (abs. București), *Demaio Adriana* (cl. 8 s.m. 20 București), *Popescu Const.* (cl. 10 Ploești), *Șerbulescu Vasile* (cl. 10 Tg. Jiu), *Popescu Sorin* (cl. 10 Tg. Jiu).

Pînă la 15 mai 1957 s-au mai primit cîte cel puțin zece soluții la problemele propuse în ultimele trei numere ale «Gazetei matematice și fizice» seria B, de la rezolvitorii de probleme, după cum se arată mai jos. În paranteză după numele fiecărui colaborator se arată numărul de ordine al problemelor rezolvate, *note* (N), *articole* (A), *probleme propuse* însoțite de soluțiile lor (P) sau *diverse informații relative la cercuri de elevi*, întrebări, sugestii, greșeli observate care pot fi îndreptate printr-o erată sau remarcînd chestiunile publicate și care nu aparțin autorilor care semnează, arătînd și pagina și volumul unde a mai fost publicat (D). Unele din răspunsuri care privesc mai mulți corespondenți se mai pot da la poșta redacției, altele mai particulare pot fi date în scris. Rezolvitorii ce vor trimite soluțiile trebuie să țină seamă de indicațiile date pe coperta a III-a a «Gazetei» la rubrica «Redactarea soluțiilor» care în unele cazuri conține chestiuni ce răspund și la *Poșta Redacției*.

ȘCOLI MEDII:

AIUD. S. m. 1. Cl. 9. Vrăjitoru Mihai (2392, 94—96, 99, 404—06, 08—10, 13, 14).

ALBA IULIA. Cl. 9. Trifu Mircea (2424, 44, 50, 51, 64, 77, 80, 97, 88, 99, 518, 23, 36). Cl. 10. Goia Cornel (2418, 33, 76, 518, 20, 34, 39, 65, 71, 78—80).

ALEXANDRIA. Cl. 9. Beșu Georgeta (2505, 07, 09—11, 17, 19 — 21, 23, 36) Cl. 10. *Ploeșteanu Ion* (2412, 13, 65, 68, 71, 72, 75—77, 83, 85, 87, 88, 90, 91, 97, 99, 505, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 34, 36, P).

BĂBENI (Vîlcea). Pelepceac Vasile (Descompunerea numerelor în sume de numere consecutive. Descompunerea în fracție continuă a unui număr irațional).

BACĂU. Abs. Pelin Adrian (2472, 80, 82, 89, 97, 515, 18—21, 23, 28, 30, 31, 34, 36, 39, 40, 68, 72, 77—80).

S. m. 1. Cl. 9. Sîrbu Mihai (2415, 24, 39, 53, 80—82, 87, 97, 98, 503, 09, 11 15, 18, 19, 21, 23, 28, 29, 33, 36).

S. m. 2. Cl. 8. Vasilache Ion (E: 911—14, 16, 18, 19, 21, 23, 34).

BAIA MARE. S. m. 1. Cl. 8. Atanasiu Moisă (2503, 11, E: 911, 15, 17—25, 27—30 32—34, P), Fazakas Anton (2438, 55, E: 908, 09, 17, 21—24, 28, 32—34). Cl. 10. Mureșan Dumitru (2465, 66, 70—74, 78—891, 97, P). Abs. Munteanu Viorel (2433, 44, 55, 57, 62, 63, 65, 76, 89, 91, 97, 518, 23, 26, 33—35, 39, 49, 50, 67).

BAIA DE ARIEŞ (Cîmpeni-Cluj). S. m. 1. Cl. 7. Totolici Gabriel (2404, 06, 99, E: 885, 86, 905, 06, 12, 16, 26, P). Cl. 10. Opriţă Nicolae (2437, 81, 94, 503, 05, 07, 11, 13, 15, 18, 23, 28, 29, 31, 34, 55, 70).

Balş (Craiova). Cl. 9. Stoenică Gruia (2445, 46, 55, 56, 58, 61—63; 518, 23, 33, 38).

BISTRIŢA (Cluj). *Verveagă T.* (2392, 94, 404—10, 14, 15, 17, 47, 48, 50, 52, 56, 57, 61—63, 72, 97, 503, 11, 15, 17—21, 23, 28—31, 36, 37).

BÎRLAD. S. m. 1. Cl. 10. Spulber Virgil (2442, 44—46, 48—50, 52—57, 60—63). S. m. 2. Cl. 8. Neacşu Mioara (E: 921—23, 25, 28, 30, 32—34), Tudor Mihaela (E: 921—23, 25, 28, 32—34).

BOTOŞANI. S. m. 1. Cl. 8. *Ciorăscu Virgil* (2356, 421, 46, 55—58, 519, E: 901—03, 07—09, 11—15, 17, 18, 21, 23, 25, 28, 30, 32—34).

S. m. 2. Cl. 9. Petreu Mariana (2392, 95, 404, 06, 08, 10, 56, 61, 62, 505, 21, 23.)

BRĂILA. Cl. 9. Danciu Viorel (2447, 48, 52, 57, 83, 85, 97, 507, 18, 20, 23, 33, 36), Negulescu Ion (2392, 407, 10, 38, 45, 46, 55, 56, 61, 518). Cl. 10. Tomescu Octavian (2448 52, 57, 59, 72, 97, 518, 20, 23, 36), Mihalcea Lucian (2405, 18, 21, 28, 30, 34, 36, 48, 53, 54, 72).

BREAZA. Lic. mil. « D. Cantemir ». Cl. 8. Fîrtat Damian (2420, 38, 55, 61, 52, 519, E: 901—03, 09, 18, 33, 34), *Grosescu Radu* (2434, 38, 57, 58, 64, 65, 71, 80, 82, 89, 512, 15, 19, 33, E: 888, 94, 902, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 23, 25, 30, 32—34). Cl. 9. Moldoveanu Tudor (2487, 89, 97, 99, 518, 15, 17, 20, 21, 23, 36), Mustăţea Aurică (2445—48, 52, 55—58, 61, 62, 65, 72), Popescu Constantin (2465, 71, 72, 78, 82, 84, 87, 89, 91, 515, 18, 19, 23, 33—36). Ştirbu Iulian (2445, 46, 48, 52, 55—57, 61, 62, 65, 72, 528). Cl. 10. Chiz Alex. (2405, 23, 31-33, 38, 45, 57, 72, 519), Văcaru Gh. (2465, 72, 77, 78, 80—82, 84, 88, 89, 91, 94, 96, 98, 99), Zinca Vasile (2392, 95, 407, 10, 26, 31, 33, 45—49, 52—57, 60—63).

BUCUREŞTI. Abs. *Constantin Radu* (2392, 94, 95, 404, 06, 07, 09—11, 13, 15, 23 33, 34, 38, 39, 44—46, 48, 50, 52, 55—57, 62, 64, 97, 72, 523).

S. m. 1. « N. Bălcescu ». Cl. 9. Catrina D. (2404, 05, 07, 15, 18, 23, 33, 36, 39, 99, 558, 67, P), Ionescu Traian (2392, 95, 404, 08, 11, 13, 14, 16, 17, 38, 60, 64), Isbăşescu Mihai (2418, 27, 35, 42, 70, 77, 78, 80—85, 87, 89), Moisă Ion (2497, 99, 515, 17, 18, 23, 36, 49, 67, 78, 79), Paşcanu Const. (2426, 49, 53, 55, 58, 68, 74, 88—90). Cl. 10. Cocieru Dan (2445, 50, 52, 54, 57, 62, 79, 80, 82, 83, 89, 97, 99, 518, 19, 22, 23, 29, 31, 36), *Isbăşescu A. R.* (2386, 418, 33, 38, 47—50, 52, 54, 58, 62, 63, 70—72, 78, 81, 89, 91, 95—99).

S. m. 3. Cl. 10. Gavrilă Horia (2500—03), 06, 07, 11, 13, 14, 15, 18—21, 23—31, 33 34, 36, 38, P).

S. m. 4. « A. Vlaicu ». Cl. 8. Romanov Sofia (2455, 63, E: 886, 88—91, 94, 98, 99 901, 11), Truţă Mircea (2434, 38, 56, 62, 63, E: 900—03, 05). Cl. 9. Cîmpu Gabriel (2438, 49, 50, 53, 80, 97, 515, 18, 19, 21, 23), Filip Dan (2446, 48, 52, 55, 56, 61, 72, 97, 518, 36), Nicolau C. V. (2536, 38, 39, 49, 54, 68, 69, 72, 73, 77, 79,). Cl. 10. *Martiş Ioan* (2420, 24, 34, 36, 38, 39, 44, 47, 52, 55, 57, 58, 72, 77, 83, 90, 97, 505, 09, 11, 15, 18—24, 28, 30—33, 36, 38, P), *Rădulescu Const.* (2426, 33, 35, 36, 73, 502, 04, 10, 21, 29, 34, 35, 39, 42, 49—51, 54, 60, 62, 65, 67, 68, 71, 73, 74, 78, 79, 91, 603, 07, 08, 10, 11, 13, 16, 19—26, 30, P).

S. m. 7. « I. L. Caragiale ». Cl. 10. Buşilă Ioana (2476, 95, 500, 01, 09, 18, 19, 21, 23, 25).

S. m. 10. Cl. 8. Predoiescu Marieta (E: 911, 14, 17, 19, 21, 22, 27, 28, 30, 32—34). Cl. 10. Stanciu Loretta (2445, 50, 72, 80, 97, 98, 518, 23, 30, 36).

S. m. 11 « D. Cantemir ». Cl. 6. Gianni Emanuel (E: 886, 88, 97, 901, 06, 11, 18, 21, 23, 32, 34). Cl. 7, Gall Alex. (E: 889, 97, 902, 07, 11, 13, 14, 22, 23, 28, 33, 34). Cl. 9. Antoniu Sorin (2474, 75, 79, 81, 89—91, 99, 509, 23), Schiopulescu Dan (2420, 32, 34, 38, 44, 45, 53, 55, 56, 61—63).

S. m. 12. C. 8. Iovănescu Ruxandra (2455, 56, 62, 63, E: 902, 07, 08, 11, 15, 17, 18), Panu Sorin (E: 920—25, 28—30, 32—34). Cl. 9. Comănescu Gh. (2445, 46, 48, 52, 55, 56, 61, 62, 68, 518), *Glasberg Vladimir* (2392, 95, 97, 400, 01, 03—07, 09—11, 15, 23, 30, 44—48, 51—54, 56—63), Onu Ştefan (2483, 97, 99, 518, 21, 32, 33, 36, 38, 39, 68, 72, 78, 79).

S. m. 13. Cl. 8. Dinu Ştefan (2463, E: 913, 16, 21—23, 25, 26, 28, 30, 32, 38, 39), Moga Ion (2503, 33, E: 911, 15, 17—19, 22, 23, 32—34), Popescu Ovidiu 2462, 519, 20, 33, E: 908, 21, 23, 30, 32—34). Cl. 9. *Chirică Laurian* (2471, 72, 83, 87, 89, 97, 515, 18, 19 23, 36). Cl. 10. Tudor Gh. (2503, 05, 07, 10, 11, 13, 15, 17—21, 23, 24, 28—31, 33—36, 50, 51, 54—58, 65, 70, 75, 78—80, 84, 85, 87, 91, 94, 604, 15).

S. m. 15. cl. 8. Delcescu Marilena (2455, 56, E: 903, 11, 14, 18, 23, 28, 30, 32, 34).

S. m. 16. Cl. 8. Florescu Const. 2405, 09, 38, 55, 56, E: 886, 87, 90, 93, 94, 97, 9, 909),

S. m. 17. Cl. 10. Coconea Mihai (2395, 410, 46, 55, 57, 62, 72, 82, 507, 15, 18, 46, 50, 65, 79, P), Scherzer Edgar (2397, 406, 17, 25, 26, 30, 47, 51, 57, 62).

S. m. 18. Cl. 8. Enilteanu Nic. (2565, E: 914, 30, 32, 35, 36, 38, 42, 44, 47, 48), Nicolau Cristian E: 886, 911, 12, 17, 21, 22, 33, 34).

S. m. 20. Cl. 8. Pădureţ Victoria (E: 923, 27, 32—36, 43, 45). Cl. 10. *Demayo Adriana* (2387, 404, 24, 44, 45, 50, 55, 68, 72, 78, 87, 97, 500, 01, 03, 05, 08, 11, 15, 18, 21, 23, 28, 29, 31, 36), Simion Gh. (2420, 45—53, 55, 56, 58, 61, 62).

S. m. 22. Cl. 10. Gheorghiţă Mariana (2418, 33, 76, 81, 83, 86, 514, 15, 20, 28, 30, 33, 34, 36, 38, 42, 50, 54, 60, 65, 67, 77—79).

S. m. 26. Cl. 8. Almăşan Elena (2406, 503, E: 893, 911, 14. 18, 20, 23, 24, 28, 34). Cl. 9. Georgescu Petre (2448—50, 52, 53, 55, 56, 58, 61, 62, 64). *Stoica Dan* (2392, 94, 95, 404—11, 13—17, 26, 38, 44—64, P).

BUZĂU. S. m. 1. Cl. 8. Blăjoi Olimpia (2579, E: 921—23, 28, 30, 32—36, 40, 48). Cl. 10. Ichim Ion (2384, 85, 92, 94, 95, 97, 404, 05, 10—12, 26, 30, 39, 47, 73, 81, 83, 84, 87, 500, 07, 15). Abs. *Bătireanu Gh.* (2473, 79, 85, 500, 02—36).

CALAFAT. Cl. 9. Dîrvăreanu Ilie (2395, 444, 46, 48, 49, 52, 53, 56, 97, 503, 05, 09, 11, 17—21, 23, 28, 29, 36), *Mititelu Ştefan* (2496, 98, 503, 05, 07—09, 11—13, 15—20, 22, 23, 28, 29, 31, 33, 36, 39, 53, 55, 63, 67, 69, 73, 74, 78—81, P).

CĂLĂRAŞI. S.m. 1. Cl. 9. Roşu Vasile (2392, 98, 410, P). Cl. 10. *Strătescu Ion* (2489, 96, 500, 01, 03—07, 09, 11—23, 25, 26, 28—36, 38—42, 56—58, 60). Absolvenţi: Demciuc Anatolie (2433, 51, 76—78, 83 511, 15, 19, 25, 28, 29, 31, 67, 78, 79, P), Trandafir Mircea (2465, 70—72, 77, 78, 80—83, 85, 88—91, 93, 95, 97, 98).

CARACAL. Cl. 8. Dincă Lelia (2549, 79, E: 908, 11, 12, 17, 21—23, 25, 33, 34), Cl. 9. *Başturescu Mugurel* (2419, 20, 24, 32, 34, 36, 38, 45—48, 50—52, 55—59, 61—65, 70, 74, 75, 80, 82, 84, 87, 89, 91, 97, 98, 503—05, 07, 09, 11, 15, 18—21, 23, 28—30, 32, 33, 36), Madan C. (2430, 32, 38, 46, 58, 61, 62). Cl. 10. *Niculescu Stelian* (2383, 414, 17—19, 23, 24, 26, 30—35, 38, 42, 43, 39, 51, 54, 64, 71, 72, 74—78, 81, 82, 84—94, 97—507, 09, 11, 14, 15, 18—31, 33—36, P).

CÎMPINA (Ploeşti). S.m. 1. Cl. 9. Drăgănescu Cornel (2405, 15, 47, 52, 56, 58, 62, 63, 505, 07, 09, 11, 15, 18—20, 36). Cl. 10. Nicolescu Valentin (2474—78, 86, 511, 23, 26, 28, 30, 33, 34, 39, 40, 79). Abs. Ionescu Mihai (2406, 07, 10, 15, 24, 46, 52, 54, 56—58, 62, 63, 72, 530, P).

CÎMPULUNG *Moldovenesc.* Cl. 10. Tudoraş Mircea (2472, 73, 76, 80—82, 87—91, 97, 505, 15, 18, 19, 22, 24—26, 28, 30, 33, 34, 36).

CLUJ. S.m. 4. Cl. 9. Babeş Victor (2426, 32, 57, 64, 72, 87, 98, 99, 505, 09, 15, 18—23, 30, 33, 36). Cl. 10. Bîrzan Romanel (2481, 501, 38, 39, 58, 67, 68, 70, 72, 74, 76, 79, 82).

S.m. 5. Cl. 10. Ciurtin Gh. (2472, 73, 80—82, 97—501, 18, 28—30, 36). Lebjok Ambrosie (2449, 60, 80, 83, 97, 98, 511, 15, 18, 23, 36).

S.m. 6. Cl. 9. Dragoş Eugen (2395, 410, 11, 47, 505, 18—21, 23, 30), Vădan Ion (2420, 48, 52, 55, 56, 58, 59, 61—63, 515, 18). Abs. Cosmuţă Ion (2404, 10, 46, 50, 55, 56, 61, 62, 521, 23, 28).

CONSTANŢA. S.m. 1. Cl. 10. *Anghel Const.* (2476, 77, 81, 85, 88, 89, 91, 99, 503—05, 07, 09, 11, 15, 17—21, 23—26, 28—31, 33—36, 38, P), Dineţ Ioan (2384, 92, 95, 402, 04—10, 12, 36, 38, 39, 44—46, 48—50, 52—57, 61, 62),*Ianuş Stere* (2418, 20, 22, 24, 26, 31, 35, 36, 37, 44, 47, 49—51, 53—61, 65, 70, 72, 74, 76, 77, 79—81, 84, 88, 89, 98, 503, 09, 13, 19, 21, 25, 26, 28—31, 33—36, 38, 49, 54, 57, 64, 71, 72, 78, 79, P).

S.m. 2. Rădulescu Mircea (2503, 79, E: 899, 900, 03, 05, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 30, 32—36, 40, 42, 43, 47, P).

COBADIN (Constanţa). Zidar *Stepan Ionel* (2392, 97, 420, 23, 26, 27, 30, 31, 36, 40, 70, 71, 503, 07, 17, 18, 21, 23, 25, 26, 28—36, 38).

CORABIA (Craiova). Cl. 8. Begea Marian (E: 921—23, 25, 28, 29, 32—35, 48).

CRAIOVA. S.m. 1 « N. Bălcescu ». Cl. 8. Popescu Elisabeta (E: 901, 22, 23, 28, 32—36, 46, 48). Cl. 10. Mihălcescu Virgil (2472), 76, 90, 97, 505, 18, 20, 21, 23, 26, 33, 34, 36, 38, 70, 79), Săşeanu C. V. (2514, 15, 18, 23, 24, 26, 28—30, 33, 34, 36). Absolvenţi: Caravias Nikolas (2451, 54, 59—63, 76, 77, 98, 518, 25, 26, 35, 36, 42, 79), *Dinuţ Teodor* (2465, 82, 84, 500, 01, 10, 15, 24, 28—30, 38, 39, 42, 49—51, 55, 57, 60, 65—67, 69, 70, 72 74, 79, P).

S.m. 2, « Fraţii Buzeşti ». Cl. 9. Vasile Florin (2424, 72, 83, 97, 515, 18—21, 23, 33, 36). Cl. 10. Staicu Ştefan (2382, 86, 434, 38, 41, 52, 60, 71, 76, 505, 33, P).

S.m. 3. Vruş Doina (2427, 33, 48, 52—54, 56, 61—63, 73, 87). Cl. 8 Bădeanu Mioara (2472, 87, 518, 20, 23, 31, 36, E: 921, 23, 32), Haş Violeta (2532, E: 921—23, 27, 28, 30, 32—34).

CURTEA DE ARGEŞ. Cl. 9. Băcăuanu Mihai (2480, 82, 83, 91, 97, 515, 18, 23, 36, 38). Cl. 10. Murăreci Fănică (2470, 80, 91, 507, 09—11, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28—36, 38, P).

DEJ. Rusu Ioan (Asupra ecuaţiei reciproce). S.m. 2. Cl. 8. Botiz Vitna (2455, 63, E: 890, 97, 901, 09, 11, 23, 28, 30, 33, 34), *Cernău Rodica* (2405—38 55, 63, E: 886, 93, 97, 901, 02, 09, 11, 23, 28, 34, 38), Coste Gh. (2438, 62, 63, E: 888, 90, 900, 01, 13, 15, 21—23, 32—34), Costin Rozalia (2400, 05, 09, 10, 38, 45, 55—57, 61—63, 99, 512, 21), Crişan Gheorghe (2455, E: 886, 93, 911, 15, 18, 22, 34), Czitrom Clara (2405, 63, E: 886, 902, 09, 11, 13, 22, 23, 32—34), Deac Georgeta (2463, E: 886, 93, E: 909, 11, 14, 15, 19, 22, 23, 28, 30, 32—34), Filip Liviu (2468, 504, E: 889, 909, 11, 18, 19, 22, 26, 34). Ilieş Nicolae (2455, 63, (E: 886, 93, 98, 901, 11, 15, 18, 19, 22, 23, 34), Lăpăzan Emilia (2406, 63, E: 922, 23, 30, 32, 34), Mitrofan Elena (2455, 63, E: 886, 901, 11, 14, 28, 30, 32, 34), Mureşan Arghir (2462, 63, E: 886, 93, 911, 23, 34), Onofrei Valer (: 886, 99, 902, 09, 18, 23, 34), Perja Lucia (2512, E: 894, 913, 22—24, 28, 33—34). Cl. 9. Barbu Maria (2395, 406, 38, 46, 48, 52, 57, 512, 18, 19, 23, 33), Costin Rozalia (2400, 05, 09, 10, 38, 45, 55—57, 61—63, 99, 512, 21), Custură Paula (2448, 50, 82, 87, 99, 505, 12, 19, 23, 33, 36), Munteanu Lucia (2395, 433, 38, 48, 61, 99, 512, 18, 19, 23), Pop Maria (2392, 448, 52, 57, 71, 99, 505, 12, 18, 23), Pop Terezia (2395, 411, 33, 38, 46, 48, 61, 509, 12, 18, 19, 23), Puşcaşu Ana (2452, 63, 64, 71, 73, 82, 505, 18—20, 23, 29), Săvan Aurelia (2395, 411, 48, 55, 57, 518, 19, 23), Suciu Voichiţa (2387, 400, 25, 48, 52, 70, 82, 87, 512, 18—20, 23, 33, 36), Văclaş Maria (2410, 27, 45, 63, 67, 72, 511, 12, 17, 20, 23, 36, 38). Cl. 10. Munteanu Augustin (2411, 33, 50, 76, 99, 523).

DEVA. Cl. 10. Cartejan Tiberiu (2418, 24, 26, 38, 76, 83, 90, 97, 523, 26, P).

DOROHOI, S.m. 1. Cl. 9. Haivas Mihai (2405, 10, 49, 53—56, 61—63, 515, 18, 21).

FAGET (Timişoara). Cl. 10. Antănaş Petru (2507, 15, 18, 23, 25, 26, 30, 33—56).

FOCŞANI. S.m. 1 « Unirea ». Munteanu Valeriu (2403, 07, 17, 32, 38, 53, 55—58, 61, 62, 75, 89, 91, 99, 518—23, 33, 36, P). Cl. 10. Horovitz Iulian (2433, 42, 60, 72, 97, 505, 18, 30, 31, 34, 35).

S.m. 2. Cl. 10. *Croitoru Florica* (2465, 66, 68, 70, 72, 76, 77, 84—89, 95, 503, 05—08, 11, 14, 16, 18, 21, 25, 26, 28, 29, 34, 35).

GALAŢI. Cl. 10. Caraman Gh. (2450, 54, 57, 59, 60, 72, 88, 90, 97, 515, 18, 19, 23, 25, 30, 33—36).

Lic. mil. mar. Cl. 10. *Dimitriu Gh.* (2352, 92, 95, 405, 06, 14, 17—19, 23, 33, 36, 45, 49, 52, 53, 62, 72, 509, 18, 19, 21—25, 28, 30, 33, 34, 36).

GHELAR (Hunedoara). Abs. *Lăscuţoiu Virgil* (2468, 72, 75—78, 88, 91, 97—501, 05, 11, 18, 19, 21—23, 25, 28, 30, 34—36, 39, 42, 50, 53, 65, 67, 79, 80).

GIURGIU. S.m. 1. Cl. 8. *Drăgan Petre* (2503, 04, 09, 15, 23, 32, 33, 36, E: 910—19, 21—28, 30, 32—34, P), Perşoiu Titus (2504, E: 912, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 28, 32, 33), *Popescu Cristian* (2451, 503, 09, 11, 15, 28, 33, 36, 39, 49, 55, 67, 68, 79, E: 910, 13, 20—23, 25, 27—30, 32—36, 38, 39, 41, 46—48, P), Popescu Radu (2503, 04, 09, 11, 15, 23, 32, 33, 36, 38, E: 910—25, 27—30, 32—35, 42, 43, P), Tudor Maria (2438, 55, 56, 62, E: 886, 90, 92, 98, 908, 09, 11, 18). C. 9. *Mirlogeanu Florea* (2432, 39, 49, 51, 53, 72, 87, 91, 503—05, 09—11, 15, 18, 21, 23, 28, 32, 33, 36, 3—, 49, 72, 74, 78—80), *Vasilescu Florian* (2466, 70, 72, 74, 80, 81, 87, 89, 91, 98—99, 503—05, 09, 10, 15, 17—21, 23, 28, 30, 42, 49, 52, 65, 67, 71, 72, 74, 78—80, P), *Vişinescu Mihai* (2384, 91, 98, 430, 33 43, 500—03, 05, 08—11, 15, 18, 19—21, 23, 25, 26, 28—34, 36, P). Cl. 10. *Petre Gh.* (2349, 53, 80, 84, 92, 95, 97, 404—07, 09—11, 15, 17—19, 31, 33, 36, 38, 42, 44—46, 48—58, 60—64, 72, 77, 90, 91, 97), Şerban Aurel (2406, 11, 18, 33, 72, 86, 98, 503, 05, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 28, 29, 36, P). Absolvenţi: *Ciobanu Marin* (2472, 75—77, 83, 86—91, 95, 97—99, 505, 10, 11, 14, 18, 21, 23, 25, 26, 28—31, 34—36, 38, 39, 42, 43, 49, 50, 53, 54, 65, 67, 70, 72, 75, 77, 78, 80, P), Bătineţu Dumitru (2418, 20, 23—28, 31—33, 35, 37—40, 42—63, 71, 72, 78, 82, 83, P).

HOREZU (Piteşti). Cl. 8. Apostoloiu Victor (2503, 23, 39, 49, 79, 80, E: 921—23, 28, 32—35, 41, 47), Badea Vasile (E: 919, 21—23, 28, 29, 32—36, 46).

HUNEDOARA. Cl. 9. Lazariu Victor (2438, 46, 53, 55, 56, 61—63, 89, 521, 23, 36). Cl. 10. Floareş Gh. (2395, 405, 09, 10, 45, 48, 50, 52, 55, 63), Hodor Ioan (2405, 09, 48—50, 53, 55—58, 62, 63), Mot Mircea (2448, 52, 55, 57, 63, 518, 21, 23, 28, 30).

IANCA (Galaţi). Cl. 10. Caracoti Stere (2500, 01, 03, 07, 10—12, 14, 15, 18—25, 27—31, 33, 36, 38).

IAŞI. S.m. 1. « M. Sadoveanu ». Cl. 8. Drăgan Rodica (E: 921—23, 25, 30, 32—34). Cl. 10. Cuşmaru Ilie (2449, 51, 73, 78, 83, 97—99, 505, 13, 15, 18, 19, 23, 30, 33, 34, 36, 40, 74, 78, 79), Simovici Dan (2434, 38, 55, 56, 61—63, E: 909, 22, 33, 34, 63).

S.m. 2. Cl. 10. *Costinescu Anca* (2437, 39, 41, 49, 51, 52, 57, 60, 65, 66, 68, 70, 71, 73, 78, 80—85, 94—97, 99, 500, 01, 03, 05, 07—15, 17—23, 25, 28—31, 33—36).

S.m. 3. « C. Negruzzi ». Cl. 8. Vasiliu Mihai (2404, 05, 08, 09, 39, E: 885, 86, 90, 93, 903, 05).

S. Ped. Anul II. *Grigore Mihai* (2404—06, 08, 09, 55, 62, 532, E: 888, 90, 92, 98—903, 10, 11, 14—18, 21—27, 30—34).

JIBOU (Cluj). Abs. Barbur Ioan (2490, 91, 97, 518, 35, 39, 42, 50, 65, 68, 72).

LUGOJ. S.m. 2. Cl. 8. Eremia Dinu (2503, 09, 23, E: 911, 13, 15, 18, 19, 21—23, 28, 32—34), Petculescu Romeo (2503, 09, 23, E: 911—13, 15, 18, 19, 21—23, 28, 32—34).

MEDIAŞ. Cl. 8. *Jilăveanu Gh.* (2468, 94, 500, 01, 03—09, 11, 15, 18—30, 32—36, E: 921—26, 30, 32—34).

OCNA MUREŞ. Cl. 9. Lazăr Dorin (2392, 404—06, 09, 10, 38, 45, 46, 55, 56). Abs. Diamanstein Martin (2316, 49, 59, 74, 79, 95, 404—10, 14, 16, 17, 45, 46, 53, 56, 58, 60, 90, 98, 505, 18, 21, 33).

ORADEA. S.m. 1. Cl. 9. Baciu Ioan (2503, 09, 11, 15, 18—21, 23, 28, 29, 33, 36), Onescu Victor (2404, 45—47, 55—56, 503, 09, 11, 15), Schiop Alexandru (2416, 58, 503, 09, 11, 15, 18, 19, 23, 28—30), Alămoreanu Mircea (2433, 48, 51, 52, 71, 77, 80, 85, 88, 90, 91, 97, 98, 508, 09, 15, 18, 21, 23, 30, 31).

ORAŞUL STALIN. Cl. 8. Negoţ Marieta (2532, E: 911—15, 19, 21—23, 25, 27, 28, 30, 32—34). Cl. 9. Vlădăreanu Cornel (2487, 91, 518, 23, 39, 54, 68, 79). Abs. Conţic Ion (2466, 71, 72, 75—77, 80, 81, 83, 87—91, 97).

PIATRA NEAMŢ. S.m. 2. Covrig Margareta (2497, 99, 518, 21, 23, 30, 31, 32, 36—38).

PETROŞANI. S.m. 1. Cl. 8. Lepădatu Ilie (2438, E: 918, 22—24, 28—30, 32, 33), Orend Anca (2473, E: 911, 14, 18, 21—23, 32—34), Popescu Gh. (2515, E: 911, 16, 18, 23, 25, 32, 36, 42, 43). Cl. 9. *Bergthaler Cristian* (2465, 70—74, 79—85, 87—89, 91, 93, 96, 98, 99—501, 03—09, 15, 18—20, 23, 31), Oproiu Tiberiu (2420, 25, 38, 44—46, 50, 55, 56, 61—63).

PITEŞTI. Absolvenţi. Ghiţulescu Iulian (2506, 42, 48, 50, 52, 54, 58, 65—67, 70, 78—80), Nica Emilian (2418, 33, 38, 46, 48, 52, 55, 57, 62, 63, 72, 88, 97, 518, 23, 26, 36), Sîrbulescu Paula (2472, 77—82, 87—90, 94, 97—500, 05, 11, 21, 23, 28—30, 39, 41).

PLOEŞTI. S.m. 1. « I. L. Caragiale ». Cl. 8. Banciu Elena (2438, 49, 55, 56, 62, 63), Bellia Spătaru Alexandra (2392, 400, 38, E: 885, 86, 88—90, 93, 94, 97, 904), Chirsanov Alexandru (2503, E: 885, 86, 89, 93, 921—23, 28, 30—34), Constantinescu Emanoil (2406, 56, E: 911, 14, 22, 23, 25, 28, 32—35), Dimofte Mariana (2404, 05, 38, 55, 56, 62, 63, E: 908, 09, 11, 12, 14—16) Gavrilă Lucian (2392, 405, 06, 08, 55, 62, 63, E: 886, 87, 92, 908, 03, 12—15, 19, 21, 22, 33, 34), Georgescu Mariana (2404, 05, 08, 38, 55, 56, 63, E: 885, 86, 911, 12, 14—16, 21, 23, 26, 28, 30, 32—34), Georgescu Teodor (2404, 05, 08, 55, 56, E: 886, 911, 14, 21, 23, 28, 30, 32—34), Gheorghiu Nic. (2455, E: 886, 98, 99, 902, 11, 14, 17, 21—23, 28, 32—34), Hartular Maria (2438, 55, 56, 62, 63, 73, 99, E: 899—903, 05, 06—09, 11—15, 18, 21—23, 33, 34), Moşoiu Cantemir (2404, 05, 08, 38, 62, E: 898, 93, 903, 09, 15, 23, 28, 32, 34), Munteanu Sorin (E: 921—24, 26, 28, 29, 32—34), Negrea Mihai (E: 900, 02, 13, 18, 19, 21, 22, 28, 33, 39), Petrescu Virgil (Soluţiile scrise la maşina de scris nu se iau în consideraţie), Podeanu Voica (2438, 55, 56, 62, 63, 73, 99, 509, 19, E: 899, 900, 02, 03, 05, 06, 08, 09, 11—13, 15—19), Popescu Ion (E: 887, 97, 911—14, 19, 21—23, 25, 26, 28, 30, 32—34), Popescu Marius (2462, E: 900, 10—12, 14—16, 19, 21—23, 25, 33, 34), Prelipceanu M. (E: 899, 903, 11, 17, 21—23, 30, 32—34), Retezatu Adrian (2509, 19, 80, E: 911, 17, 18, 21—23, 26, 28, 29, 33—35), Stoican Carmen (2455, 62, 63 66, 73, 99, E: 899—900, 02, 03, 05, 06, 09, 11, 13, 15,16), Tomescu Ion (2503, 04, E: 911—19, 21—23, 25—28, 32—34, P), Tudor Dumitru (2410, 38, 46, 55—57, 61, 62, 518, 19, 36, E: 924). Cl. 9. Bordeanu Constantin (2430, 46, 47, 52, 5361, 62, 97, 99, 517—19, 23, 36, 38), Constantinopol Alexandru (2411, 14, 17, 30, 44—59, 61, 62, 70, 72, 80, 89, 91, 92, Contineanu Mihai (2449, 53, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 70, 72, 78, 80, 81, 87, 89, 91, 97), Crasava Octavian (2426, 27, 45, 46, 48, 50, 57, 59, 64, 72, 80, 83, 87, 99), Dabija Bogdan (2456, 62, 80, 82, 87, 97, 518, 19, 23, 28, 29), *Ionavotz Rudolf* (2424, 26, 27, 30,

38, 39, 45—50, 52, 56, 58, 59, 61—65, 70—72, 78, 80, 81, 83, 85, 89, 91, 99), Magdu Marian (2395, 98, 405—07, 09, 10, 15, 45, 46, 48, 52, 55—57, 62, 63, 87, 518, 23), Minakan Mihai (2,92, 406, 47, 53, 72, 505, 18, 19, 23, 36), Popescu Adrian (2447, 48, 56, 80, 82, 518, 19 21, 23, 28, 29), Rissdörfer Dionisi (2445, 46, 53, 55—57, 62, 519—21, 23, 38, 65, 79), Şovăială Dan (2499, 520, 21, 23, 29, 33, 36), *Taga Mihai* (2424, 30, 38, 44—53, 55—59, 61—63, 72, 80, 82, 97, 99, 518, 21, 23, 36). Cl. 10. Bărbieru Pană (2405, 06, 10, 45, 46, 48, 55—57, 61, 62), *Boiangiu Nic.* (2418, 26, 38, 42, 45, 46, 48, 49, 51—57, 61, 62, 72, 76, 77, 83, 88, 90, 91, 511, 18, 21, 23, 25, 26, 28, 33, 38), Buller David (2438, 44, 45, 48, 56, 57, 61—63, 518, 23, 34, 39, 68, 72, 79, 87), *Căsăndoiu Tudor* (2471, 72, 76—78, 80, 82—84, 90, 91, 97, 89, 500, 01, 03, 07, 09, 11, 13, 15, 18, 21, 23, 25, 26, 28—36), Costeanu Mihail (2445, 48, 56, 61, 62, 87, 523, 57, 68, 79), Curcăreanu Nic. (2446—49, 55, 57, 62, 507, 15, 18), Dumitrescu Marian (2444—58, 61—63, 98, 99, 507, 13, 18), Gheorghe Ion (2418, 20, 26, 33, 38, 42, 45—48, 53—57, 61—63), Ilie Nic. (2444—46, 48, 50, 52, 53—56, 62—64, 72, 515, 34), Ionescu Lucian (2452, 67, 72, 74, 76, 77, 83, 87, 88, 90, 505, 34, 35), Marinoiu Ioan (2405—07, 10, 46—48, 50, 53, 55—57, 518, 19, 30, 33, 36), Mihăilă Ioan (2404—07, 09, 10, 45, 46, 52), Minasian Eduard (2392, 406, 53, 72, 505, 18, 19, 23, 36), Nedelcu Florin (2395, 97, 404—07, 09, 10, 45, 46, 48, 55—57, 61, 62), Nicolescu Marian (2404—10, 45, 46, 52, 55), Nicolescu Mihai (2395, 448, 55, 56, 61—63, 72, 76, 80, 82), *Popescu Const.* (2403, 05, 06, 09, 17, 23, 34, 35, 38, 42, 45, 46, 48, 52—57, 62, 64, 67, 72, 74—77, 83, 87, 88), Popescu Horia (2445, 48, 56, 57, 61, 62, 87, 518, 23, 68, 79), Rusu Dan (2424, 38, 45—48, 50, 52, 54, 55, 57, 58, 63, 72, 90, 97), Stănescu Constanţa (2448, 52, 55—57, 61—63, 72, 519, 30, 36), Sterea Constantin (2450, 53, 55, 61—63, 518—21, 23, 30, 31, 34, 36), Tomulescu Petre (2447, 72, 78, 80, 82, 83, 90, 91, 97, 518, 19, 23,30, 34, 36), Tudorănescu N. (2400, 05—07, 10, 46, 48, 52, 55—57, 61—63, 518, 19, 30, 33), Vieru Tudor (2446, 48, 52, 55—57, 61—63, 518).

S.m. 3. Cl. 8. Vasilescu Dan Petre (E: 885, 91, 97, 902, 08, 10—12, 16, 18, 19, P), Vasilescu I. Dan (E: 915, 17, 21—26, 30 32—34). Absolvenţi: Cucu Stefania (2505, 21, 22, 29, 35, 36, 38, 50, 54, 65, 67, 70, 72, 78—80).

RĂDĂUŢI. S.m. 1. Cl. 9. Ioneşi Gh. (2503, 05, 12, 15, 19, 20, 23, 28, 29, 36). Cl. 10. Găină Nic. (2472, 77, 78, 80, 81, 83, 90, 97, 510, 15, 18, 19—23, 30, 34—37), *Iftimie Viorel* (2465—72, 74—503, 05—38, P).

REŞIŢA. Cl. 8. Jumancă Rodica (2455, 63, 83, E: 899, 900, 02, 03, 09, 11, 14, 19). Cl. 10. Plopeanu Anton (2396, 406, 07, 31, 42, 54, 63, 72, 77, 87, 88, 90, 91, 98, 99), Străinescu Ionel (2389, 420, 26, 31, 33, 34, 36, 38, 42, 44—48, 50—52, 55—57, 59—64), Zugravu Dorin (2405, 14, 15, 17, 48, 52, 72, 518).

RÎMNICUL VÎLCEA. S. m. 1. Cl. 9. Constantinescu Ion (2447, 58, 59, 72, 80, 82, 97, 505, 09, 18, 20, 21, 23, 28, 30). Cl. 10. Ristescu Gh. (2465, 72, 77, 78, 80—82, 87, 90, 97, 518, 23, 30, 31, 34), Văcărescu Nic. (2408, 17, 18, 65, 75, 76, 82, 83, 85, 88, 89, 98, 503, 05, 09, 11, 18—21, 23, 25, 28—31, 33—36, P).

ROMAN. Abs. *Ciobanu Traian* (2445, 46, 48—50, 52—57, 60—64, 505, 15, 18, 19, 21 23, 28, 29, 36).

ROŞIORII DE VEDE. Cl. 10. Bozdog Marin (2392, 95, 404—07, 10, 46, 48, 50, 52, 55, 56, 61, 63, 68, 72, 97, 505,18, 19, 23, 36), Rizescu Ilie (2391, 481, 91, 501, 11, 15, 25, 26, 29—31, 35—37, 39, 49—51, 54, 65, 67, 68, 70, 78—80).

SATU MARE. S. m. 1. Cl. 9. Soron Ioan (2432, 38, 45, 48, 55, 56, 61—63, 83). Cl. 10. Lupuţiu Gh. (2472, 81, 89, 97, 505, 15, 17—21, 30, 34, 36, P). S. teh. expl. c.f.r. Anul II, Ember Nicolae (2515, 18, 23, 30, 39, 68, 70, 72, 77—79, P).

SIBIU. S. m. 3. Absolvenţi: Golescu Alex. (2541, 48, 49, 54, 55, 56, 60, 64, 65, 67, 71, 73, 78, 81), Stoica Marin (2392, 95, 404—06, 10, 11, 24, 34, 54). S. mil. artil. Anul III. *Alexa Ioan* (2392, 94—96, 99, 404—07, 11, 14, 18, 23, 33, 39, 44—48, 50, 52, 58, 62, 68, 71, 72, 80, 82, 84, 503, 07, 09, 11, 13, 15, 18, 19, 23, 24, 28, 30, 31, 33), *Pupăzan N.* (2494, 96, 500, 01, 03, 05, 07, 09—13, 15, 17—23, 25, 26, 28—31, 33—36 P).

SIGHET. S. m. 1. « Filimon Sîrbu ». Cl. 8. Tomoiagă Dorin (2504, E: 911, 21—25, 28, 32—34, P, D).

SIGHIŞOARA. Cl. 8. Rulea Lucia (2434, 38, 44, 64, 75, 89, 91, 504, 32, E: 904, 12). Cl. 10. Liess Erwin (2418, 32, 44, 46, 81, 83, 87, 515, 18, 20, 23, 25, 26, 30, 34—36).

SLATINA. S. m. 1. Cl. 8. Geană Silvia (2519, 67, 79, E: 911, 14, 17, 21, 33—36, 40 42, 47, 48). Cl. 9. Graure Veronica (2426, 44, 46, 48, 50—53, 55, 56, 62, 63, E: 901, 02, 04, 08, 09, 11, 12, 19). Cl. 10. Florea Dorel (2464, 78, 85, 91, 94, 98, 505, 06, 10—12, 38, P). Absolvenţi: *Dorobanţu Valeriu* (2524, 39, 42, 44, 48—54, 56, 60, 65—74, 76—81), Ghenea

Anghel (2431, 34, 38, 52, 74, 83, 500, 01, 05, 10, 11, 15, 18—26, 28—36, 39, 42, 49, 50, 52, 67, 68, 70, 72, 79).

SUBCETATE (Mureş). Cl. 8. Pop Valer (2503, 23, E: 921—23, 55, 32—34).

SUCEAVA. S. m. «Ştefan cel Mare». Cl. 9. Marchitan Gh. (2395, 404—06, 08—10, 36, 46—49, 53, 55—57, 61, 62).

TECUCI. S. m. 1. Cl. 9. Theodoru Georgeta (2518, 19, 21, 23, 36, 39, 67, 68, 74, 78), Vidraşcu Traian (2424, 38, 64, 65, 68, 70, 73, 79, 80, 82, 84, 91, P). S. m. 2. Cl. 8. Belcescu Mihail (E: 899, 902, 03, 06, 07, 09, 11—19), Bold Ioan (2406, 38, 55, 62, 64, E: 886, 87 89, 90, 93, 94, 900, 03, 05), Bradea Ioan (E: 906, 13, 15—17, 19, 21—25, 28—30, 32, 33), Popescu Constanţa (E: 910, 14, 16—19, 21, 22, 26, 34, 35). Cl. 10. Popa Ioan (2438, 39, 42, 45—48, 50, 52—57, 60—63), Tudose Traian (2418, 20, 33, 68, 89, 511, 15, 21, 23—25, 30, 35). Abs. Andrei Valeria (2404, 05, 08, 09, 61, 63, 73, 90, 523, 31, 50, 51, 79). S. mil. aviaţie. *Răileanu Gh.* (2468, 77, 86—93, 95, 97, 98, 502—05, 07, 10, 11, 15, 18, 20, 21, 23—26, 28, 29, 31, 33—35, 36, 39, 41, 49—51, 54, 62, 65, 68, 74, P).

TIMIŞOARA. Serain Alexandru (A, N, Asupra unor formule de trigonometrie. Asupra unui şir de termeni).

S. m. 1. Cl. 8. Bratu Dorin (2519, 21, 23, 25, E: 921—23, 25, 27, 28, 32—34). Cl. 9. Ionescu Alexandru (2489, 97, 505, 07, 09, 15, 18, 19, 21, 23, 30, 36, 38, 54, 65, 68, 72, 79, D), Triponescu Iuliu (2444, 47—49, 51, 57, 58, 62, 63, 97, 98, 509, 18, 23, 30).

S. m. 5. Cl. 10. Grăjdeanu Stelian (2476, 77, 88, 90, 91, 535, 39, 65, 67, 79).

Abs. Nica Constantin (2444—46, 48—50, 52—55, 58, 60—62, 81, 87, 95, 97, 98, 518, 23, 36).

TÎRGU JIU. Cl. 8. Alexandrescu A. Gh. (2445, 57, 61, E: 902, 11, 17, 21—23, 25—28, 30, 33, 37), Alexandrescu V. Gh. (2438, 55, 62, 82, 523, E: 900, 02, 05, 11, 13, 15, 17, 18, 21—23, 25, 28, 30, 32—34), Andriţoiu Ion (2455, 56, 62, 523, E: 886, 99, 900, 02, 11, 14—17, 21—23, 26, 27, 32, 34), Băjmatără Gh. (E: 911—13, 14, 17, 21—23, 32—35), *Bencovici Ion* (2395, 405—07, 38, 55, 56, 61, 62, 48, 523, E: 885, 86, 89, 93, 97, 99, 900—03, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 21—23, 25, 28, 30, 32—34), *Berca Eugen* (2392, 303—09, 34, 45, 55—57, 62, 63, 82, 91, 504, 12, 23, 28, 29, E: 886, 90, 93, 94, 97, 99, 900, 02, 03, 05, 06, 09, 11—19, 21—23, 25 27, 28, 30, 32—34), Bistreanu Ion (2455, 63, E: 901, 02, 11, 14, 16, 17, 21—23, 27, 28, 30, 32, 33), Budianu Constantin (2482, 519, 23, E: 886, 93, 911, 14, 15, 17, 18, 21—23, 25, 27, 30, 32—34), Buicu Ion (2455, 62, 63, 504, 23, E: 886, 900, 02, 11, 12, 15—17, 21, 22, 32—34), Burlan Ion (2456, E: 911, 14, 16, 21, 23, 28, 33, 34, 86), Căpitănescu Gh. (2455, 62, E: 899, 903, 14—16, 27, 31—34, 86), Ceacîr Dumitru (2392, 455, 62, E: 902, 03, 11, 12, 14, 17, 18, 22, 23, 28, 29, 32—34) Cîrlugea Marin (2455, 61, E: 911, 14, 17, 21, 23, 25—30, 32—34), Cîtea Matei (2392, 455, 63, E: 911, 16, 18, 22, 23, 28, 32—34), Constantin Petre (2462, E: 893, 901, 02, 14, 15, 17, 21, 22, 32—34), Copaci Gh. (2455—57, 523, E: 911, 14—18, 21—23, 25, 26, 28, 29, 32—34), Costoiu Dorel (2455—57, 61, 62, 82, 523, E: 893, 99, 900, 02, 03, 11—15, 18,21—23, 26, 28, 30, 32—34), Davidoiu Gh. (2455, 62, E: 899, 902, 03, 11—17, 19, 21, 23, 25, 27, 32—34), Diaconescu Romulus (2455, 82, E: 911, 13—15, 17, 21, 23, 28, 32—34), Dobrotă Ion (2445, 56, 57, 61, 62, 523, 33, E: 896, 900, 11, 14, 16, 18, 22, 28, 32, 34), Drăcea Iacob (2463, E: 911, 14, 17, 22, 27—29, 32—34, 86), Dumitra Ion (2455, 62, E: 886, 911, 16, 19, 21, 22, 28, 29, 32—34), Dumitru Ion (2455, 63, E: 902, 03, 11—17, 21—23, 25, 27, 28, 32—34), Gorduzo Adrian (2456, 62, 523, E: 886, 900, 02, 06, 11, 15, 18, 19, 21—23, 27, 30, 33, 34), Grigorian Mircea (2455, 56, E: 911, 13, 14, 21, 23, 28 32—34), Grofu Florian (2523, 25, 29, 38, E: 911, 14, 16, 17, 21—23, 26, 27), Iliuţă Şerban Virgil (2445, 55, 62, 544, E: 911, 13, 14, 15—17, 21—23, 25, 27, 30, 32—34), Ioachim Adrian (E: 911, 17, 21—23, 27—30, 33, 34), Lăpăduş Ion (E: 899, 902, 03, 11, 14, 21—23, 28, 32—34), Mălăescu Dumitru (2438, 55, 63, 504, 23, E: 911, 13—18, 20—27, 32—34), Mendea Dumitru (2455, 63, E: 902, 03, 11—17, 21—23, 27, 28, 32—34), Negreanu Laurenţiu (2455, 57, 525, E: 892, 99, 900, 02, 03, 11—14, 23, 28, 31, 34), Novac Dumitru (2455, 62, 63, 523, E: 900, 03, 11, 12, 14—17, 21—23, 27, 32—34, 86), Papoe Haralambie (2455, 57, E: 911, 14, 16, 17, 21, 23, 27, 28, 32—34). Popescu Adrian (2445, 57, 63, E: 902, 11, 14, 17, 21—23, 25, 27, 28, 30, 32—34), Popescu Gh. (E: 911, 17, 21—23, 27—30, 32—34), Şendroiu Iulian (2455, 62, E: 899, 900, 02, 03, 11—15, 17, 21—23, 25, 27, 28, 32, 34), *Şerban Viorel* (2405, 06, 09, 55, 62, 80, 99, 523, E: 886, 889, 93, 99, 902, 03, 19, 11—19, 21—23, 25, 27, 28, 30, 32—34), Stamer M. (E: 900, 01, 09, 11, 14, 16, 17, 20—27, 32, 34), Tămăşescu Ion (2463, 65, 504, E: 900, 02, 03, 11, 12, 15, 17, 21—23, 32—34, 86), Vasile 21—23, 25, 27, 28, 30, 32—34), Stamer M. (E: 900, 01, 09, 11, 14, 16, 17, 20—27, 32, 34) Ion (2445, 56, 57, 61, 62, 82, E: 900, 02, 11, 14, 16—18, 22, 29, 32—34), Vede Nicolae (E: 886, 914, 21—26, 30—34), *Velicescu Mircea* (2387, 92, 94, 95, 400, 04—09, 11, 20,

24, 34, 38, 44, 45, 50, 55—58, 61—64, 80, 82, 91, 99, E: 885, 86, 88—90, 93, 94, 97—900, 02, 03, 05—09, 11—21), Vîlcu Victor (2392, 455, 57, E: 916—18, 21—23, 28, 27, 32—34), Voicu Cornel (2463, E: 902, 11, 13—17, 22 23, 27, 28), Voiculescu Vasile (2456, 62, 82, E: 886, 99, 902, 03, 11, 14, 15, 18, 21, 22, 30), Zorilă Aurel (2455, 56, 523, E: 899, 900, 02, 11—17, 21, 23, 27, 28, 32—34). Cl. 9. Andrița Ion (2434, 38, 46, 51, 55—57, 504, 15, 18, 19, 23, 29, 36), *Aniţescu Nicolae* (2420, 27, 38, 51, 54, 59, 60, 66, 70—72, 78, 80—83, 85, 87, 89, 91, 97, 500, 01, 05, 09, 12, 15, 18, 19, 21, 23, 30, 31, 33, 36), Baloşin Const. (2434, 38, 46, 52, 55, 56, 62, 97, 515, 18, 19, 23, 36), Bănete George (2420, 38, 46, 48, 52, 53, 55, 72, 82, 515, 18, 19, 23, 33, 36), Bozdog Ion (2420, 51, 60, 72, 74, 80, 82, 97, 504, 05, 15, 18, 19, 21, 23, 33, 36), Ciocăzeanu Ion (2451, 56, 57, 61, 63, 72, 80, 82, 83, 97, 515, 18, 19, 23, 36), Drăgănescu Traian (2420, 38, 72, 82, 97, 515, 18, 23, 36, 62), Munteanu Bazil (2446, 52, 55, 72, 82, 97, 518, 19, 23, 34, 36, 38), Pupăzan Gh. (2448, 72, 80, 82, 97, 99, 515, 18, 19, 23, 33, 36), Tătăroiu Ion (2420, 46, 52, 72, 82, 515, 18, 23, 33, 36). Cl. 10. *Butulescu Ion* (2392, 95, 97, 400, 05—11, 15, 17, 26, 33, 34, 38, 42, 44—50, 52—59, 61—63), Comănescu Ion (2386, 92, 95, 97, 400, 05—11, 14, 17, 26, 33, 34, 38, 44, 46—49, 52, 55, 57—59, 61—63, 72, 82, 83, 89—91, 97), *Lupescu Constantin* (2445, 46, 48, 49, 50, 52, 53—57, 59—63, 72, 78, 82, 83, 87, 97, 98, 512, 15, 18, 23, 31, 33, 36, 44). *Mihăiţă Gh.* (2384, 95, 97, 433, 42, 45, 46, 48, 50, 52—57, 59, 61—63, 72, 77, 81, 82, 87, 90, 97, 98, 515, 18, 20, 21, 23, 26, 28—30, 33, 35, 36, P), Popescu Romulus (2395, 404—07, 09, 10, 44—53, 57, 58, 61—63, 65), *Popescu Sorin* (2444—50, 52, 55, 56, 61—63, 66, 70—72, 78, 82, 83, 87, 97, 99, 512, 15, 18, 19, 21, 23, 30, 33, 36), *Şerbulescu Vasile* (2424, 33, 34, 38, 42, 50, 51, 53, 58—60, 64, 71, 72, 74, 78, 80—83, 85, 87, 88, 90, 91, 95, 97—99, 512, 15, 17—19, 21, 23, 28—31, 36).

S. m. 3. Cl. 10. Hoară Horaţiu (2500, 01, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 31, 33, 34, 36). Abs. Bughiu Victor (2472, 84, 87, 507, 17, 26, 39, 55, 67, 70, 71, 78—80).

TÎRGU MUREŞ. S. m. 1. Cl. 8 Antoniuc Bogdan (E: 886, 88, 89, 92—94, 97, 909, 11, 13—16, 18, 20—26, 28, 30, 32—34, Filipescu Dan (E: 911—15, 17—19, 21—23, 33, 34), Gherendi Teorfl (E: 886, 88—90, 92—94, 97—903, 05, 06, 08, 09, 38, 55, 56, 63), Ioan Corneliu (2455, E: 899, 900, 02, 03, 09, 15, 19, 21, 32—34). Cl. 9. Ghetmăneţ Octavian (2423, 32, 34, 38, 45, 46, 50, 55—57, 61—63).

TÎRGOVIŞTE, S. m. 3. Cl. 8. Brezeanu Laurenţiu (2579, E: 911, 14, 17, 19, 21—23, 25, 30, 32—36, 38, 41, 43, 47, 48, P), Dumitrescu Horia (2539, 49, 67, 79, E: 935, 36, 41—44, 47, 48). Cl. 9. *Cîrnu Mircea* (2381, 90, 97—400, 02, 03, 25, 26, 30, 31, 36, 37, 42, 49, 65, 75, 504—07, 09, 10, 15, 18—21, 23—30, 32, 33, 35, 36), Popescu Mircea (2448, 52, 63, 71, 511,15, 18, 21, 23, 25, 32, 33, 36, 37, 39, 64, 78).

TÎRNĂVENI. S. m. « Al. Sahia ». Cl. 10. Piso Pompiliu (P).

TRUSEŞTI. (Suceava). Cl. 8. Rauliuc Teodor (2504, 23, 44, 80, E: 911, 14, 15, 18, 21, 23, 27, 30, 33—35, 47, 48, P).

TURNU MĂGURELE. Cl. 10. Grecu Eftimie (2425, 26, 49, 53, 63, 64, 71, 78, 80,83 88, 97, 98, 515, 18, 20, 21, 23, 30, 33, 35, 36).

TURNU SEVERIN. S. m. 1. Cl. 10. Caragioiu Mircea (2500, 16, 20, 21, 23, 28, 30 31, 34, 36, 54, 65, 78—80), *Rusu Constantin* (2470, 500, 01, 03, 05, 07, 10 11, 15, 19—21, 25, 28, 30, 31, 33—36, 38—51, 54, 65, 67, 68, 73, 77—79).

S. m. 2. Cl. 8. Niţulescu Ion (2503, E: 921—24, 28, 32—36, 40, 41).

URLAŢI. Cl. 10. Iancu Vasile (2445, 48, 50, 54, 58, 72, 83, 87, 97 509, 18, 19, 36).

* * *

Rezolvitorii de probleme din clasele V—VII, precum şi studenţii vor fi anunţaţi în numărul următor.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie. Fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, *enunțul complet* și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și *adresa* și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor *numerică*, iar pe adresă să menționați: *Redacției G.M.F — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimile *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat după greutate*, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă «Redactarea soluțiilor».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor* pe anul 1957.

— Pentru anul 1957, G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca *premii și menționi.*

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către *studenți* și nici soluțiile trimise în număr mai mic de zece sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de soluții, să fie *personale* și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sunt sfătuiți să înceapă să propună problemele numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Probleme propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne *arate precis*, volumul și pagina unde s-a mai publicat *enunțul sau soluția* problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie făcute corect, clar, cu linii pline, și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe soluții diferite pentru aceiași problemă sau au dat *generalizări* și observații interesante sub formă de *note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor *de matematică și de fizică* la care iau parte și asupra modului de desfășurare a *«Olimpiadelor de matematică și de fizică»* pentru ca apoi prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariției revistei se vor *face Centrului de difuzare a presei*, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. — seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și *altora*; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F.-seria B sînt *epuizate.*

—Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 *lei anual*, sau 1 leu exemplarul. Abonamentele se pot face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARCUŞEVICI	Şiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerile lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducţiei matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităţilor.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARCUŞEVICI	Arii şi logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuaţilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice şi alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime şi minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele şi observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calculul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVŢEV	Experienţe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente de teoria congruenţelor de drepte.
20. GH. ŢIŢEICA	Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.
22. NICOLAE STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORŞ	Noţiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate

C. 756. — Intreprinderea Poligrafică nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426

..AT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ОБМЕНА

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

TRĂIASCĂ
ÎN VECI PRIETENIA
ROMÎNO-SOVIETICĂ!

Anul VIII — octombrie 1957

10

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VIII, nr. 10 — octombrie 1957

SUMARUL

Pag.

1. *La a patruzecea aniversare a Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie* 505
2. *Meteoritica, un nou domeniu de sine stătător al ştiinţei, de E. L. Krinov* 510
3. *Contribuţiile fizicienilor ruşi şi sovietici la dezvoltarea fizicii, de Wiszmek Carol* 524
4. *Teoreme echivalente cu teoremele lui Menelaus şi Ceva, de D. V. Ionescu* 534
5. *Probleme rezolvate (2337, 2341, 2348, 2349, 2351, 2355, 2363, 2370, 2371, 2372, 2374, 2382)* 541
6. *Probleme propuse (2807 — 2834)* 551
7. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 1025 — E: 1035)* 554
8. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 555
9. *Olimpiada de matematică şi fizică 1957 — 1958 (cl. V—VII)* . . . . . .
10. *Olimpiada de matematică şi fizică 1958 (înv. mediu)*

Anul VIII 10 octombrie

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovan A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ. redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articole, note, recenzii, probleme propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia G.M.F.-B se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII Nr. 10 octombrie 1957

LA A PATRUZECEA ANIVERSARE A MARII REVOLUŢII SOCIALISTE DIN OCTOMBRIE

CÎND acum patruzeci de ani s-a instaurat puterea muncitorilor şi ţăranilor în fostul imperiu ţarist, ideologii burgheziei şi reprezentanţii de frunte ai puterilor imperialiste erau convinşi că nu-i vorba decît de un rezultat trecător; că în fond, şi apoi şi în formă, totul va reveni la «normal», adică orînduirea capitalistă nu va fi ştirbită, nicăieri şi cu atît mai puţin într-una din cele mai mari ţări de pe glob, participantă activă la primul război mondial, imperialist.

Dar atît propaganda unora cît şi toate încercările disperate ale celorlalţi au fost zadarnice. Tonele de cerneală şi pădurile transformate în hîrtie nu au ajutat la nimic, după cum nici lock-out-ul sau blocada economică, războiul civil sau intervenţia armată a «celor 14 state», acţiunile contrarevoluţionare sau crearea de fracţiuni în partid, tîlhărescul război hitlerist, antisovietic sau ameninţarea cu folosirea armei atomice şi termonucleare nu au făcut decît ca azi, Uniunea Republicelor Sovietice Socialiste să fie purtătoarea de cuvînt a ideilor celor mai avansate pe plan mondial şi forţa conducătoare a lagărului socialist care uneşte într-o legătură trainică, tovărăşească, state ce numără aproape un miliard de locuitori ai globului pămîntesc.

Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie, a cărei a patruzecea aniversare o sărbătorim, a izbucnit şi a devenit victorioasă ca o reacţie plină de mînie şi de forţă, împotriva războiului imperialist care secătuia ţara, împotriva exploatării crunte a capitaliştilor şi moşierilor, împotriva asupririi naţionale. Dar învingînd, Revoluţia a dovedit îndată caracterul ei nou: de-a rupe cu exploatarea omului de către om şi nu de-a înlocui o exploatare printr-alta.

La 25 octombrie (7 noiembrie) 1917, guvernul provizoriu burghez a fost răsturnat la Petersburg (azi Leningrad). Bolşevicii care au condus cucerirea puterii în capitală aveau majoritatea în congresul Sovietelor care şi-au început lucrările tot atunci. Acesta a proclamat trecerea întregii puteri în mîna Sovietelor, a constituit guvernul muncitoresc — ţărănesc în frunte cu V.I. Lenin şi a adoptat primele legi ale noii puteri: decretul asupra păcii şi asupra pămîntului.

In cîteva săptămîni, revoluția socialistă a învins în toată țara, în linii esențiale, dovedind încă odată caracterul ei popular, internaționalist.

Noua putere de stat instaurată, dictatura proletariatului, s-a dovedit a fi cea mai democratică formă de guvernămînt. Ea se bazează pe alianța clasei muncitoare cu țărănimea muncitoare, conducerea revenind proletariatului. Sfărîmînd vechiul aparat de stat și constituind sovietele de deputați ai muncitorilor și țăranilor, dictatura proletariatului a dovedit ce înseamnă în fapt democrația pentru cei ce muncesc: majoritatea covîrșitoare a poporului.

După cucerirea puterii politice, muncitorii și țăranii au devenit stăpîni și ai întregului pămînt, ai fabricelor și uzinelor, ai minelor și mijloacelor de transport, ai centralelor energetice și băncilor. După colectivizarea agriculturii, în Uniunea Sovietică s-a trecut la consolidarea societății fără clase antagoniste, fără luptă de clasă. S-a putut ajunge astfel la unitatea moral-politică a poporului, s-au dezvoltat patriotismul socialist și noua atitudine față de muncă și față de proprietate, puternice și nemaiîntîlnite forțe de dezvoltare a societății omenești. Larga participare a cetățenilor sovietici și a organizațiilor lor obștești la rezolvarea tuturor problemelor sociale este o dovadă grăitoare a înaltului democratism sovietic. Deputații sovietelor supreme ale URSS și ale republicilor, ai sovietelor regiunilor, ținuturilor, raioanelor, orașelor și comunelor și comisiile permanente de pe lîngă ele înglobează milioane de cetățeni sovietici care participă nemijlocit la luarea măsurilor celor mai indicate pentru binele colectivității.

Rezolvarea problemei naționale este o altă dovadă grăitoare a înaltului nivel al democrației socialiste. Lichidînd inegalitatea națiunilor și exploatarea colonialistă a regiunilor periferice ale fostului imperiu țarist, dictatura proletariatului s-a dovedit încă odată cea mai înaltă formă de democrație. Asigurînd o dezvoltare furtunoasă forțelor de producție ale republicelor unionale, ale republicilor și regiunilor autonome, s-a creat sau restabilit viața de stat a naționalităților respective, s-au creat cadre naționale și o cultură nouă, națională prin formă, socialistă prin conținut.

Revoluția culturală pe planul întregului stat este o verigă componentă a revoluției socialiste. S-au creat astfel cadre de specialiști proveniți din rîndurile clasei muncitoare și ale țărănimii, care au putut satisface nevoile tuturor sectoarelor economice, administrative, educativ-culturale, sanitare etc., alături și împreună cu cea mai mare parte a vechii intelectualități. S-a lichidat analfabetismul, înfloresc toate artele, științele. Bunăstarea poporului crește necontenit, acesta fiind scopul principal al politicii partidului și guvernului.

Vitalitatea fără precedent și legătura indestructibilă cu poporul a regimului sovietic s-au verificat și s-au călit în timpul războiului civil și în lupta victorioasă împotriva intervenției imperialiștilor (1918—1921), în perioada refacerii economiei distruse de război și a începutului industrializării socialiste (1921—1927), în timpul colectivizării masive și a rezistenței îndîrjite a chiaburimii (1927—1934), în perioada construcției industriei socialiste a primelor cincinale (1929—1941), în timpul Marelui Război de Apărare împotriva Germaniei hitleriste și a aliaților ei (1941—1945), în refacerea distrugerilor pricinuite de acest război și a dezvoltării mai departe a statului sovietic în timpul cincinalelor postbelice. În perioada antebelică, URSS a fost singurul stat socialist; cu tot nivelul scăzut moștenit de la capitaliști, în condiții de blocadă și de dușmănie manifestată pe plan internațional și de rezistență îndîrjită a resturilor claselor exploatatoare pe plan intern, regimul sovietic, bazat pe masele de zeci de milioane ale oamenilor sovietici a construit un stat, a dezvoltat o economie și o orînduire socialistă care s-au dovedit mai puternice decît Germania hitleristă care fusese ajutată cu multe miliarde

de dolari de imperialismul mondial în pregătirea războiului și care folosea resursele umane și economice al celei mai mari părți ale Europei.

Forțele armate sovietice și-au îndeplinit misiunea de eliberare atît a regiunilor cotropite ale URSS, cît și a multor popoare europene și asiatice. Ofensiva victorioasă sovietică s-a îmbinat cu mișcarea de eliberare națională din țările cotropite de hitleriști și militariștii japonezi și a contribuit la formarea statelor de democrație populară, printre care se numără și Republica Populară Romînă.

Dar războiul a produs pierderi uriașe: multe milioane de oameni sovietici au fost omorîți sau au devenit invalizi, distrugeri materiale colosale în valoare de aproape 680 miliarde ruble au fost provocate economiei naționale și bunurilor cetățenilor. Și cu toate acestea, regimul sovietic nu a fost slăbit. Cel de-al patrulea și al cincilea plan cincinal au făcut ca URSS să depășească cu mult nivelul economic antebelic: în 1956 producția industrială a fost de 3,5 ori mai mare decît în 1940, în 1957 ea va fi de 33 ori mai mare decît în 1913, marile gospodării agricole socialiste înzestrate cu tehnica înaintată a milioane de tractoare, mașini, autocamioane, au permis o reducere masivă a forțelor de muncă folosite în agricultură, concomitent cu o creștere de 1,5 ori a suprafețelor însămînțate și a producției la hectar.

In producția industrială mondială, cota parte a URSS a crescut de la 2% în 1917 la 20%, azi.

Știința sovietică a dat și dă un sprijin substanțial la dezvoltarea tehnică, economică, culturală și sanitară a țării, la rezolvarea celor mai importante probleme ale energeticii, construcției de mașini, metalurgiei, radiotehnicii, aerodinamicii, automatizării, la introducerea în producție a tehnicii celei mai noi dar și la dezvoltarea științelor teoretice: matematica, mecanica, fizica, chimia, electronica. Construcția primei centrale atomo-electrice din lume, a sincrofazotronului — cel mai puternic accelerator de particule din lume, experimentarea cu succes pentru prima dată în lume a rachetei balistice intercontinentale. lansarea primului satelit artificial al pămîntului sînt cîteva exemple de înaltul nivel atins de știința și tehnica sovietică.

Socialismul asigură ridicarea continuă a nivelului cultural și material al poporului sovietic. Șomajul a fost desființat, numărul muncitorilor și funcționarilor este de patru ori mai mare decît în 1913. Salariul real (în care se înglobează învățămîntul și asistența medicală gratuite, pensiile și alte avantaje suportate de stat, precum și reducerea zilei de lucru) depășește de cîteva ori nivelul anului 1913. Veniturile reale ale țăranilor muncitori au crescut incomparabil față de perioada dinaintea revoluției.

Lichidînd monopolul claselor avute asupra învățămîntului, revoluția socialistă a permis să se asigure azi trecerea la generalizarea învățămîntului în școlile de 10 ani. Peste 50 milioane de oameni sînt înscriși în toate formele de învățămînt. In învățămîntul superior și mediu tehnic special sînt de peste 22 ori mai mulți studenți decît în 1913. In nicio țară capitalistă nu există un ritm atît de amplu de creștere al cadrelor superioare și științifice ca în URSS.

Congresul al XX-lea al PCUS a trasat programul concret al construcției comuniste în etapa actuală, pe baza dezvoltării cu precădere a industriei grele, a ridicării productivității muncii, a avîntului agriculturii, a ridicării bunelstări materiale și nivelului cultural al poporului sovietic, pe baza dezvoltării creatoare a centralismului democratic în conducerea economiei. Planurile de perspectivă pentru dezvoltarea URSS pînă în 1965 și coordonarea lor cu cele ale țărilor de demoerație populară vor asigura în continuare înflorircra multilaterată a acestor țări.

Partidul Comunist s-a dovedit a fi condiția hotărîtoare pentru ca poporul sovietic să-și îndeplinească nobila sa misiune istorică: zdrobirea capitalismului și construcția cumunismului în URSS. Fără partidul creat și educat de Lenin, format din elementele de avantgardă ale clasei muncitoare, ale poporului, puternic prin unitatea sa de nezdruncinat, condus de teoria marxist-leninistă, legat prin mii de fire cu masele poporului, n-ar fi putut fi victorioasă revoluția socialistă.

Partidul a crescut și s-a întărit odată cu URSS: de la 240.000 membri din zilele marelui Octombrie, el a ajuns azi la circa opt milioane de membri și candidați; în momente dintre cele mai dificile pentru viața țării, poporul și-a trimis contingente întregi din fiii săi cei mai credincioși, cei mai avansați, în rîndurile Partidului. Numai sub conducerea PCUS, avantgarda călită a proletariatului, care a înțeles legile de dezvoltare a societății și a știut să învingă piedici, adversități și greșeli, munca creatoare a maselor de milioane de oameni sovietici a putut face să triumfe socialismul și să treacă la construirea comunismului. Partidul comuniștilor este sufletul întregii activități a poporului, pe care-l însuflețește și-l mobilizează prin intermediul organizațiilor de masă, prin întreaga muncă de educație în spiritul marxist-leninismului creator.

Poporul sovietic a arătat și arată deplină încredere partidului său pentru că acesta nu cunoaște alte interese decît ale poporului. Intre partid și popor există și va exista tot timpul o deplină unitate și în aceasta constă izvorul forței partidului și poporului.

Marea Revoluție Socialistă din Octombrie a adus o nouă orientare și în relațiile dintre state. Politica de apărare și în această direcție a intereselor fundamentale ale celor ce muncesc s-a evidențiat de la nașterea statului sovietic și s-a manifestat apoi cu consecvență între cele două războaie mondiale, la începutul celui de-al doilea și în toți anii de după terminarea lui. Deoarece în societatea socialistă nu există clase interesate în război sau în înarmare, politica externă sovietică a fost tot timpul pentru pace, pentru dezarmare și relații prietenești bazate pe egalitate în drepturi și neamestec în treburile interne. În cadrul O.N.U., reprezentanții sovietici fac mereu propuneri în vederea reducerii forțelor armate și a dezarmării, a interzicerii armelor de distrugere în masă, a încetării experiențelor cu aceste arme, a nefolosirii forței pentru rezolvarea problemelor litigioase în Orientul apropiat și mijlociu etc. După toți pașii făcuți de URSS în întîmpinarea punctelor de vedere ale delegațiilor occidentale, s-a constatat păstrarea atitudinii «de pe poziții de forță» din partea acestora.

În vremea noastră, state socialiste și nesocialiste, numărînd un miliard și jumătate de locuitori, ca și multe milioane de oameni din țările capitaliste și semicoloniale legate de acestea, spun un «nu» hotărît războiului, pentru a feri omenirea de cataclismul distrugător pe care l-ar reprezenta un al treilea război mondial.

Dar dacă, cu toate acestea, imperialiștii vor îndrăzni să-l dezlănțuie, atunci lupta popoarelor va duce la prăbușirea întregului sistem capitalist.

Revoluția din Octombrie a exercitat și continuă să exercite o puternică influență asupra luptei de eliberare de sub jugul capitalismului, al colonialismului, al tuturor asupritorilor, oferind exemplul unui drum victorios, imaginea unei dezvoltări spre bunăstare și progres.

Formarea lagărului socialismului, care cuprinde azi 36% din suprafața și 26% din populația globului și care dă 1/3 din producția industrială mondială, a schimbat în mod hotărîtor raportul de forțe dintre capitalism și socialism, în favoarea socialismului. Continua întărire a acestui lagăr consolidează pozițiile socialismului și tuturor forțelor progresiste, în lumea întreagă.

Şi nici nu se poate ca lucrurile să nu stea aşa, dat fiindcă ţările socialiste au aceleaşi interese, ideologia ce le călăuzeşte este aceiaşi, scopul lor final este identic. S-au stabilit, de aceea, relaţii de schimb tovărăşesc de experienţă, de strînsă colaborare economică şi de întrajutorare frăţească între popoarele, guvernele şi partidele marxist-leniniste ale R.P. Albania, R.P. Bulgaria, R. Cehoslovacă, R.P. Chineză, R.P.D. Coreeană, R.P.F.Jugoslavia, R.P. Mongolă, R.P. Polonă, R.P. Romînă, R.P. Ungară, U.R.S.S., R.D. Vietnam, R. D. Germană.

Ţara noastră a simţit din plin în toate momentele grele de ordin politic, economic, tehnic, ajutorul tovărăşesc al URSS şi al celorlalte ţări ale lagărului socialist, s-a bucurat şi se bucură de o perfectă colaborare multilaterală bazată pe internaţionalismul proletar. Aceasta a asigurat dezvoltarea rapidă a patriei noastre şi securitatea ei pînă acum, aceasta chezăşuieşte înflorirea ei pe mai departe şi siguranţa construirii vieţii noi, socialiste, în viitor.

Experienţa bogată a Uniunii Sovietice, a celorlalte ţări socialiste, a întregii mişcări muncitoreşti internaţionale dovedeşte că victoria revoluţiei socialiste şi construcţia noii societăţi au următoarele trăsături şi legi general valabile: cucerirea puterii politice de către clasa muncitoare; formarea şi întărirea statului socialist, a democraţiei pentru toţi cei ce muncesc, a mijloacelor de apărare împotriva duşmanilor interni şi externi; alianţa clasei muncitoare cu masele de bază ale ţărănimii şi cu celelalte pături muncitoare; îndepărtarea tuturor inegalităţilor naţionale, asigurarea colaborării frăţeşti între popoare; înlocuirea proprietăţii capitaliste cu proprietatea socialistă asupra principalelor mijloace de producţie; dezvoltarea planificată a întregii economii, îndreptată spre construirea socialismului şi comunismului, spre ridicarea nivelului de trai al celor ce muncesc; transformarea socialistă a agriculturii; solidaritatea cu toţi cei ce luptă pentru victoria socialismului şi comunismului; şi toate acestea sub conducerea partidului de tip nou, marxist-leninist, tare prin unitatea sa şi prin legăturile sale cu masele.

Aceste partide aplică în mod creator, nedogmatic, experienţa întregii mişcări muncitoreşti, ţinînd seama de condiţiile concrete, de tradiţia istorică a fiecărei ţări, dar, în luptă îndîrjită contra revizionismului, nu renunţă la nici una din concluziile fundamentale ale acestei experienţe, ca cele enumerate mai sus.

Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie a dat o lovitură nimicitoare ideologiei burgheze, oportunismului şi naţionalismului şovin, în mişcarea muncitorească. Odată cu accentuarea contradicţiilor capitalismului, aceasta a dus la creşterea şi întărirea mişcării comuniste internaţionale, a tendinţei spre unitate a clasei muncitoare, în lupta împotriva capitalismului, pentru pace, democraţie, socialism.

Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie a contribuit la dezvoltarea crizei sistemului colonial al imperialismului. După cel de-al doilea război mondial, această criză a continuat să se adîncească; s-a format Republica Populară Chineză ca rezultat al victoriei marelui popor chinez asupra forţelor imperialismului şi a reacţiunii feudale interne; s-au eliberat peste 1.300.000.000 oameni (adică o jumătate din omenire) de sub asuprirea colonială şi s-au format mari state independente (China, India, Indonezia, Birmania, Egipt, Siria): este epoca prevăzută de Lenin, a renaşterii popoarelor orientului care-şi rezolvă singure propriile lor probleme şi participă activ la rezolvarea problemelor întregii omeniri.

Existenţa URSS şi a celorlalte state socialiste, care apără principiul leninist al autodeterminării popoarelor, uşurează lupta fostelor şi actualelor popoare coloniale împotriva puterilor colonialiste, pentru o viaţă independentă, pentru dezvoltarea lor economică şi socială.

Importanța internațională a Marei Revoluții Socialiste din Octombrie crește mereu. În lumina succeselor obținute de lagărul socialist, se vede din ce în ce mai clar în întreaga lume deosebirea dintre perspectivele celor două sisteme economice sociale actuale: capitalismul este în decădere, merge spre sfîrșitul său inevitabil; socialismul înflorește, fiecare plan cincinal îl face să fie mai puternic.

La cea de-a 40-a aniversare a Marei Revoluții Socialiste din Octombrie, poporul romîn este mîndru că face parte din lagărul socialist și este totodată ferm hotărît să contribuie cu toate forțele sale la întărirea continuă a lagărului păcii și socialismului.

METEORITICA — UN NOU DOMENIU DE SINE STĂTĂTOR AL ȘTIINȚEI

E. L. KRINOV

secretar științific al Comitetului pentru meteoriți al Academiei de Științe a URSS

METEORIȚII — mase de fier, de fier-piatră și de piatră — care cad pe suprafața pămîntului din spațiul interplanetar, reprezintă unica substanță solidă extraterestră accesibilă studiului direct. În acest studiu se pot folosi metode fizice, chimice, petrografice precum și metode specifice legate de rezolvarea anumitor probleme.

Căderea meteoriților are loc în mod neașteptat, deci nu se poate prevedea nici timpul și nici locul unde se va produce. Aceasta înseamnă că nu se poate organiza și efectua în mod sistematic observații asupra fenomenelor care însoțesc căderile lor. De aceea informațiile privitoare la aceste fenomene, precum și unele date asupra traiectoriilor atmosferice, a orbitelor corpurilor meteoritice se obțin pe baza prelucrării descrierilor făcute de martori oculari întîmplători. Datorită erorilor care s-ar putea strecura în aceste descrieri, se efectuează de obicei interogarea în masă a martorilor oculari și pe cît posibil, într-un număr mare de localități, de puncte de observație. În felul acesta se pot obține rezultate mai mult sau mai puțin demne de încredere. Pentru studiul compoziției meteoriților, cît și al împrejurărilor și condițiilor de cădere se aplică metode specifice. De aceia acest studiu s-a închegat într-un domeniu științific de sine stătător, recunoscut astăzi de toată lumea — meteoritica.

Meteoritica cuprinde studiul materiei meteoritice în toate stările și manifestările ei. Principalul său conținut constă în studiul multilateral al compoziției, al structurii, al proprietăților morfologice și fizice ale meteoriților, în evidențierea particularităților prin care ei se deosebesc de formațiile terestre, precum și a trăsăturilor generale tipice, atît pentru meteoriți cît și pentru rocile terestre. Compoziția meteoriților, structura și proprietățile lor fizice reflectă condițiile lor de formare și întreaga lor istorie de după aceea.

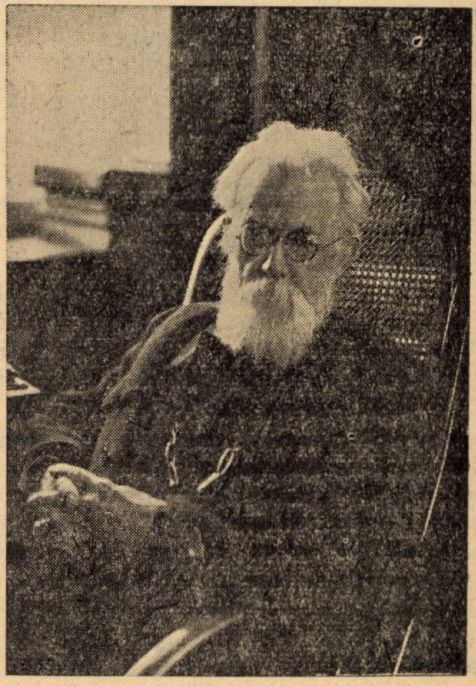
Meteoritica mai cuprinde și studiul multilateral al mișcării corpurilor meteoritice în atmosfera terestră și în spațiul interplanetar: determinarea traiectoriilor în atmosferă și calculul orbitelor, studiul interacțiunii corpurilor meteoritice cu atmosfera, atunci cînd ele se mișcă prin ea cu o viteză cosmică, studiul mecanismului distrugerii corpurilor meteoritice etc.

Începuturile meteoritice trebuie să fie raportate la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Încă în 1749, în Rusia, pe malul îndepărtatului Enisei, localnicul Medvedev a descoperit un bloc de fier care cîntărea peste 600 kg. Mai tîrziu,

în 1872, această descoperire a atras atenţia academicianului rus P. S. Pallas. El s-a îngrijit ca probe din acest bloc de fier — care a căpătat mai tîrziu denumirea de «fierul lui Pallas» să fie aduse la Academia de Ştiinţe din Petersburg. O parte din probe au ajuns şi în străinătate, mai ales în Germania. Ele au fost supuse aici unui studiu amănunţit de către cunoscutul fizician Chladny, care a ajuns la concluzia că «fierul lui Pallas» este de origină extraterestră, adică reprezintă un meteorit. După această concluzie şi alte mase de fier sau de piatră găsite în diverse locuri în Europa, sînt meteoriţi. Chladny a expus rezultatele cercetărilor sale într-o carte editată la Riga (Rusia) în 1794. Pentru importantele sale cercetări în domeniul fizicii, Chladny a fost ales în 1794, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din Petersburg. În acelaşi timp, în Europa apuseană, lucrările lui Chladny erau criticate şi luate în derîdere. Concluziile sale referitoare la posibilitatea căderii meteoriţilor şi faptul că «fierul lui Pallas» — ca şi alte mase asemănătoare — sînt meteoriţi, au fost recunoscute acolo numai de puţini savanţi. Abia în 1803, după ce în Franţa, în apropierea oraşelului L'Aigle a căzut o mare ploaie de meteoriţi de piatră concluziile lui Chladny au căpătat recunoaşterea generală. Studiul condiţiilor în care a avut loc căderea acestei ploi de meteoriţi a fost efectuat de către academicianul francez Biot.

Din cele relatate rezultă clar că Rusia este patria meteoriticii.

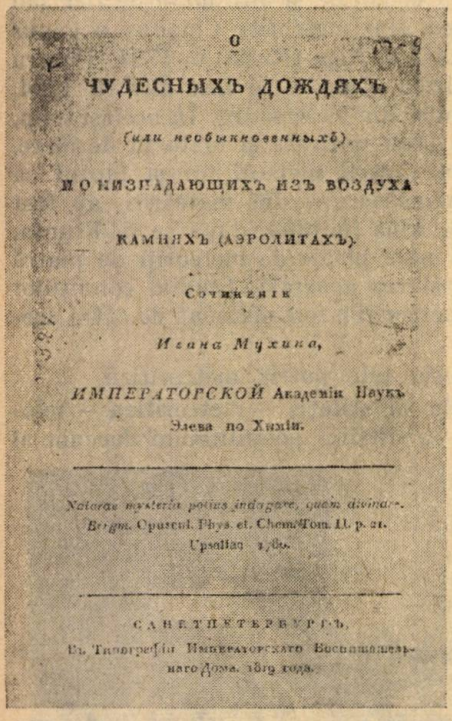
Chiar denumirea acestui nou domeniu al ştiinţei — meteoritica — folosită astăzi în toată lumea, a fost propusă la sfîrşitul penultimului deceniu al secolului trecut de către savantul rus I. I. Simaşcov. Într-un articol el face pe bună dreptate, observaţia că toate condiţiile pentru ca studiul meteoriţilor să constituie un domeniu de sine stătător al ştiinţei sînt îndeplinite. El scria cu mîndrie că «...concepţiilor moderne despre fenomenele de acest fel (adică despre căderea meteoriţilor) şi despre caracterul lor natural, le-a fost sortit să apară... pe baza unui material rus («fierul lui Pallas» din Siberia) şi de sub o presă tipografică rusă, la Riga în 1794, referindu-se la cartea lui Chladny.



Academicianul V. I. Vernadski.

Conform recunoaşterii generale, principala direcţie a muncii de cercetare în domeniul meteoriticii constă în rezolvarea problemei condiţiilor de formare a meteoriţilor, în cunoaşterea istoriei ulterioare formării, precum şi a rolului lor în alcătuirea şi în evoluţia sistemului planetar. Ar trebui să adăugăm că nu este o exagerare să afirmăm că studiul cel mai profund şi mai minuţios al compoziţiei şi structurii complexe a meteoriţilor va permite să se rezolve mai repede, mai complet şi cu mai multă

siguranță problema compoziției și naturii norului protoplanetar, a evoluției sale pînă la formarea planetelor. Importanța științifică excepțională pe care o prezintă studiul meteoriților este subliniată de cuvintele eminentului om de știință rus, academicianul V. I. Vernadski care a spus în comunicarea ținută la ședința Secției de științe naturale și matematice a Academiei de științe a U.R.S.S., din 1938: « Se pare că de-abia acum importanța meteoriticii pătrunde cu adevărat în conștiința științifică. Munca de un secol și jumătate dusă îm acest domeniu al cunoașterii, care se amplifică intens în ultimul deceniu permite să se tragă concluzii generale asupra cărora găsesc că este necesar să atrag atenția nu numai Academiei, dar și tuturor oamenilor care gîndesc în țara noastră, pentru a dezvolta munca Academiei noastre în acest domeniu științific de cea mai mare importanță... ».


ЧУДЕСНЫХЪ ДОЖДЯХЪ

(или необыкновенныхъ),

ПО НИЗПАДАЮЩИХЪ ИЗЪ ВОЗДУХА

КАМНЯХЪ (АЭРОЛИТАХЪ).

Сочиненіе

Ивана Мухина,

ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ

Эдева по Химіи.

Naturæ mysteria potius indagare, quam divinare.
Bergm. Opuscul. Phys. et. Chem. Tom. II. p. 21.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Fig. 2. Pagina cu titlul cărții lui I. Muhin, « Despre meteoriți ».

Trebuie să spunem că monografiile editate în Rusia: a lui Afanasie Stoicovici, « Despre pietrele aeriene și origina lor » (Harvoc, 1807) și a lui Ivan Muhin, « Despre ploile minunate (sau neobișnuite) și despre pietrele care cad din aer « aeroliți » (Petersburg, 1919) (fig. 2), sau dovedit a fi printre primele lucrări din literatura de specialitate. Ele au contribuit în mod considerabil la răspîndirea cunoștințelor despre meteoriți în Rusia, și păstrează pînă astăzi o anumită valoare științifică.

Din inițiativa academicianului V. I. Vernadski (1921), pe lîngă Muzeul Mineralogic al Academiei de Științe din Rusia a fost creată o secție de meteoriți, unde munca era dusă de cercetătorul principal L. A. Kulik, sub conducerea lui V. I. Vernadski. Mai tîrziu (1933), pe lîngă Academia de Științe a U.R.S.S., a fost creată o Comisie pentru meteoriți, iar în 1939 această comisie a fost transformată în Comitetul pentru meteoriți, care există și astăzi. Comitetul reprezintă forul științific central al U.R.S.S. pentru meteoritică; el se ocupă cu strîngerea studiilor și conservarea meteoriților. În prezent mai există comitete și comisii de acest fel pe lîngă unele Academii de științe ale republicilor unionale. Au fost de asemenea create comisii pentru meteoriți pe lîngă filiala din Ural a Societății de Mineralogie Unională din Sverdlovsc și pe lîngă Filiala Vest-Siberiană a Societății de geografie unională din Omsk. Ele lucrează pe teritoriul diferitelor republici sau ținuturi, avînd mai ales rolul de a strînge meteoriți și informații privitoare la fenomenele observate odată cu căderea acestora. Munca comisiilor și comitetelor republicane este coordonată de către Comitetul pentru meteoriți al Academiei de Științe a U.R.S.S. Acest comitet organizează cu regularitate în fiecare an, conferințe de specialitate; prima conferință a avut loc

în 1949. În noiembrie 1956 a fost organizată a 7-a conferință pentru meteoriți. Conferința are de scop să sintetizeze rezultatele activității din domeniul meteoriticii, să studieze datele obținute și să elaboreze directive și sarcini concrete pentru munca ulterioară.

Comitetul pentru meteoriți al Academiei de Științe al U.R.S.S. publică, neperiodic, o culegere de articole speciale, «Meteoritica», începînd din 1941. În 1956 a fost editat al 14-lea număr. În culegerea «Meteoritica» sînt tipărite lucrările științifice din domeniul meteoriticii efectuate de către oamenii de știință sovietici, precum și textele comunicărilor prezentate la conferințe.

În perioada postbelică, în U.R.S.S. au fost publicate numeroase monografii științifice, cataloage, tratate și cărți de popularizare științifică de meteoritică.

Care sînt rezulttele din acest domeniu, obținute de cercetătorii sovietici?

După cum se știe, după ce pentru observarea meteoriților au început să fie folosite fotografia și radarul, s-a stabilit apartenența la sistemul solar a corpurilor meteoritice care dau naștere la meteoriți. Această concluzie se bazează pe faptul că orbitele corpurilor meteoritice sînt eliptice. La aceleași concluzii conduc și cercetările asupra căderii de meteoriți. Date deosebit de convingătoare și demne de încredere au fost obținute de către acad. V. G. Fesencov și N. B. Divari, prin studiul condițiilor de cădere și prin determinarea orbitei celebrului meteorit din Sihote-Alin. S-a constatat că aceasta are o orbită asteroidală tipică (fig. 3). Meteoritul din Sihote-Alin a căzut la 12 februarie 1947, la 0 h 30 m, ora universală, în prelungirile din Vest ale lanțului Sihote-Alin, împrăștiindu-se ca o ploaie de meteoriți de fier pe un teritoriu de 1,6 km². În decurs de 4 ani din 1947 și pînă în 1950, Comitetul a dirijat în fiecare an, în raza de cădere, o expediție specială pentru studiul condițiilor de cădere și strîngerea substanței meteoritice căzute. Ca rezultat al muncii celor patru expediții, care au activat în total timp de 19 luni, s-au descoperit 122 de pîlnii cu diametrul între 0,5 și 26,5m (fig. 4 și 5) și 78 de scobituri mici cu diametrul sub 0,5 m. Îu afară de acestea, de pe suprafața terenului s-au cules 175 de exemplare individuale mărunte, cu greutatea între 1kg și mai puțin, pînă la fracțiuni de gram (fig. 6). Meteoriții mari, care cîntăreau sute de kilograme și chiar tone, și care au format la căderea lor pîlnii de cîțiva metri, s-au separat lovindu-se de stînci în mii de fragmente care s-au împrăștiat pretutindeni în jurul pîlniilor. Cel mai mare dintre exemplarele întregi (fig. 7), care au fost găsite, a avut greutatea de 1745 kg, iar unul dintre cele mai mici (fig. 8) — 0,18 g. În total s-au strîns și s-au transportat din Taiga, aproximativ 23 de tone de substanță meteoritică.

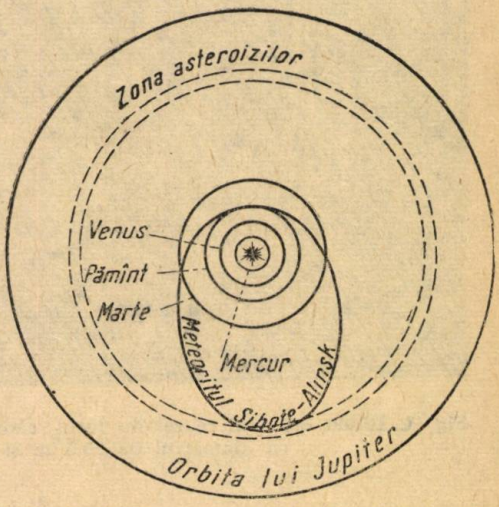


Fig. 3. Orbita meteoritului din Sihote-Alin (după V. G. Fesencov).

Fig. 4. Pîlnia cea mai mare din locul căderii ploii de meteoriți din Sihote-Alin, cu diametrul de 25,5 m și cu adîncimea de 6 m.

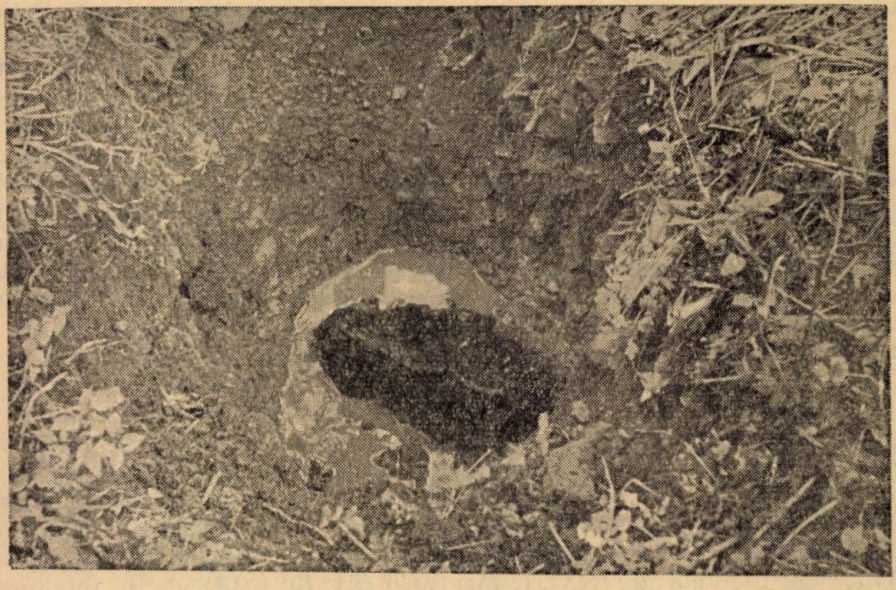


Fig. 5. Una din pîlniile mici de pe locul căderii ploii de meteoriți din Sihote-Alin, după săparea ei; pe fundul pîlniei se vede un meteorit.

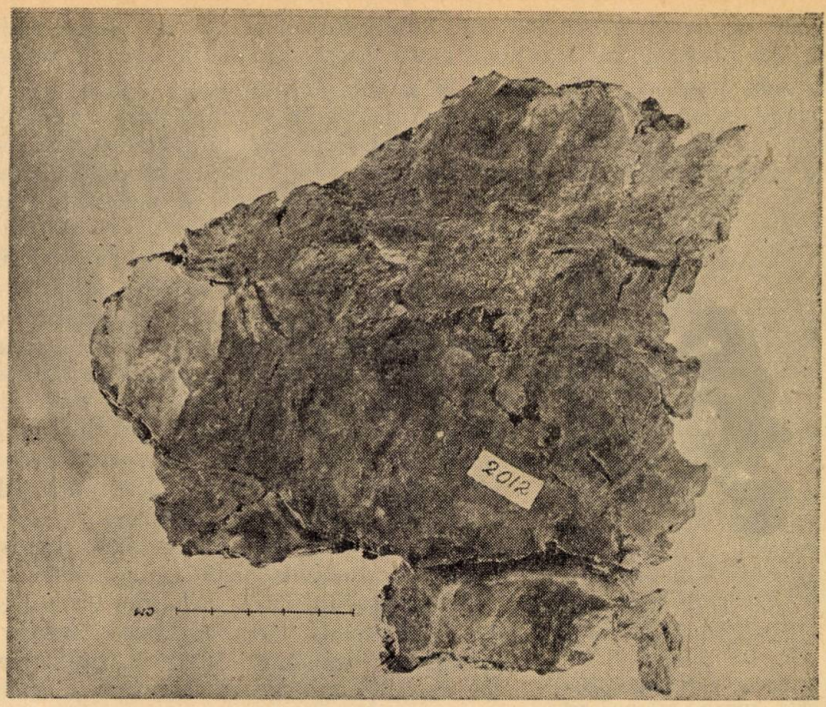


Fig. 6. Un fragment pitic al unei mase meteoritice mari care s-a spart ciocnindu-se de stînci în momentul căderii.

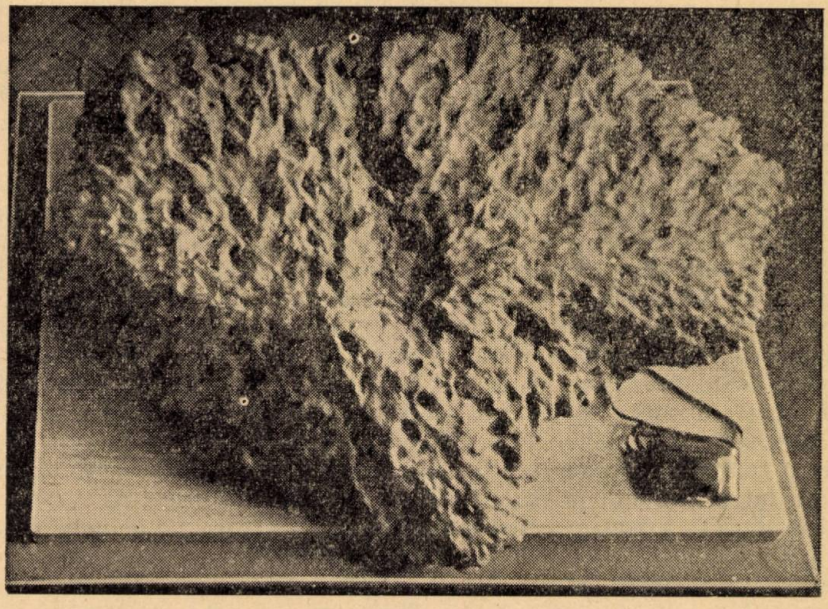


Fig. 7. Exemplarul individual întreg, cel mai mare, al ploii de meteoriți din Sihote-Alin, în greutate de 1.745 kg.

Ploaia de meteoriți de fier din Sihote-Alin prezintă un interes științific deosebit. Ea prezintă cea mai mare masă meteoritică de fier căzută pe pămînt în fața unor martori oculari care au putut observa toate fenomenele ce au însoțit căderea sa. Ca rezultat s-a putut determina — după cum am menționat mai sus — nu numai traiectoria prin atmosferă a corpului meteoritic, dar și elementele orbitei sale. Pe de altă parte, studiul împrejurărilor complexe în care a avut loc căderea ploii de meteoriți — care a lăsat urme vii — a permis să se obțină date noi asupra condițiilor generale ale căderii meteoriților pe pămînt; în sfîrșit, strîngerea unei cantități mari de substanță meteoritică caracterizată printr-o varietate extrem de mare de proprietăți morfologice, a permis să se studieze mecanismul distrugerii unui corp meteoritic în mișcarea sa prin atmosfera terestră și să se realizeze o serie de cercetări specifice care cer cantitități relativ mari de substanță. Mișcîndu-se prin atmosfera pămîntului cu o viteză cosmică corpurile meteoritice sînt supuse distrugerii. Această distrugere se manifestă în două forme: în primul rînd, corpurile meteoritice se rup în fragmente, iar în al doilea rînd ele pierd o parte din substanța lor prin pulverizare în atmosferă (împrăștierea substanței topite în picături mărunte și prin evaporare).

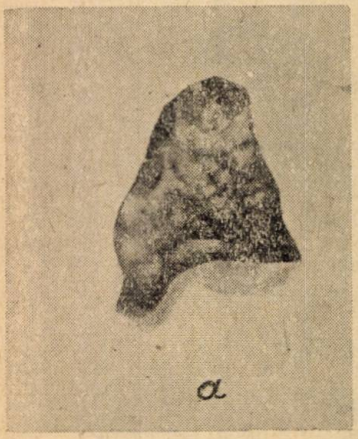


Fig. 8. — Unul din exemplarele individuale întregi, cel mai mic, al ploii de meteoriți din Sihote-Alin, în greutate de 0,18 g, mărit de 7 ori.

Datorită fragmentării, pe suprafața terestră nu cad de obicei meteoriți izolați, ci ploi de meteoriți, iar ca rezultat al pulverizării în atmosfera terestră, aceasta se «impurifică»; ia naștere astfel, așa numita pulbere meteoritică. În afară de aceasta, meteoriții care ajung la suprafața pămîntului, adică exemplarele individuale ale ploilor de meteoriți, au dimensiuni mai mici în comparație cu masele inițiale ale corpurilor meteoritice care pătrund în atmosfera terestră.

Pentru studiul condițiilor de mișcare a corpurilor meteoritice în atmosfera terestră și pentru stabilirea mecanismului distrugerii lor, prezintă o importanță deosebită studiul proprietăților morfologice ale meteoriților. Acest studiu a căpătat dezvoltare în U.R.S.S. și se aplică astăzi cu succes la determinarea condițiilor de cădere ale meteoriților. Rezultate deosebit de însemnate în această privință au fost obținute de autor, prin studiul proprietăților morfologice ale ploilor de meteoriți de la Sihote-Alin. Cercetarea a arătat că această ploaie s-a format datorită ruperii în mii de părți, în atmosferă,a unei mase de fier inițial unice. Această fragmentare intensă s-a produs datorită structurii specifice de bucăți și «grinzi» a corpului meteoritic (fig. 9). Substanța meteoritică este compusă din bucăți, discuri izolate și din «grinzi» cu dimensiuni cuprinse între fracțiuni de milimetru și mai mulți centimetri. Adesea între diferitele bucăți există straturi intermediare formate din mineralele schreibersită și troilită. Slăbind legătura între diferitele bucăți, aceste straturi intermediare au contribuit la fărămițarea corpului meteoritic de fier.

La studiul ploii de meteoriți din Sihote-Alin a mai fost stabilit un rezultat important: descoperirea fenomenului de stropire. Acest fenomen constă

în faptul că pe multe exemplare individuale acoperite cu o scoarță de topire, se observă picături solidificate de substanță topită a meteoritului. Aceste picături au fost desprinse de către curenții de aer puternici de pe diferitele ieșituri și margini ale meteoriților. Pe alocuri, pe suprafețele meteoriților se observă numeroși stropi concentrați (fig. 10). În alte locuri s-au descoperit sfere mici

Fig. 9. Structura interioară de bucăți și grinzi, și orientarea octoedrică care se observă pe suprafața de pilire corodată a unuia din exemplarele individuale ale ploii de meteoriți din Sihote-Alin.

izolate sau grupuri de astfel de sfere, care sînt cîteodată sudate în scoarța meteoriților (fig. 11). Sferele de același fel au fost descoperite mai tîrziu de autor în solul luat de pe locul căderii ploii de meteoriți (fig. 12). Ele s-au precipitat pe suprafața terestră din urma de pulbere rămasă după ce corpul a trecut prin atmosferă, urmă care s-a observat timp de cîteva ore sub forma unei fîșii cenușii de fum. Studiul acestor mici sfere a arătat că ele au o compoziție magnetitică, ceea ce se explică prin oxidarea în aer a unor picături de fier — nichel topit, suflate de curenții de pe suprafața meteoriților. S-a stabilit apoi, că în interior, aceste sfere sînt poroase; printre sfere s-au găsit și unele goale înnăuntru. Diametrul sferelor pline și goale reprezintă zecimi și sutimi de milimetri. Sferele și picăturile stropite pe suprafețe au fost descoperite de autor și la mulți alți meteoriți, chiar și la cei de piatră.

Studiul morfologic al meteoriților conduce la concluzia că la mișcarea lor prin atmosferă terestră corpurile meteoritice își pierd o parte relativ mică din masa lor inițială. Așadar, concepțiile vechi bazate pe calcule teoretice,

Fig. 10. Stropi solidificaţi de fier-nichel topit pe scoarţa de topire a unuia din exemplarele individuale ale ploii de meteoriţi din Sihote- Alin, măriţi de 22 ori.

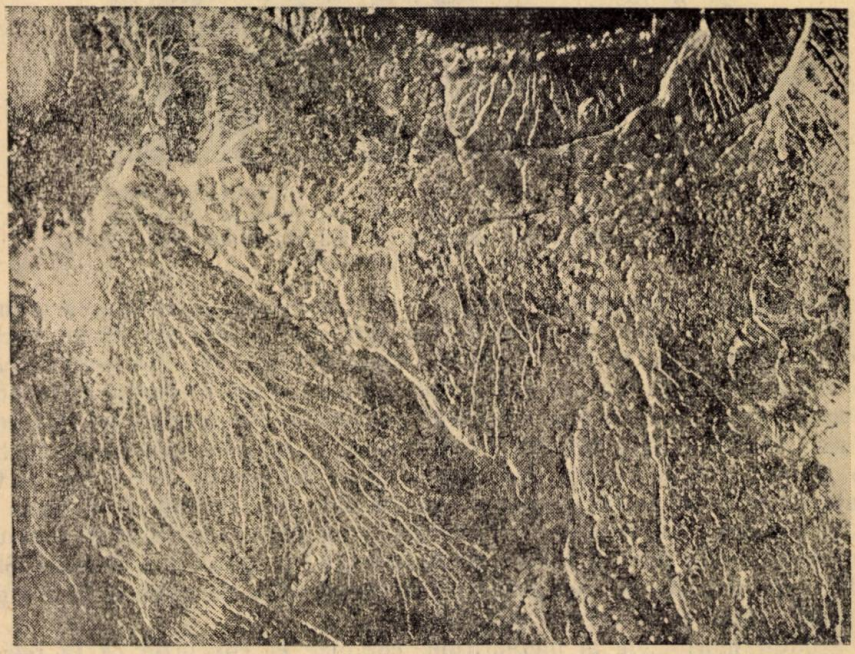


Fig. 11. — Structura superficială complexă a scoarţei de topire pe unul din exemplarele individuale ale ploii de meteoriţi din Sihote-Alin.

după care meteoriţii care ajung la suprafaţa pămîntului ar forma în cel mai bun caz o zecime din masa iniţială a corpului meteoritic nu sînt confirmate de studiul morfologic.

În sfîrşit, pe baza studiului morfologic, autorul a tras concluzia că, corpurile meteoritice din spaţiul interplanetar nu sînt nişte fragmente neregulate, aşa cum se crede de obicei, ci au forme geometrice poliedrale care corespund

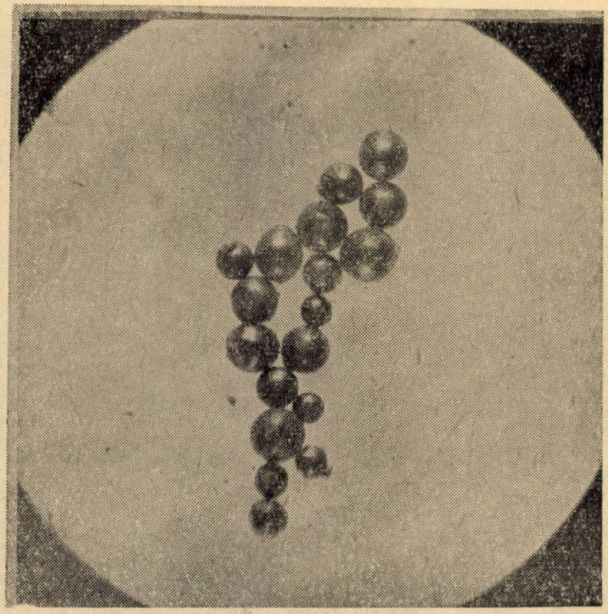


Fig. 12. Sfere de magnetită extrase din pămînt în regiunea căderii ploii de meteoriţi din Sihote-Alin. Mărire de aprox. 56 de ori.

structurilor interioare ale corpurilor meteoriţice. Atît prima concluzie cît şi cea de-a doua se bazează pe faptul că în anumite cazuri meteoriţii prezintă urme ale formelor lor poliedrale iniţiale (fig. 13). Acestea s-au putut păstra după trecerea prin atmosferă numai în condiţia unei pierderi relativ mici de substanţă de către un corp meteoritic care avea la început o formă poliedrală.

În cazuri excepţionale, cînd corpul meteoritic are o masă iniţială foarte mare, zeci şi sute de mii de tone, regiunea opririi sale este situată sub suprafaţa pămîntului. Cu alte cuvinte, restul corpului meteoric care trece prin întreaga grosime a atmosferei terestre se ciocneşte de suprafaţa pămîntului cu o viteză cosmică.

Cercetările teoretice asupra condiţiilor de cădere ale meteoriţilor gigantici au fost efectuate recent de savanţii sovietici K. P. Staniukovici şi V. V. Fedînski. Cercetările au arătat că atunci cînd viteza de cădere a meteoritului la suprafaţa pămîntului este de 3—4 km/s, din locul ciocnirii se propagă ca dintr-un centru de explozie, o undă de şoc puternică, care distruge nu numai meteoritul dar şi porţiunile învecinate ale terenului. În cazul unei viteze atît de mari, un corp solid capătă proprietăţile unui gaz puternic comprimat, datorită forţei de coeziune moleculară relativ mică în comparaţie cu energia undei de şoc. Drept consecinţă a acestui fapt se produce o explozie a meteoritului.

Căderea celebrului meteorit Tungussk, care a căzut în Siberia centrală în dimineaţa zilei de 31 iunie 1908, a fost de asemenea însoţită de o explozie. Unda de explozie a doborît la pămînt copacii din pădure pe o rază de 30—40 km în jurul locului exploziei (fig. 14—15). Zgomotul exploziei a putut fi auzit pînă la o distanţă de 1000 km, iar raza teritoriului de pe care a fost observat un bolid (glob de foc) strălucitor pe cer, a depăşit 600 km. Din

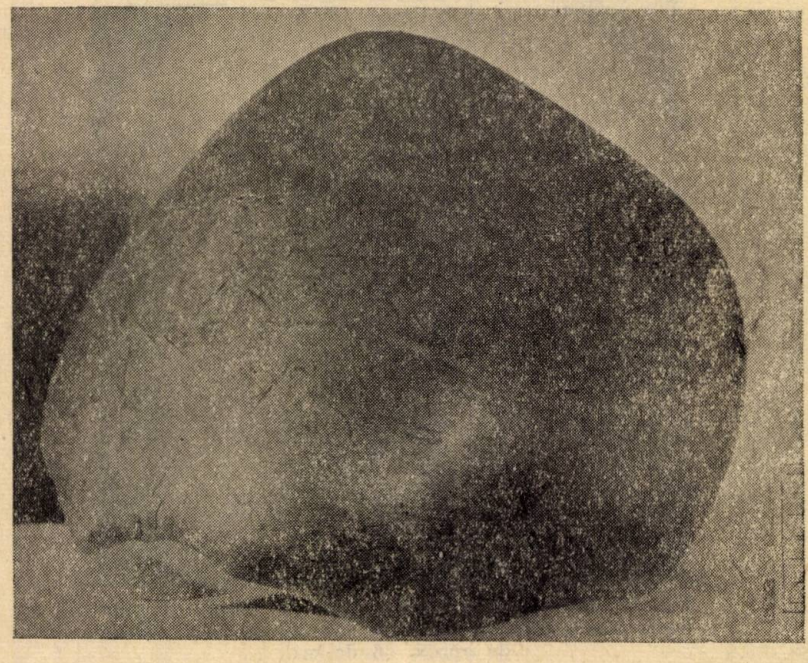


Fig. 13. Meteoritul de fier Repeev Hutor, care a căzut în U.R.S.S. la 8 august 1933. Meteoritul. care cîntăreşte 12,35 kg, prezintă urmele unei forme exterioare octoedrice.

cauza exploziei, masa foarte mare a meteoritului s-a transformat în gaz. Datorită acestui fapt nici una din expediţiile sovietice care au lucrat timp de cîţiva ani la sfîrşitul celui de-al treilea şi începutul celui de-al patrulea deceniu al secolului nostru sub conducere lui L.A.Kulik nu a reuşit să descopere nici un fragment al meteoritului. De altfel, trebuie să menţionăm că meteoritul Tungussk a putut fi de piatră şi de aceea este posibil să nu se fi păstrat nimic din el după explozie. Pe de altă parte, chiar dacă acest meteorit ar fi fost de fier, fragmente mici din el, care s-ar fi răspîndit în jurul locului exploziei sînt extrem de greu de descoperit în Taiga la cîteva zeci de ani după cădere.

Actualmente condiţiile de cădere ale meteoritului Tungussk sînt în linii generale lămurite, însă multe detalii ale fenomenului mai necesită un studiu amănunţit. De exemplu, este foarte important de stabilit conturul precis al regiunii în care au fost doborîţi copacii din pădure, aria acestei regiuni şi intensitatea distrugerii pricinuite; de asemenea trebuie determinat carac-

Fig. 14. Pădurea doborîtă în regiunea căderii meteoritului din Tungussk.

Fig. 15. Acelaşi lucru în altă porţiune. În primul plan se văd trunchiurile copacilor care nu au fost smulse fiind apărate de o colină împotriva efectului undei de şoc a exploziei.

terul propagării undei de explozie, influlenţa reliefului terenului asupra propagării undei de explozie etc.

Pe teritoriul Uniuni Sovietice, şi anume pe insula Saarema din R.S.S. Estonă, se află un grup de cratere meteoritice denumite Kaali. Grupul este format din şapte cratere cu diametri între 11 şi 110 m. Craterele au fost studiate între anii 1927 şi 1939 de inginerul minier I.A.Reinwaldt. El a reuşit să descopere într-unul din ele, fragmentele unui meteorit de fier cu greutatea de 102 g şi să stabilească urmele exploziei meteoriţilor. În vara anului 1956 savanţii estonieni E.Pobul, A.Aloe şi L.Sarva au reluat studiul craterelor. Ei au cules un preţios material cu privire la structura craterelor şi au descoperit de asemenea fragmente de meteoriţi, cu greutatea de 401 g.

Cercetătorii sovietici au obţinut rezultate importante şi în studiul compoziţiei meteoriţilor.

În legătură cu aceasta trebuie să menţionăm în primul rînd descrierea ştiinţifică a colecţiei de meteoriţi a Comitetului de meteoriţi de pe lîngă Academia de Ştiinţe a U.R.S.S, dată de academicienii A.N.Zavariţki şi L.G.Kvaşa în ultimii ani. Rezultatele acestei lucrări sînt expuse într-o monografie specială publicată sub titlul «Meteoriţi din U.R.S.S». De o importanţă deosebită este descoperirea apei de cristalizare în aşa numitele chondrite carbonice (un tip special de meteoriţi de fier). Apa de cristalizare intră în compoziţia mineralului din grupul de chondrite constituind peste 8% din greutatea întregului meteorit.

Un mare număr de chimişti şi mineralogi-petrografi sovietici: P. N. Cirvinski, B.P.Kupleţki, L.S.Selivanov, V.S.Saltîkova, D.P.Maliuga, I.A.Iudin şi mulţi alţii, au studiat în amănunt mulţi meteoriţi de pe teritoriul sovietic şi din alte ţări. Ei au stabilit date importante asupra compoziţiei chimico-mineralogice a multor meteoriţi. În ultimul timp, M.I.Diaconova şi L.G.Kvaşa au stabilit date cu privire la compoziţia chimică şi mineralogică şi la structura meteoritului de fier din Sihote-Alin.

Concluzii foarte interesante cu privire la condiţiile de formare a meteoriţilor au fost obţinute de către A. A. Iavnel ca rezultat al studiului compoziţiei chimice a meteoriţilor. După părerea sa, regularităţile compoziţiei chimice a meteoriţilor trebuie să caracterizeze procesele care s-au produs în stadiile timpurii ale evoluţiei materiei meteoritice. În cercetarea sa, Iavnel a folosit datele cele mai complete despre compoziţia meteoriţilor din toate cele trei clase: de piatră, de piatră-fier şi fier, aplicînd pentru aceasta, o metodă statistică de prelucrare a datelor cu privire la compoziţia chimică. El nu a studiat compoziţia globală a meteoriţilor, ci compoziţia diferitelor faze: metalică şi de silicaţi. În ordinea creşterii cantităţii medii a fazei metalice, toţi meteoriţii se împart în şase subclase: achondriţi bogaţi în calciu, achondriţi săraci în calciu (hondriţi, mezosideriţi, palassiţi şi sideriţi). Mai departe, după compoziţia principală a fazelor, toţi meteoriţii se subdivid în interiorul fiecărei subclase, în cinci grupuri. Prezenţa acestor grupuri se manifestă deosebit de clar în studiul conţinutului de nichel în faza metalică şi de FeO în faza de silicaţi a meteoriţilor. La trecerea de la grupa I la grupa V creşte conţinutul de nichel în faza metalică şi de asemenea cantitatea de FeO, — şi în general, de fier legat în faza de silicaţi; în acelaşi timp creşte şi raportul fazelor.

Pe baza prezenţei a cinci grupuri de meteoriţi în fiecare subclasă, Iavnel ajunge la concluzia că fiecare grup de meteoriţi din fiecare subclasă s-a format dintr-un corp izolat de tipul unui asteroid care a avut o structură în

straturi avînd în interior un nucleu de fier-nichel. Aşadar, prezenţa a cinci grupuri de meteoriţi arată că ei s-au format toţi în urma dezagregării a cel puţin cinci asteroizi cu compoziţii şi dimensiuni întrucîtva diferite. Dar în afară de aceşti cinci asteroizi ale căror resturi sînt meteoriţii cunoscuţi astăzi, au putut exista şi alţi asteroizi care au dat naştere la meteoriţi.

Legătura regulată dintre compoziţia fazelor şi rapotul lor pentru fiecare asteroid şi în diferitele lui straturi (subclase), care se determină din datele cunoscute cu privire la meteoriţi, se explică — după părerea lui Iavnel — prin procesul de diferenţiere a materiei după compoziţie în norul protoplanetar, iar apoi prin diferenţierea fazelor în diferitele corpuri.

Ideile interesante ale lui Iavnel merită o atenţie deosebită, însă pentru a obţine confirmarea valabilităţii concluziilor sale sînt necesare cercetări ulterioare asupra compoziţiei meteoriţilor. În ultimul timp, o serie de cercetători sovietici au obţinut noi date variate cu privire la meteoriţi. Astfel, idei noi asupra condiţiilor de formare a chondrulelor (sfere de diferite dimensiuni cuprinse în masa principală a unui meteorit) au fost emise de către cercetătorii sovietici B.I.Levin şi G.A.Slonimski. Autorii citaţi emit ipoteza că în norul protoplanetar condensarea substanţelor de silicaţi s-a produs la temperaturi joase formîndu-se particule amorfe de forme neregulate. Ulterior, creşterea acestor particule a dus la o formă sferoidală, adică alipirea moleculelor, atomilor sau ionilor este la fel de probabilă în toate direcţile. În condiţiile existente în norul protoplanetar unde frînarea creşterii datorită impurificării suprafeţelor particulelor prin electroliţi este aproape absentă — dimensiunile particulelor trebuie să fie diferite şi să atingă valori însemnate, ceea ce se şi observă la chondrule. Structurile care se observă în chondrule s-au format abia în meteoriţi, în urma cristalizării.

Cercetătorii sovietici I.E.Starik, K.A.Petrjack, N.N.Semeniuşkin M.A.Bah, M.M.Şaţ şi A.V.Trofimov au stabilit că există aceiaşi compoziţie izotopică a unor elemente (sulf, carbon, uraniu), ca şi în diferite formaţii terestre. Acest rezultat demonstrează unitatea materiei pămîntului şi a corpurilor meteoritice, deci existenţa unei origini unice a acestor corpuri.

Lucrări încununate de succes cu privire la determinarea vîrstei meteoriţilor de piatră prin metoda de argon, au fost efectuate în ultimii ani de către E.K.Gherling şi K.G.Rik. Metoda de argon a fost aplicată pentru prima dată la meteoriţi, în U.R.S.S, de către Gherling.

Autorii citaţi au ajuns la concluzia că metoda de argon nu dă vîrsta substanţei meteoritului, ci caracterizează timpul care s-a scurs din momentul ultimelor modificări ale meteoriţilor, care au avut loc probabil în spaţiu interplanetar. De aici rezultă că numai valoriile maxime ale vîrstei, determinate prin metoda de argon, au o valoare reală şi indică o limită inferioară a vîrstei întregului sistem solar. Valorile vîrstei, obţinute pentru chondriţii care nu prezintă urme vizibile de metamorfism sînt de ordinul a 4 pînă la 4 miliarde şi ceva ani, adică vîrsta meteoriţilor s-a dovedit a fi apropiată de vîrsta sistemului planetar.

Rezultate interesante s-au obţinut de către E.S.Burkser şi K.N.Alexeeva, prin studiul proprietăţilor fizice ale meteoriţilor, şi anume, a greutăţii specifice, a proprietăţilor magnetice, a conductibilităţii electrice şi a proprietăţilor elastice. Autorii citaţi au ajuns la concluzia că particularităţile proprietăţilor fizice ale meteoriţilor de piatră oglindesc două procese fundamentale în isto-

ria formării lor: aglomerarea particulelor solide mici şi încălzirea lor ulterioară, care au condus la modificarea structurii masei.

În încheiere trebuie să spunem că în Uniunea Sovietică s-au obţinut succese serioase în domeniul meteoriticii. S-au obţinut date foarte variate şi pe deplin demne de încredere, atît despre condiţiile de cădere a meteoriţilor, cît şi despre compoziţia lor, s-au emis ipoteze noi cu privire la condiţiile de formare a meteoriţilor, bazate pe date faptice noi.

CONTRIBUŢIILE FIZICIENILOR RUŞI ŞI SOVIETICI LA DEZVOLTAREA FIZICII

WISZMEK CAROL, conf. univ. Timişoara

FOARTE mulţi savanţi ruşi şi sovietici au adus importante contribuţii la dezvoltarea fizicii şi a tehnicii. De multe ori însă, lucrările lor fie că nu erau luate în consideraţie, fie că erau subapreciate. Numele lor a fost dat uitării, iar invenţiile lor au fost atribuite chiar şi în patria lor, altor oameni, care au izbutit într-un fel sau altul să atragă atenţia marilor firme capitaliste din Europa şi din America asupra problemelor şi invenţiilor reluate de ei. Din numeroasele cazuri de acest fel, reamintim de exemplu, descoperirea telegrafiei fără fir, care mult timp era atribuită chiar şi în Rusia, lui Marconi, deşi se datora savantului rus A.S.Popov.

În sec. al XVIII-lea Academia de Ştiinţe din Petersburg a devenit un centru în jurul căruia s-au strîns majoritatea cercetătorilor, deoarece Petru cel Mare, care a călătorit în ţările mai înaintate ale Apusului, dorea să ridice nivelul cultural şi tehnic al patriei sale şi să-i întărească capacitatea de apărare.

La începutul sec. al XVIII-lea nu existau încă nici în Europa occidentală, laboratoare propriu zise de fizică, ci doar cabinete de fizică care erau mai mult muzee de diferite aparate. Cabinetul de fizică din Petersburg era condus de Kraft, apoi de cunoscutul fizician Georg Richmann, ucis în anul 1753 de un fulger, în cursul unor experienţe cu electricitatea atmosferică. În acest cabinet a lucrat împreună cu Richmann şi marele savant şi cercetător rus M.V.Lomonosov, pînă în momentul morţii tragice a celui dintîi. După aceasta, conducerea cabinetului de fizică a fost încredinţată cunoscutului fizician Epinus, venit de la Berlin, care nu se interesa însă de fizica experimentală şi în consecinţă, Lomonosov nu a mai putut să se folosească de aparatele laboratorului.

În anul 1863 a luat fiinţă un laborator destul de modest la Heidelberg căruia i-au urmat laboratoarele mai bine înzestrate de la Viena, Paris, şi Oxford Primul laborator de fizică a fost construit la Berlin în jurul anului 1850, de către profesorul Magnus. Acest laborator era foarte neîncăpător: în el nu puteau lucra mai mult de şase oameni. Aici a lucrat A.Stoletov (1852 împreună cu colegul său Avenarius (mai tîrziu profesor de fizică la Kiev).

În anul 1872, Stoletov a înfiinţat primul laborator universitar de fizică din Rusia. Deşi era instalat într-o încăpere improprie, în acest laborator au fost începute imediat cercetări ştiinţifice sistematice în domeniul fizicii, iar studenţii au putut din acel moment, să studieze fizica nu numai după manuale,

dar şi prin lucrări de laborator. Pe timpul lui Stoletov au început să se construiască laboratoare de fizică în diferite oraşe mari din Rusia. Stoletov a pus astfel bazele cercetărilor ştiinţifice şi a deschis calea creării unei adevărate şcoli de fizică. El nu poate fi însă considerat conducătorul unei şcoli, deoarece acei care se intitulau cu mîndrie elevi ai săi veneau la el cu concepţii ştiinţifice formate, veneau la el mai mult ca la un tovarăş mai în vîrstă.

Prima şcoală de fizică din Rusia a luat fiinţă la Universitatea din Moscova. Ea a fost creată de P.N.Lebedev la începutul ultimului deceniu al secolului trecut. Din acel moment nu se mai putea spune că în Rusia nu existau condiţii necesare dezvoltării activităţii ştiinţifice în domeniul fizicii, asemănătoare celor din alte ţări. Într-un anumit sens se poate spune că Stoletov şi Lebedev au desăvîrşit marea operă începută de Lomonosov. Dacă Lomonosov, prin multilaterala sa activitate, prin prodigioasa sa operă a arătat că « Pămîntul rus poate rodi », apoi numele lui Stoletov rămîne legat în istoria fizicii ruse de trecerea de la cabinetele de fizică de tip vechi la laboratoarele de fizică moderne, iar numele lui Lebedev de crearea primei şcoli ruse de fizică, ca formă superioară de organizare a activităţii ştiinţifice din acea vreme.

Să trecem în revistă contribuţiile savanţilor ruşi şi sovietici la dezvoltarea fizicii.

Leonard Euler (1707—1783) a lucrat la Academia din Petersburg şi a fost primul fizician care a dat legilor din mecanică o formă analitică, jucînd astfel un mare rol în dezvoltarea mecanicii.

M. V. Lomonosov a fost primul care a enunţat legea conservării materiei şi energiei, încă în anul 1748, în scrisoarea sa către L. Euler, publicată în anii 1756 şi 1760: « Toate schimbările care se petrec în natură sînt de aşa fel, încît atît cît se ia unui corp, se adaugă altuia. Astfel, dacă undeva se pierde o cantitate de materie ea se va adăuga în alt loc: cîte ore va petrece cineva treaz, atîtea le-a furat somnului. Această lege universală a naturii cuprinde şi regulile mişcării, deoarece un corp care mişcă prin forţa sa un alt corp pierde atîta mişcare, cîtă transmite celuilalt, care o capătă de la el ».

Punctele de plecare ale lui Lomonosov, atît pentru stabilirea legii de mai sus, cît şi pentru celelalte lucrări, au fost determinate de concepţiile materialiste. Baza lucrărilor sale a fost concepţia atomistică. În locul vechiului atom mecanic—cea mai mică particulă care nu este decît limita de divizibilitate a substanţei—Lomonosov a anunţat pentru prima dată existenţa atomilor chimici, particule care posedă anumite proprietăţi chimice. Lomonosov a introdus concepţia despre molecule şi a stabilit diferenţa netă între ele şi atomi; tot el le-a dat denumirea de corpuscule, respectiv elemente.

Concepţiile lui Lomonosov asupra atomisticii l-a dus la convingerea despre natura cinetică a căldurii. În locul noţiunii idealiste, care predomina în acea vreme, despre existenţa unei substanţe speciale « flogisticul », Lomonosov a arătat că propagarea căldurii se face printr-o « mişcare de rotaţie » a particulelor. Această concepţie a lui Lomonosov este expusă în lucrarea sa « Consideraţii asupra cauzei căldurii şi a frigului », scrisă în limba latină în 1744. Ca argument principal Lomonosov prezenta încălzirea corpurilor ca rezultat al frecării. Această concepţie a fost apoi întărită prin experienţele lui Rumford şi Davy, care au probat inexistenţa evidentă a caloricului, căldura fiind o formă de energie, o manifestare a materiei în mişcare. Ideea lui Lomonosov că toate corpurile sînt constituite din particule sferice, care se ating între ele şi

se rotesc incontinuu, trasmiţînd una alteia mişcarea de rotaţie, a fost dezvoltată în al 9-lea deceniu al secolului trecut de Helmholtz şi Boltzman, în Germania şi Austria, şi de Joseph John Thomson, în Anglia.

Concepţiile despre natura cinetică a căldurii au permis lui Lomonosov să stabilească existenţa « celui mai mare şi ultim grad de frig »—adică temperatura limită inferioară pe care o numim « zero absolut », şi care corespunde unei încetări complete a mişcării de rotaţie a particulelor.

Aceleaşi idei i-au permis să stabilească imposibilitatea trecerii libere a căldurii de la un corp mai rece la unul mai cald, fapt care a fost pentru prima dată stabilit de el, în anul 1747.

Astfel Lomonosov este primul pionier al termodinamicii. Al doilea pionier este tot un savant rus, academicianul G.J.Hess, care a stabilit în 1836, pe cale experimentală, legea care îi poartă numele în istoria ştiinţei universale: « efectul termic al unei transformări chimice depinde numai de starea iniţială şi finală a sistemului şi nu depinde de drumul urmat de reacţie». Pentru a da o dezvoltare completă a primei faze de dezvoltare a termodinamicii, trebuie să amintim şi lucrările lui Sady Carnot, care în 1824 analizează în ansanblu problema transformării căldurii în lucru mecanic şi izbuteşte să mărească randamentul maşinilor termice. În 1842 Robert Mayer stabileşte teoretic, echivalentul mecanic al caloriei, iar în 1843 Joule îl determină pe cale experimentală.

Ilustrul savant M.V. Lomonosov a studiat îndeaproape fenomenele electrice, interesîndu-se în special de descărcările electrice care se produc în atmosferă. În comunicarea sa « Cuvînt asupra fenomenelor atmosferice produse de forţa electrică » din sesiunea anului 1753 a Academiei de Ştiinţe din Petersburg, Lomonosov spunea: « În teoria mea asupra cauzei forţei electrice din atmosferă nu sînt cu nimic dator lui Franklin »; iar mai departe: « Am demonstrat prin expunerea mea, că stratul superior al atmosferei nu numai că poate, dar cîteodată chiar trebuie să pătrundă în cel inferior. Bazîndu-mă pe aceasta am explicat multe fenomene legate de forţa tunetului, despre care Franklin nici măcar nu a amintit ».

Un alt domeniu de cercetare al lui Lomonosov este natura stării gazoase. Şi aici cunoştinţele sale atomice l-au condus la rezultate foarte importante. Imaginea dată de Lomonosov despre starea haotică a atomilor de aer se apropie mult de concepţiile actuale. Studiind proprietăţile gazelor, Lomonosov a stabilit de asemenea, că la presiuni ridicate legea lui Boyle nu se aplică la aer.

Lomonosov a fost primul care a stabilit că soluţiile apoase ale sărurilor se solidifică la temperaturi mai joase decît apa curată şi că mărirea concentraţiei provoacă scăderea temperaturii de solidificare.

Lomonosov avea şi multe descoperiri originale în domeniul chimiei, dintre care, trebuie amintită metoda cantitativă de cercetare. Introducînd balanţa în uzul laboratoarelor de chimie Lomonosov l-a depăşit pe Lavoisier, căruia i se atribue deseori această metodă de lucru.

A. G. Stoletov a dat primele date cu privire la magnetizarea fierului în funcţie de intensitatea cîmpului de magnetizare exterior în lucrarea sa de doctorat « Cercetări asupra funcţiei de magnetizare a fierului moale », în 1871. Cercetările sale asupra fenomenelor « actinoelectrice » (1888 — 1889) au avut un rol important în clarificarea naturii efectului fotoelectric, care este larg folosit în tehnica contemporană (film sonor, televiziune etc.). Raportul asupra

cercetărilor sale « actinoelectrice », citit în cadrul Congresului internațional al specialiștilor în electricitate, care a avut loc la Paris în 1889, l-a situat pe Stoletov în primele rînduri ale fizicienilor din timpul său. El a fost ales în unanimitate vice-președinte al Congresului, președinte fiind fizicianul William Thomson, lord Kelvin.

Fizicianul rus P. N. Lebedev a fost primul care a obținut unde electromagnetice de numai 6 mm lungime. Pînă la Lebedev fuseseră obținute unde de 30—40cm. Micile prisme pentru unde scurte confecționate de Lebedev încăpeau în buzunarul vestei.

Între anii 1900—1901, Lebedev a dovedit pentru prima dată pe cale experimentală existența presiunii luminii și a măsurat-o cu exactitate. Existența presiunii luminii a fost dedusă teoretic și de Maxwell, însă majoritatea fizicienilor din acele timpuri continuau să se îndoiască de existența ei. Conform calculelor lui Lebedev presiunea luminii solare intense este numai 0,8mg/m^2. Aceasta este o valoare foarte mică, însă cînd proiectăm o rază de lumină asupra unor discuri mici înnegrite sau lucioase, care se găsesc într-un gaz rarefiat, apar forțe de reacție între discul luminat și moleculele de gaz care îl înconjoară. Lumina proiectată fiind concentrată, forța ei este fireşte mult mai mare decît forța presiunii luminii așa cum vine ea de la soare. Lebedev și-a intitulat lucrarea « Despre acțiunea ponderomotrice a undelor asupra rezonatorilor ». Cuvintele « acțiune ponderomotrice » înseamnă acțiune care pune în mișcare un corp ponderabil. Pentru această lucrare — terminată în anul 1900 — Lebedev a obținut direct titlul de doctor, fără a avea în prealabil pe acela de magistru, cum era obiceiul pe atunci.

Lebedev nu s-a oprit la măsurarea presiunii luminii asupra discurilor metalice solide, care absorb sau reflectă lumina. El și-a propus să măsoare și presiunea luminii asupra gazelor. Acestor lucrări le-a consacrat mai mult de zece ani de muncă intensă, după ce a efectuat o serie de cercetări prealabile cu elevii săi: V. I. Altberg, N. A. Kapțov, (actualmente profesor la Universitatea din Moscova), V. D. Zernov (profesor la Institutul de Transporturi din Moscova) ș.a. El a terminat lucrarea în anul 1909.

Prin cercetările sale cu privire la presiunea luminii asupra gazelor Lebedev a creat —între altele — baza fizică a teoriei cozilor cometelor, enunțată ulterior de vestitul rus F. A. Bredihin. Cozile cometelor, după cum se știe, sînt întoarse în partea opusă soarelui, ca și cînd substanța care le compune ar fi respinsă de soare. Pentru a explica acest fenomen, Bredihin a admis în teoria sa existența unei forțe de respingere, necunoscute pînă atunci. El a dovedit prin experiențe că această forță de respingere nu este altceva decît presiunea razelor solare asupra mediului gazos al cozii cometei.

Descoperirea radiotelegrafiei este deseori atribuită și astăzi lui Marconi, ceea ce este greșit. Inventatorul real al radiotelegrafiei a fost A. S. Popov. În laboratorul de fizică al Școlii de Mine din Kronstadt, Popov a reprodus experiențele lui Hertz, căutînd să mărească sensibilitatea antenei și să micșoreze lungimea de undă a aparatului lui Hertz. În acest scop el a construit drept indicator, un radiometru, pus în mișcare cu ajutorul oscilațiilor electrice, pe care l-a prezentat într-o ședință a Societății de Fizică din Petersburg. El a experimentat și perfecționat coherorul lui Branly, denumit ulterior « coherorul lui Popov ». Tot el a perfecționat oscilatorul, adică sursa de unde, mărindu-i puterea și micșorîndu-i lungimea de undă. După multiple și îndelungate cercetări Popov a reușit să construiască în 1894 un oscilator puternic, care

permitea să se renunțe la întrebuințarea oglinzilor pentru concentrarea undelor și să se întrebuințeze aparate de dimensiuni relativ mici pentru demonstrarea fenomenelor de refracție a razelor electrice, rotirea suprafeței lor de polarizare etc.

Aceste lucrări l-au condus pe Popov la construirea renumitului «înregistrator de furtuni», prototipul tuturor aparatelor de radiotelegrafie fără fir. Cu acest aparat Popov a făcut o demonstrație la ședința, pe drept cuvînt istorică, a Societății ruse de fizică și chimie de pe lîngă Universitatea din Petersburg, din 25 aprilie 1895. Comunicarea intitulată «Despre raportul dintre pulberile metalice și oscilațiile electrice» a deschis calea numeroaselor obiecțiuni ridicate mai tîrziu în legătură cu lucrările lui Marconi.

Desigur, în urma experiențelor lui Hertz, ideea folosirii undelor electrice la transmiterea fără fir a semnalelor la distanță a început să preocupe pe cercetători.

Popov înțelegea prea bine că pentru reușita transmiterii fără fir la distanță a semnalelor, este nevoie de o sursă puternică de oscilații electrice. Pe atunci nu se cunoșteau însă asemenea surse, afară de una singură: descărcările atmosferice, pe care le-a și folosit Popov. Pentru Expoziția industrială de la Nijni-Novgorod din 1896, Popov a instalat încă în luna aprilie a acelui an, «înregistratorul său de furtuni», pentru care a primit diploma: «Pentru invenția unui instrument nou și original pentru cercetarea descărcărilor atmosferice».

În iarna anului 1895 el a continuat experiențele sale la Școala de Mine din Kronstadt, propunîndu-și să construiască un aparat pentru transmiterea semnalelor la distanță. La începutul primăverii anului 1896, Popov a început primele experiențe cu noul aparat construit după aceiași schemă ca și «înregistratorul de furtuni», antena de recepție fiind fixată pe copacii grădinii Școlii de Mine. La început Popov nu a folosit antena la emisie, dar mai tîrziu a conectat la aparatul său de emisie, vibratorul, și o antenă de sîrmă. Ca rezultat al acestor experiențe, în cadrul comunicării prezentată la Societatea de fizică din Petersburg din martie 1896, el a transmis cu aparatul său la o distanță de 250 m, cuvintele «Heinrich Hertz». Entuziasmul cu care a fost întîmpinată această realizare precum și ovațiile aduse lui Popov au fost foarte mari.

În vara anului 1896 au început să apară în presa de pretutindeni, notițe despre descoperirea telegrafiei fără fir de către fizicianul italian Marconi. Aceste notițe nu erau însoțite de nici un fel de precizări asupra metodelor folosite pentru transmiterea fără fir a semnalelor sau asupra aparatelor folosite.

Problema priorității lui Marconi în descoperirea telegrafiei fără fir a fost ridicată deseori, dar de fiecare dată a eșuat. La Congresul Electrotehnic Internațional din 1900, a fost organizată o secție specială de telegrafie fără fir și au fost prezentate o serie de referate asupra dezvoltării acestui nou mijloc de comunicație. Atunci confirmarea priorității lui Popov nu a stîrnit nici o opoziție; numai într-unul din referate s-a menționat că — după toate probabilitățile — Marconi nu avea cunoștință despre lucrările lui Popov și că în orce caz lui Marconi îi revine cinstea folosirii largi a radiotelegrafiei la distanțe mari. Acest din urmă fapt nu a fost contestat nici de Popov, ale cărui mijloace tehnice și financiare nu-i permiteau aplicarea imediată și pe scară largă a descoperirii sale.

Faptul că prioritatea lui Marconi nu era tocmai clară reiese și din aceea că în unele țări — de exemplu în Germania — el nu a putut obține brevet pentru descoperirea sa, în timp ce Popov a primit din partea unor numeroase

firme străine propuneri de cumpărare a brevetului său. O astfel de propunere a primit Popov — între altele — în 1901 de la o firmă din Anglia, unde prioritatea lui Marconi părea considerată neîndoielnică.

Totuşi din cînd în cînd apăreau în presa ştiinţifică şi tehnică din Europa occidentală şi din Statele-Unite, obiecţiuni împotriva priorităţii lui Popov. Marconi era considerat mai departe inventatorul telegrafiei fără fir. Pentru a pune capăt tuturor controverselor în legătură cu această chestiune, Societatea rusă de fizică şi chimie a numit în 1908 o comisie specială, compusă din persoane cu cea mai mare autoritate ştiinţifică, cu însărcinarea de a lămuri problema din toate punctele de vedere. Comisia a dus corespondenţa cu savanţii şi inginerii cei mai documentaţi în această chestiune şi anume, Branly, Lodge, Ducreté şi alţii, şi pe baza tuturor informaţiilor culese a prezentat în şedinţa Societăţii de fizică din noiembrie 1908 un raport care se termină cu următoarele cuvinte: « Prin urmare, după datele de care dispunem, independent de orice alte împrejurări din istoricul acestei invenţii, A. S. Popov trebuie să fie recunoscut pe bună dreptate, inventatorul telegrafiei fără fir cu ajutorul undelor electrice ».

În ce priveşte prioritatea lui Popov există şi o recunoaştere din partea publicaţiei oficiale a Societăţii Marconi: în Anuarul telegrafiei şi telefoniei fără fir » (ediţia 1922) se spune: « În aprilie 1895, prof. Popov a descris o construcţie, compusă dintr-un coheror şi un ciocănaş destinată înregistrării fulgerelor, şi a presupus posibilitatea folosirii ei pentru transmiterea semnalelor la distanţe mari. În iulie el a instalat un astfel de aparat la Observatorul meteorologic din Petersburg şi a izbutit cu ajutorul generatorului Hertz, să transmită semnale la distanţă de 5km. La 2 februarie 1896 senatorul Marconi a sosit în Anglia, iar la 2 iulie a prezentat cererea de a obţine primul brevet britanic pentru telegrafia fără fir ».

Anuarul Marconi trecea însă cu vederea faptul că în martie 1896, adică cu 3 luni înainte de data înaintării cererii lui Marconi pentru obţinerea brevetului, la Petersburg, Popov transmisese o telegramă la distanţa de 250 m.

Numele savantului rus E. H. Lentz este legat de legea care stabileşte sensul curentului electric indus (1835), precum şi de aprofundate cercetări teoretice şi experimentale asupra efectelor termice ale curentului, fapt care îşi găseşte recunoaşterea în denumirea legii lui Joule-Lentz.

Academicianul rus V. V. Petrov a descoperit arcul electric şi cu ajutorul lui a separat diferite metale din oxizii lor (plumb, mercur, cositor), utilizînd drept reductori praf de cărbune, grăsimi şi uleiuri rafinate. El a pus astfel bazele electrometalurgiei. Aceste descoperiri au fost realizate cu ajutorul unei uriaşe pile Volta, construită de Petrov după o concepţie proprie (axul discurilor era dispus orizontal pentru ca lichidul să nu iasă dintre discuri). Aceste descoperiri au fost anunţate în anii 1803 şi 1804 în cărţile sale intitulate: Comunicare asupra experienţelor galvanice şi voltaice efectuate de către profesorul Vasili Petrov » şi « Noi experienţe electrice ale profesorului de fizică Vasili Petrov ».

În anul 1943, la împlinirea a 100 de ani de la moartea lui V. V. Petrov, guvernul sovietic a luat măsuri concrete pentru eternizarea memoriei lui V. V. Petrov.

Arcul electric descoperit de Petrov nu a putut fi folosit pentru iluminat sau pentru procese tehnologice şi industriale, deoarece nici pila Volta, nici elementele galvanice (elemente Bunsen etc.) nu constituiau surse electrice corespunzătoare pentru scopurile menţionate mai sus, din cauza întreţinerii

complicate, randamentul redus, volumului mare şi costului ridicat. Arcul electric şi-a găsit utilizarea numai după descoperirea de către Faraday, în 1831, a inducţiei electromagnetice. Dintre dispozitivele destinate pentru producerea arcului electric primul care a corespuns cerinţelor practice, tehnice şi economice a fost acela descoperit de P. N. Iablocicov şi brevetat mai întîi în Franţa la 23 martie 1876, apoi în Rusia în aprilie 1878, şi numit de el « lumînare electrică », spre deosebire de « regulatorii » folosiţi pe atunci şi care aveau multe dezavantaje.

Aplicarea arcului electric la sudarea şi tăierea metalelor, care a revoluţionat procesele tehnologice ale construcţiei de maşini, nave, unelte etc., se datoreşte de asemenea unor inventatori ruşi, şi anume lui N. N. Benardos (1884), care a lucrat cu un electrod de cărbune şi lui N. G. Slavianov (1891), care a folosit electrozi de metal.

Transformatorul electric, fără de care ar fi imposibile metodele moderne de distribuţie şi de transport al energiei electrice la distanţe şi adaptarea acesteia la diferite condiţii, a fost de asemenea inventat de P. N. Iablocicov, în anul 1876.

Prima lampă electrică, avînd un bastonaş de cărbune de retortă incandescent a fost inventată în 1873 de A. N. Lodîghin, pentru care Academia de ştiinţe a Rusiei i-a decernat în 1874 premiul Lomonosov, în valoare de 1000 ruble. În acelaşi an Lodîghin a luat brevetul rus pentru lampa sa. După o serie de perfecţionări el foloseşte filamentul de wolfram şi molibden. El a prezentat aceste lămpi la Expoziţia de la Paris din 1900, şi a vîndut brevetul Companiei Generale de Electricitate din America.

Fizicienii sovietici au adus importante contribuţii şi la dezvoltarea cunoştinţelor despre structura atomului şi a energiei nucleare.

Pentru bombardarea nucleelor atomice sînt necesare particule ca protoni, helioni (particule alfa), electroni de mare energie cinetică — care trebuie accelerate. Primul aparat accelerator de ioni a fost ciclotronul lui Lawrance (1934). Inconvenientul ciclotronului este faptul că pentru obţinerea unui cîmp magnetic foarte puternic, necesar curbării traiectoriei particulelor, este nevoie de magneţi uriaşi, ceea ce implică dimensiunile şi greutatea mare a ciclotronului. Fizicienii sovietici, în frunte cu Zaimoski, au reuşit să realizeze magneţi foarte puternici dintr-un aliaj special numit « magnico ». Astfel s-a construit un ciclotron de numai 56 tone, superior ciclotroanelor construite pînă atunci în alte ţări. Cu acest ciclotron, savanţii Alihanian şi Alihanov au descoperit varitronii în razele cosmice.

Pentru accelerarea electronilor au fost construite « betatroanele ». Cu aceste aparate s-au obţinut electroni cu o energie cinetică de 4 MeV. În urma teoriei stabilite de fizicianul I. P. Terleţki au fost construite betatroane în care electronii sînt accelerați pînă la energii de 100 MeV(1945) şi chiar de 300MeV (1950). Electronii accelerați servesc la producerea razelor X mai dure decît razele gamma naturale.

După ce D. D. Ivanenco şi I.I. Pomeranciuk au arătat că energia electronului încetează să crească în momentul, cînd pierderea de energie a electronului prin radiaţie egalează energia acumulată de electron prin accelerare, s-a precizat prin calcule că această limită este situată aproximativ, la 500 MeV.

Pentru a comunica electronilor energii mult mai mari decît cu ajutorul betatronului, s-a construit sincrotronul, la care electronul este accelerat în început la fel ca şi la betatron, cu ajutorul unui cîmp magnetic în creştere, iar după ce energia electronului a ajuns la o dezvoltare de ordinul unui milion de

electronvolți, începe accelerarea cu ajutorul unui cîmp electric alternativ, ca și la ciclotron. Variația cîmpului magnetic se produce numai în măsura necesității menținerii electronului pe aceeași orbită circulară. Meritul de a fi dezvoltat principiul accelerării într-un cîmp electric alternativ și de a fi găsit posibilitatea obținerii simultane a unor orbite stabile îi revine fizicianului sovietic V. I. Veksler. Tot el a rezolvat problema măririi limitei energiei comunicate particulelor grele, propunînd ca perioada de oscilație a cîmpului electric să varieze după aceiași lege ca și masa particulei accelerate. Astfel s-a ajuns la construirea aparatului numit fazotron, care poate să comunice deutronilor o energie de 200 MeV, iar particulelor alfa o energie de 400 MeV, necesitînd în acest scop generatoare electrice de tensiune mult mai mică decît aceea a ciclotronului. Pe aceste baze s-a dezvoltat rapid tehnica acceleratorilor, și împreună cu ea cunoștințele despre nucleele atomice.

Problema considerării razelor cosmice drept raze sau particule a fost pusă pentru prima dată în urma experiențelor fizicianului sovietic D. V. Skobelțin. În 1927 el a început pentru prima dată să studieze razele cosmice nu cu electrometrul obișnuit, ci cu camera lui Wilson, care permite observarea și înregistrarea urmelor lăsate de acestea ca rezultat al interacțiunii lor cu substanța. În aceste experiențe Skobelțin a adus și o complectare importantă camerii Wilson, așezînd-o într-un cîmp magnetic care recurba drumul particulelor, iar după gradul de recurbare se poate determina energia și masa particulei ionizante.

În legătură cu plăcile și filmele fotografice care se utilizează la cercetarea razelor cosmice și a structurii nucleare, trebuie să menționăm că acestea permit înregistrarea atît a particulelor ușoare, cît și a celor de mare viteză. Aceste fotomembrane au fost create în urma propunerii lui L. V. Mîsovski, în 1928: s-a mărit astfel, grosimea stratului de emulsie fotosensibilă de la 2 microni la 50 microni, trebuind modificată și rețeta de preparare și developare. La aceste plăci și filme după urmele lăsate pe ele, se poate deduce sarcina particulei după puterea ei ionizată.

Cîmpul magnetic utilizat de Skobelțin era de 15000 oerstezi. Se știe că cu cît viteza, și prin urmare energia cinetică (sau mai precis impulsul, adică produsul dintre viteză și masă) a particulei este mai mare, cu atît deviația produsă de cîmpul magnetic va fi mai mică. Făcînd observații de acest fel asupra particulelor beta ale radiului deviate destul de puternic de cîmpul magnetic, Skobelțin a descoperit pe unele fotografii niște urme absolut drepte, deci lăsate de particulele cu mare putere de pătrundere, necunoscute pînă atunci. Pentru a se obține o recurbare și la aceste particule era necesar un cîmp magnetic mai puternic, sau o retardare prealabilă a particulelor. Skobelțin a recurs la metoda a doua, plasînd în camera Wilson o lamă orizontală de plumb. Prin experiențele sale, Skobelțin a arătat pentru prima dată că energia particulelor razelor cosmice trebuie să fie cel puțin de milioane de electronvolți. Experiențele ulterioare ale lui Kuntze și Anderson (1934), care au lucrat cu cîmpuri magnetice mai puternice (cu 25.000 oerstezi), au arătat că după ieșire din placa de plumb razele cosmice prezintă curburi îndreptate simetric în sensuri opuse de aceiași finețe și intensitate. De aici s-a conchis că nu poate fi vorba de un electron (negativ) și un proton (pozitiv), ci numai de un electron negativ și un electron pozitiv numit pozitron, ambii de aceiași masă.

Fizicianul sovietic S. N. Vernov a realizat un dispozitiv montat pe o radiosondă (balon cu diferite aparate și un post de radioemisiune automat), care

în 1938 s-a urcat în stratosferă pînă la 28 km. Cu ajutorul radiosondei s-a aflat influenţa cîmpului magnetic pămîntesc asupra radiaţiilor cosmice: în apropierea polilor magnetici particulele cosmice suferă deviaţii mult mai mici decît în apropierea ecuatorului şi dacă toată radiaţia cosmică primară ar fi formată numai din fotoni, iar particulele încărcate ar apărea numai în atmosferă, nu ar exista nici o diferenţă între ecuator şi poli. Experienţele realizate de Vernov în timpul expediţiilor ecuatoriale sovietice din anii 1937—38, au arătat că intensitatea razelor cosmice în stratosferă la latitudinea ecuatorului este de patru ori mai mică decît la latitudinea Leningradului. Prin experienţele sale şi prin cercetările întreprinse pănă azi, numeroşi cercetători între care cercetători pionieri sovietici L. V. Mîsovski. A. P. Jdanov, A. J. Alihanov, A. J. Alîhanian, J. P. Terleţki, N. A. Dobroţin şi alţii, s-a stabilit că radiaţia cosmică primară constă aproximativ din 80% particule încărcate cu energii pînă la 15 miliarde electronvolţi (protoni), aproape 19% nuclee de heliu, iar restul circa 1% sînt nuclee atomice mai grele (carbon, azot, oxigen ş.a.), pînă la niobiu (număr atomic 45). Acestea corespund în linii mari cu răspîndirea relativă a aceloraşi nuclee aflate prin analiza spectrală în atmosferele stelare, din care lipsesc electronii, din cauza temperaturii enorme a mediului.

În privinţa explicării provenienţei radiaţiei cosmice, de asemenea, tot fizicienii sovietici stau în frunte. Unii savanţi din ţările capitaliste legau apariţia razelor cosmice de catastrofele din univers în timpul cărora se distrug stele întregi. Aceste afirmaţii pot duce la concluzii antiştiinţifice despre existenţa începutului sau sfîrşitului lumii, despre dispariţia treptată a materiei etc.

Fizicianul sovietic J. P. Terleţki a emis ipoteza, acceptată de V. L. Ghinsburg, precum şi de savanţii din ţările capitaliste: Fermi, Alfven ş.a., că corpurile cosmice al căror pol magnetic nu coincide cu cel geografic (cum este cazul pămîntului şi al soarelui), constituie un fel de *acceleratori de inducţie*, capabili să creeze fluxuri de particule cu o energie de cîteva miliarde de electronvolţi. Terleţki a observat că alături de cîmpurile magnetice datorite petelor solare există cîmpuri magnetice care înconjoară stelele şi se învîrtesc împreună cu ele. Deşi aceste cîmpuri sînt relativ slabe, întinderea lor este imensă, de miliarde de km. La temperaturile colosale care există în stele întreaga substanţă se compune din nuclee atomice ale diferitelor elemente chimice mai ales ale hidrogenului (protoni). Terleţki arată prin calcule, că aceste nuclee pot acumula treptat energii de miliarde de electronvolţi, împrăştiindu-se în cîmpul electromagnetic al stelelor în decursul unor intervale de timp destul de mari. Astrofizicienii au mai dedus existenţa unor îngrămădiri mari de materie rarefiată sub formă de nori de atomi ionizaţi (de ex. Galaxia); particulele acestea pot fi accelerate de cîmpul acceleratorilor cosmici pînă la energii foarte mari, răspîndindu-se departe în univers. La realizările dobîndite de astrofizicieni trebuie adăugate noile succese ale radioastronomiei — ştiinţa care se ocupă cu studiul radioundelor care sosesc pe pămînt de la stelele şi nebuloasele îndepărtate. Astfel s-au deschis posibilităţi noi, nu numai teoretice, dar şi experimentale. Radioastronomii au descoperit în spaţiul cosmic surse de particule încărcate de mare energie, surse care au mai curînd o legătură directă cu generarea razelor cosmice.

În cercetarea razelor cosmice în Uniunea Sovietică s-a dezvoltat o adevărată şcoală, dînd pionierii cei mai de seamă în acest domeniu, amintiţi mai sus. Ei au adus contribuţii foarte valoroase la cunoaşterea structurii materiei

şi pentru dezvoltarea ei în continuare. Verificarea tabloului de protoni, neutroni, pozitroni, mezoni cu varietăţile lor, varitroni cu varietăţile lor etc, precum şi cunoaşterea interacţiunilor încă nu este deplină. Trebuie găsită o metodă de extragere a acestor particule în stare pură din nucleul atomic. Calea o arată natura însăşi prin acţiunea particulelor de energii colosale ale radiaţiei cosmice, adică trebuie produse raze cosmice artificiale, care spre deosebire de cele naturale vor fi dense şi dirijabile. În acest scop sînt necesare cîmpuri electromagnetice foarte puternice. Rezolvarea principială a acestei probleme este legată de ideile care le-a exprimat pentru prima dată fizicianul sovietic V. J. Veksler, încă în anul 1944, însă de-abia în ultimul timp s-a reuşit să se construiască maşini numite cosmotroane, cu care se obţin fascicule de protoni cu energii apropiate de cele cosmice, dar de intensitate mult mai mare.

Şi acum se confirmă vestita teză a lui Engels, că provocînd fenomenele naturii cu mijloace proprii şi dirijîndu-le omul poate să dovedească forţa şi justeţea gîndirii sale ştiinţifice.

Dezvoltarea cunoştinţelor noastre despre razele cosmice a arătat că particulele elementare de substanţă nu sînt neschimbabile; ele sînt nestabile, pot dispare sau să se transforme în particule mai mici, schimbîndu-şi mereu numărul în natură, iar particulele de radiaţie pot să se transforme în particule de substanţă şi invers. Una şi aceiaşi particulă în deosebi mezonul, poate în unele condiţii să fie privită ca particulă de substanţă, iar în alte condiţii ca particulă de radiaţie.

Astfel noţiunile pe care le avem astăzi despre razele cosmice neagă caracterul imaterial al radiaţiei precum şi limita între radiaţie şi substanţă şi dovedesc existenţa formelor materiale pe care numai convenţional le putem reprezenta numai la radiaţie şi numai la substanţă, deci din punct de vedere filozofic se lichidează pretinsele deosebiri principiale între radiaţie şi substanţă.

La rîndul ei, pătrunderea adîncă în tainele structurii şi proprietăţile nucleului atomic va contribui fără îndoială, şi la progresul tehnic în domeniul însuşirii energiei nucleare pentru binele omenirii muncitoare.

Importanţa lucrărilor în domeniul razelor cosmice nu se epuizează numai prin rezultatele obţinute de fizica structurii materiei. O serie de fenomene variate astrofizice şi geofizice legate de activitatea soarelui şi a stelelor, de mişcarea diferitelor forme ale materiei interstelare, de furtunile magnetice pe pămînt şi în general de natura magnetismului pămîntesc, de procesele meteorologice din atmosferă, determină într-o măsură oarecare fie proprietăţile radiaţiei cosmice primare, fie micile variaţii ale intensităţii radiaţiei cosmice primare şi secundare, toate fiind rezultate ale unor interacţiuni universale.

Am arătat mai sus numai pionierii şi contribuţiile celor mai de seamă fizicieni ruşi şi sovietici în dezvoltarea fizicii. Mulţi sînt încă în afara celor amintiţi mai sus, care prin munca lor în colectivul universal au adus contribuţii importante în propăşirea acestei ştiinţe. O expunere complexă însă nu poate intra în cadrul prezentei lucrări.

Contribuţiile fizicienilor ruşi şi sovietici la dezvoltarea fizicii au luat o deosebită amploare după Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie, împingînd ştiinţa şi tehnica din U.R.S.S., la cel mai înalt nivel din lume, deoarece partidul comunist şi guvernul din U.R.S.S. au creat cele mai favorabile condiţii de muncă pentru oamenii de ştiinţă din această ţară.

Faptul că în cercetările asupra razelor cosmice şi în cele privitoare la structura materiei fizicienii sovietici şi-au cucerit o poziţie de frunte constituie de asemenea o garanţie, că lupta condusă de guvernul sovietic pentru interzicerea armei atomice şi pentru utilizarea energiei nucleare numai în scopuri paşnice, numai pentru binele întregii omeniri, va triumfa.

TEOREME ECHIVALENTE CU TEOREMELE LUI MENELAUS ŞI CEVA

D. V. IONESCU, prof. univ. Cluj

1. *TEOREMA lui Menelaus* are următorul enunţ: condiţia necesară şi suficientă ca punctele A', B', C' situate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC să fie colineare este ca să existe relaţia

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \tag{1}$$

Să transformăm relaţia (1) prin înlocuirile:

$$\overline{C'B} = \overline{AB} - \overline{AC'} \quad , \quad \overline{C'A} = -\overline{AC'}$$

$$\overline{B'C} = \overline{AC} - \overline{AB'} \quad , \quad \overline{B'A} = -\overline{AB'}.$$

Relaţia (1) devine

$$\overline{A'B} \cdot \frac{\overline{AC} - \overline{AB'}}{\overline{AB'}} = \overline{A'C}\,\frac{\overline{AB} - \overline{AC'}}{\overline{AC'}}$$

sau

$$\overline{A'B}\,\frac{AC}{\overline{AB'}} - \overline{A'C}\,\frac{AB}{\overline{AC'}} = \overline{A'B} - \overline{A'C}. \tag{1'}$$

Obţinem astfel:

T e o r e m a I (echivalentă cu teorema lui Menelaus). *Condiţia necesară şi suficientă ca punctele A', B', C' luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC să fie colineare este ca să existe relaţia* (1').

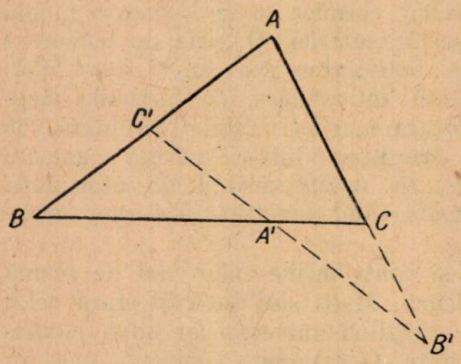


Fig. 1

Să dăm o demonstraţie directă teoremei I.

Să demonstrăm că condiţia (1') este necesară, adică presupunem că punctele A', B', C' sînt colineare şi să examinăm întîi cazul cînd punctul A' este la distanţă finită. Din triunghiul ABA' (fig. 1) se deduce vectorial că:

$$\overline{AA'} = \overline{AB} - \overline{A'B}\,*$$

însă observăm că

$$\overline{A'B} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{CB}}\,\overline{CB} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{CB}}\,(\overline{AB} - \overline{AC})$$

astfel că

$$\overline{AA'} = \overline{AB} - \frac{\overline{A'B}}{\overline{CB}}\,(\overline{AB} - \overline{AC})$$

* Vezi articolul despre vectori din G.M.F-B anul V pag. 371.

sau

$$(2) \qquad \overline{AA'} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \cdot \overline{AB} + \frac{\overline{A'B}}{\overline{CB}} \cdot \overline{AC}.$$

În mod analog, din triunghiul $AC'B'$ se deduce relaţia vectorială:

$$(3) \qquad \overline{AA'} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} \cdot \overline{AC'} + \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \overline{AB'}.$$

Însă scriind că:

$$\overline{AC'} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AB} \quad , \quad \overline{AB'} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AC}$$

relaţia (3) devine

$$(4) \qquad \overline{AA'} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AB} + \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AC}.$$

Relaţiile (2) şi (4) trebuind să fie identice avem egalităţile

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} \quad , \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$$

care se mai scriu sub forma

$$\overline{A'B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \overline{CB} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \; ; \quad \overline{CA'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{CB} \cdot \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}},$$

Adunîndu-le şi ţinînd seamă că

$$\overline{B'A'} + \overline{A'C'} = \overline{B'C'} \quad , \quad \overline{CB} = \overline{A'B} - \overline{A'C}$$

se obţine relaţia căutată (1').

Dacă punctul A' este la infinit, dreapta $C'B'$ este paralelă cu BC şi avem

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}$$

şi se vede uşor că relaţia (1') este de la sine verificată.

Să demonstrăm acum că condiţia (1') este suficientă adică, *dacă A', B', C' sînt puncte luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, punctul A' fiind la distanţă finită şi dacă relaţia* (1') *este suficientă, atunci punctele A', B', C' sînt colineare.*

Să observăm că dacă dreapta $B'C'$ coincide cu dreapta BC, relaţia (1') este verificată oricare ar fi punctul A' pe BC, iar punctele A', B' C' sînt evident colineare.

Dacă punctele A', B', C' verifică relaţia (1'), dreapta $B'C'$ nu poate fi paralelă cu dreapta BC, căci dacă am avea

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}$$

din relaţia (1') am deduce că

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - 1 \right) \overline{CB} = 0$$

şi această relaţie nu poate fi satisfăcută decît dacă dreapta $B'C'$ coincide cu BC.

Dreapta $B'C'$ nefiind paralelă cu BC, să notăm cu A'' intersecţie ei cu BC. Conform condiţiei necesare a teoremei I-a, avem:

$$(1'') \qquad \overline{A''B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - \overline{A''C} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A''B} - \overline{A''C}.$$

Scăzînd relaţiile (1') şi (1'') membru cu membru şi observînd că membrii din dreapta se reduc, vom avea:

$$\overline{A'A''}\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}\right) = 0,$$

Însă dreapta $B'C'$ nefiind paralelă cu BC paranteza este diferită de zero şi deci $A'A'' = 0$, punctele A', A'' coincid şi prin urmare punctele A', B', C' sînt colineare.

Dacă relaţia (1') *este satisfăcută şi punctul* A' *este la infinit*, atunci din relaţia (1') deducem că $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}$. *Dreapta* $B'C'$ *este deci paralelă cu* BC; *punctele* A', B', C' *sînt colineare şi în acest caz.*

Să facem cîteva aplicaţii ale teoremei I.

Teorema II. *Dacă* A' *este mijlocul laturii* BC *a triunghiului* ABC *pentru orice dreaptă care trece prin* A' *şi taie laturile* AC, AB *în punctele* B', C' *vom avea relaţia*

$$(5) \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = 2.$$

Această relaţie a fost dată de tov. *Florin Constantinescu* [1]. Ea se obţine imediat din teorema I, ţinînd seamă că $\overline{A'C} = -\overline{A'B}$.

În cazul particular cînd triunghiul ABC este isoscel, cu vîrful în A, teorema II arată că:

$$\frac{1}{\overline{AB'}} + \frac{1}{\overline{AC'}} = \frac{2}{\overline{AC}}.$$

Este rezultatul esenţial al unui articol al tov. *C. Nicolescu* [2].

Teorema II admite şi o reciprocă.

Teorema III. *Dacă* B' *şi* C' *sînt puncte luate pe laturile* AC *şi* AB *ale triunghiului* ABC, *dreapta* $B'C'$ *nefiind confundată cu dreapta* BC *şi avem relaţia* (5), *atunci dreapta* $B'C'$ *trece prin mijlocul* A' *al laturii* BC.

Să observăm că dacă punctul C' coincide cu punctul B, din relaţia (5) deducem că şi punctul B' coincide cu punctul C, adică dreptele $B'C'$, BC ar fi confundate, caz pe care l-am eliminat.

Dreapta $B'C'$ nu poate fi paralelă cu BC căci în acest caz din relaţia (5) ar rezulta că punctele B' şi C' să coincidă cu C şi B, caz care a fost eliminat.

Deci dreapta $B'C'$ taie dreapta BC într-un punct A'. Să dovedim că A' este mijlocul lui BC.

Aplicînd teorema I, putem scrie relaţia (1') sub forma

$$\overline{A'B}\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - 1\right) - \overline{A'C}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} - 1\right) = 0.$$

Însă din cauza relației (5) avem:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - 1 = -\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} - 1\right)$$

și prin urmare relația precedentă se scrie:

$$(\overline{A'B} + \overline{A'C})\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - 1\right) = 0.$$

Paranteza a doua nefiind nulă vom avea $\overline{A'B} + \overline{A'C} = 0$, ceea ce dovedește că A' este mijlocul lui BC.

Teorema IV. *Fie P, Q și O puncte luate pe laturile AB, AC și pe mediana AM a triunghiului ABC. Condiția necesară și suficientă ca punctele P, Q și O să fie colineare este ca să avem relația* (6)

$$(6) \qquad \frac{1}{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}} + \frac{1}{\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}} = \frac{2}{\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}}}.$$

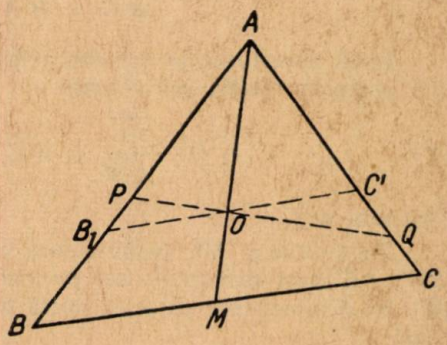


Fig. 2

Această relație se datorește tov. *I. I. Cristea* [3]. Dacă prin punctul O se duce o paralelă B_1C_1 la BC (fig. 2), totul revine la a exprima față de triunghiul AB_1C_1 condiția necesară și suficientă că punctele P, O, Q să fie colineare. aceasta este dată de teoremele II și III și vom avea:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AP}} = 2.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei formule cu

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$$

se obține relația (6).

Teorema V. *Fie O un punct oarecare în planul triunghiului ABC, M intersecția lui cu OA cu BC și P, Q puncte luate pe laturile AB și AC. Condiția necesară și suficientă cu punctele P, O, Q să fie colineare este să avem relația*

$$(7) \qquad \overline{MB}\,\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} - \overline{MC}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \overline{CB}\,\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}.$$

Această relație a fost dată de tov. *I. I. Cristea* [4].

Demonstrația se face ca mai sus, ducînd prin O o paralelă la latura BC care taie laturile AB și AC în B_1 și C_1 și aplicînd la triunghiul AB_1C_1 și punctele P, O, Q teorema I. Vom avea

$$\overline{OB_1}\,\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AQ}} - \overline{OC_1}\,\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AP}} = \overline{C_1B_1}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$$

se obține tocmai relația (7).

2. *Teorema lui Ceva* are următorul enunț: *dacă A', B', C' sînt puncte luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC și dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele, atunci avem relația*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1. \tag{8}$$

Dacă transformăm această relație întocmai cum am transformat relația (1), obținem relația echivalentă

$$\overline{A'B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \overline{A'C} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A'B} + \overline{A'C}. \tag{8'}$$

Obținem deci,

Teorema VI (echivalentă cu teorema lui Ceva). *Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele în triunghiul ABC, atunci avem relația* (8'). Să demonstrăm direct această teoremă.

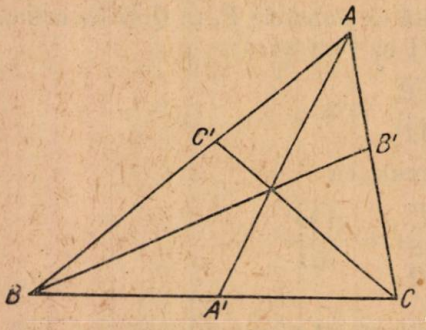


Fig. 3

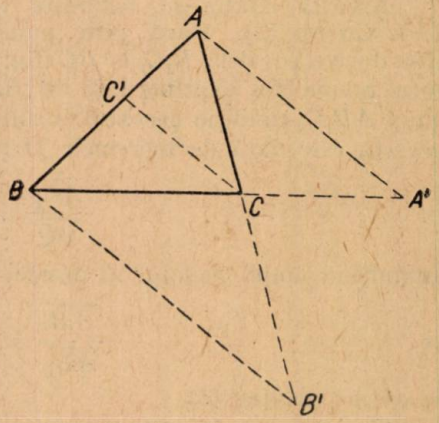


Fig. 3'

Să presupunem întîi că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul O și să considerăm triunghiurile $AA'C$, ABA' tăiate de transversalele BOB' COC'. Aplicînd teorema I adică relația (1') vom avea:

$$\overline{BA'} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{AO}} = \overline{BA'} - \overline{BC}$$

$$\overline{CA'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} - \overline{CB} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{AO}} = \overline{CA'} - \overline{CB}$$

Aducînd aceste relații membru cu membru obținem relația (8').

Să presupunem că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele. Este uşor de văzut (fig. (3′) că avem

$$\overline{A'B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = \overline{A'C} \quad ; \quad \overline{A'C} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A'B}.$$

Adunînd aceste relaţii membru cu membru se obţine relaţia (8′).

Teorema VII (echivalentă cu reciproca teoremei lui Ceva). *Dacă A', B', C' sînt puncte luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC şi*

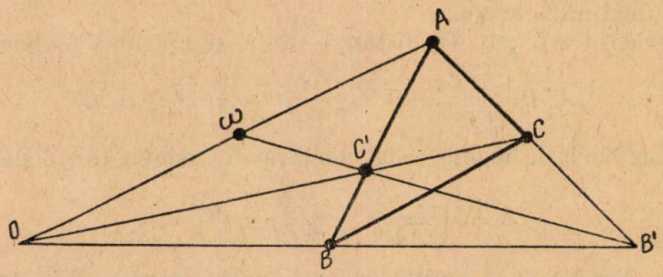


Fig. 4

dacă ele verifică relaţia (8′) atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Vom face demonstraţia acestei teoreme în mai multe etape.

1° *Punctul A' este la infinit.* În acest caz relaţia (8′) se reduce la

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = 2$$

şi conform teoremei III dreapta $B'C'$ trece prin mijlocul lui BC.

Fie ω intersecţia lui $B'C'$ cu paralela dusă prin A la BC. Deoarece $B'C'$ trece prin mijlocul lui BC, dreptele BB' şi CC' trec prin simetricul lui A în raport cu ω, ceea ce dovedeşte că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul O.

2° *Punctul A' este la distanţă finită însă este situat pe dreapta $B'C'$.* În acest caz punctele A', B', C' sînt astfel situate încît ele verifică relaţiile (1′) şi (8′). Adunînd şi scăzînd aceste relaţii se deduce că

$$A'B \cdot B'C = 0, \qquad A'C \cdot C'B = 0$$

şi aceasta se întîmplă numai dacă

$$A' \equiv B, \quad C' \equiv B \quad \text{sau} \quad B' \equiv C, \quad A' \equiv C \quad \text{sau} \quad B' \equiv C, \quad C' \equiv B.$$

În toate aceste cazuri dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

3° *Dreptele BB', CC' se taie într-un punct* O. Fie A'' intersecţia lui AO cu BC. Să arătăm întîi că *punctul A'' este la distanţă finită.* Dacă A'' ar fi la infinit dreapta AO ar fi paralelă cu BC. În acest caz $B'C'$ ar trece prin mijlocul lui BC şi conform teoremei II, punctele B' şi C' ar verifica relaţia (5). Dacă din relaţia (8′) care se scrie

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = 1 + \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

scădem membru cu membru relaţia (5) obţinem

$$\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} - 1\right)\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - 1\right) = 0.$$

Observăm că $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} \neq 1$, căci altfel dreapta $B'C'$ ar coincide cu BC.

Deci $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$, adică punctul A' este la infinit. Acest caz a fost examinat mai sus şi-l înlăturăm acum.

Deci, punctul A'' este la distanţă finită şi aplicînd teorema VI avem:

$$\overline{A''B}\,\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \overline{A''C}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A''B} + \overline{A''C}.$$

Scăzînd această relaţie membru cu membru din relaţia (8') deducem că:

$$\overline{A'A''}\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} - 2\right) = 0.$$

Se vede uşor că dacă paranteza ar fi nulă, dreapta $B'C'$ ar coincide cu BC, caz pe care l-am eliminat. Deducem atunci că $\overline{A'A''} = 0$, adică dreptele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul O.

4° *Dreptele BB', CC' sînt paralele.* Să demonstrăm că datorită relaţiei (8') *dreapta AA' este deasemenea paralelă cu CC'.*

Într-adevăr (fig. 3') în acest caz avem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$$

şi notînd cu λ valoarea comună a acestor rapoarte relaţia (8') după împărţirea cu $A'C$ se scrie

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{1}{\lambda} + \lambda = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} + 1$$

sau

$$\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} - \lambda\right)(1 - \lambda) = 0.$$

Observăm că λ nu poate fi egal cu 1, căci atunci dreapta $B'C'$ ar fi confundată cu BC şi acest caz a fost înlăturat. Se deduce atunci că

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \lambda$$

cea ce dovedeşte că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele.

Teorema VII este astfel demonstrată.

3. În încheere să observăm că pe relaţiile (1') şi (8') echivalente teoremelor lui *Menelaus* şi *Ceva* se citeşte o proprietate bine cunoscută în teoria transversalelor şi anume:

Dacă A', B', C' sînt puncte colineare în triunghiul ABC iar A_1' este conjugatul armonic al-punctului A' în raport cu BC, atunci dreptele AA_1', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt drepte concurente sau paralele în triunghiul ABC, iar A_1' este conjugatul armonic al punctului A' în raport cu BC, atunci punctele A_1', B', C' sînt colineare.

Aceasta rezultă din faptul că avem

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'O}} = -\frac{\overline{A_1'B}}{\overline{A_1'C}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A_1'B}} = \frac{\overline{A'C}}{-\overline{A_1'C}}$$

și dacă punctele A', B', C' sînt colineare, înlocuind în relația (1) pe $\overline{A'B}$ și $\overline{A'C}$ cu segmente proporționale $\overline{A_1'B}$ și $-\overline{A_1'C}$ obținem

$$\overline{A_1'B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \overline{A_1'C} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A_1'B} + \overline{A_1'C}$$

ceea ce înseamnă conform teoremei VII că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele atunci în relația (8') înlocuind pe $\overline{A'B}$ și $\overline{A'C}$ cu segmente proporționale $\overline{A_1'B}$ și $\overline{A_1'B}$ obținem relația

$$\overline{A_1'B} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - \overline{A_1'C} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A_1'B} - \overline{A_1'C}$$

ceea ce înseamnă că punctele A_1', B_1', C_1' sînt colineare.

Observare. Cititorii vor găsi interes în tratarea unor probleme din teoria transversalelor, prin aplicarea teoremelor I, VI, VII echivalentă cu teoremele lui *Menelaus* și *Ceva*.

BIBLIOGRAFIE

[1]. *Florin Constantinescu*, G.M.F. seria B, 1955, p. 184.
[2]. *C. Nicolescu*, Asupra unei probleme din G.M.F., seria 1956, p. 176.
[3]. *I. I. Cristea*, Generalizarea problemei 1301, G.M.F.-B, 1955, p. 74.
[4]. *I. I. Cristea*, Asupra problemei 1301, G.M.F.-B, 1955, p. 19.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2337

Trei conductori electrici sînt legați în derivație. Rezistența totală a derivației este $\frac{11}{20}$ ohmi. Cînd doi conductori sînt legați în serie iar cu al treilea sînt legați în derivație, rezistența lor este de $\frac{19}{60}$ ohmi. Cînd conductorii sînt legați în serie, rezistența totală a lor este 19 ohmi. Să se afle rezistențele celor trei conductori electrici.

M. Nicolaescu, Ploești

Soluție. — Știm că rezistența totală a unei derivații este:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$$

Cînd doi conductori sînt legaţi în serie iar apoi sînt legaţi cu un al treilea în derivaţie, avem:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

În cazul nostru, notăm cele trei rezistenţe cu x, y şi z. Se formează sistemul de trei ecuaţi cu trei necunoscute:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{20},$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{60},$$

$$x + y + z = 19,$$

de unde

$$x + y = 19 - z, \text{ deci şi } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{19-z}.$$

înlocuim :

$$60z + 60(19 - z) = 19z(19 - z),$$

$$19z^2 - 361z + 1140 = 0,$$

$$z = \frac{19 \pm 11}{2}; \; z_1 = 4, \text{ verifică}; \; z_2 = 15, \text{ nu verifică};$$

$$x + y = 19 - z;$$

$$x + y = 15 \quad ; \qquad x = 15 - z;$$

$$\frac{1}{19 - y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

sau

$$80y + 80(19 - y) + 20y(15 - y) = 44y(15 - y),$$

deci

$$y^2 - 15y + 50 = 0,$$

de unde

$$y = \frac{15 \pm 5}{2}; \qquad y_1 = 5 \text{ verifică}; \; y_2 = 10 \text{ nu verifică};$$

$$x + y = 15 \; ; \qquad x = 15 - 5 = 10.$$

Prin urmare

$$R_1 = 10 \text{ ohmi}; \qquad R_2 = 5 \text{ ohmi}; \qquad R_3 = 4 \text{ ohmi}.$$

Problema 2341

Prin G, centrul de greutate al unui tetraedru $A_1A_2A_3A_4$, se duce un plan oarecare care taie muchiile A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 respectiv în punctele A', A'', A'''. Avem:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'} + \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A'''} = 4.$$

Tr. I. Voicu, Slatina

Soluţie. — Fie A_1G_1 o mediană a tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ şi A_2B o mediană a feţii $A_2A_3A_4$, A_1B întîlneşte pe $A''A'''$ în C, punct comun şi dreptei $A'G$. În triunghiul A_1A_2B putem să scriem:

$$A_2G_1 \frac{A_1B}{A_1C} + BG_1 \frac{A_1A_2}{A_1A'} = A_2B \frac{A_1G_1}{A_1G}$$

(a se vedea nota matematică din G.M.F. — B, nr 1, anul VII, p. 19—22).

Dar ţinînd seamă că:

$$A_2G_1 = \frac{2}{3}A_2B; \quad G_1B = \frac{1}{3}A_2B; \quad \frac{A_1G_1}{A_1G} = \frac{4}{3};$$

rezultă:

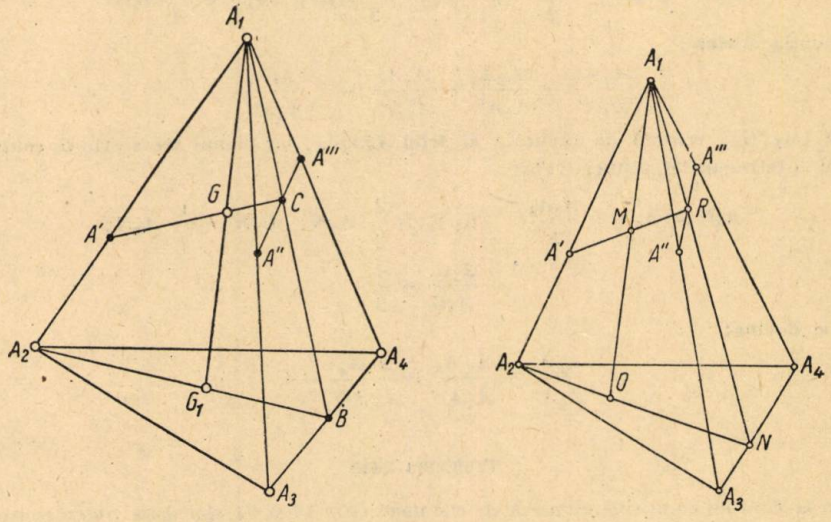
$$2\frac{A_1B}{A_1C} + \frac{A_1A_2}{A_1A'} = 4.$$

Apoi, din triunghiul $A_1A_3A_4$ avem:

$$2\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A'''}$$

(a se vedea nota matematică din G.M.F. -B, nr 2, an VI, p. 74—75), care duce la relaţia din enunţ.

În cazul cînd în loc de tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ şi un plan oarecare considerăm un triunghi ABC şi o dreaptă oarecare, obţinem chiar enunţul problemei 1301.



Generalizare. — Fie un punct O pe faţa $A_2A_3A_4$ a unui tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ (dreapta A_2O întîlneşte pe A_3A_4 în N). Se duce un plan oarecare care taie pe A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1O respectiv în punctele A', A'', A''' şi M. Să se arate că:

$$\frac{ON}{OA_2} \cdot \frac{A_1A_2}{A_1A'} + \frac{A_1N}{A_3A_4} \cdot \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_3N}{A_3A_4} \cdot \frac{A_1A_4}{A_1A'''} = \frac{A_2N}{A_2O} \cdot \frac{A_1O}{A_1M}. \qquad (1)$$

Soluţia. — Dreptele A_1M, A_1N şi $A''A'''$ se întîlnesc în R În triunghiul A_1A_2N putem să scriem:

$$OA_2\frac{A_1N}{A_1R} + ON\frac{A_1A_2}{A_1A'} = A_2N\ \frac{A_1O}{A_1M}.$$

Împărţind cu OA_2 obţinem:

$$\frac{A_1N}{A_1R} + \frac{ON}{OA_2} \cdot \frac{A_1N_2}{A_1A'} = \frac{A_2N}{OA_2} \cdot \frac{A_1O}{A_1M}. \qquad (2)$$

Apoi din triunghiul $A_1A_3A_4$ avem:

$$A_3A_4\frac{A_1N}{A_1R} = A_4N\frac{A_1A_3}{A_1A''} + A_3N\frac{A_1A_4}{A_1A'''}.$$

Împărțind cu A_3A_4 rezultă:

$$\frac{A_1N}{A_1R} = \frac{A_4N}{A_3A_4} \cdot \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_3N}{A_3N_4} \cdot \frac{A_1A_4}{A_1A'''}. \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă (1).

Cazuri particulare. a) Dacă punctul O se află pe o mediană a feței $A_2A_3A_4$, atunci avem:

$$A_3N = A_4N = \frac{A_3A_4}{2},$$

iar relația devine:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A'''} + 2\frac{ON}{OA_2} \cdot \frac{A_1A_2}{A_1A'} = 2\frac{A_2N}{A_2O} \cdot \frac{A_1O}{A_1M}.$$

b) Dacă punctul O se află în G_1, centrul de greutate al feței $A_2A_3A_3$, atunci avem

$$A_3N = A_4N = \frac{A_3A_4}{2} \text{ și } G_1A_2 = \frac{2}{3}A_2N; \quad G_1N = \frac{1}{3}A_2N.$$

Relația devine

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'} + \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A''} = 3\frac{A_1G_1}{A_1M}.$$

Dacă O este G_1, centrul de greutate al feței $A_2A_3A_4$, iar planul trece prin G, centrul de greutate al tetraedrului, atunci avem:

$$A_3N = A_4N = \frac{A_3A_4}{2}; \quad G_1A_2 = \frac{2}{3}A_2N; \quad G_1N = \frac{1}{3}A_2N;$$

$$\frac{A_1G_1}{A_1G} = \frac{4}{3}$$

și relația devine:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'} + \frac{A_1A_3}{A_1A''} + \frac{A_1A_4}{A_1A'''} = 4.$$

Problema 2348

În ce bază de numerație numerele de cîte două cifre 17 *și* 71 *sînt două puteri consecutive ale lui* 4 *și care sînt aceste puteri?*

Gh. Buiculiu

Soluție. — Fie x baza căutată și n o putere. Trebuie să avem simultan

1) $$x + 7 = 4^n \quad \text{și} \quad 7x + 1 = 4^{n+1}$$

cu $x > 7$, căci 7 este o cifră în baza x. De aici se scoate prin scădere,

$$6(x - 1) = 4^{n+1} - 4^n = 3 \cdot 4^n,$$

(2) $$x = 2^{2n-1} + 1,$$

cu $n > 1$ pentru a avea $x > 7$. Introducînd această valoare în una din condițiile (1), de exemplu în prima, se găsește

$$2^{2n-1} + 8 = 4^n, \quad \text{deci} \quad 4^n + 16 = 2 \cdot 4^n,$$

de unde

$$4^n = 16 \quad \text{și deci} \quad n = 2,$$

care dus în (2) dă $x = 9$.

Deci în baza 9 numerele 4^2 și 4^3 se scriu 17 respectiv 71, ceea ce se verifică ușor:

$$7 \cdot 9 + 1 = 64 = 4^3 \quad \text{și} \quad 9 + 7 = 16 = 4^2.$$

Soluție dată de **Gh. Stoian,** București. — Fie x, baza de numerație a celor două numere, iar 4^n și 4^{n+1} puterile consecutive ale lui 4. Conform enunțului problemei avem:

$$x + 7 = 4^n,$$
$$7x + 1 = 4^{n+1}.$$

Împărțind aceste relații obținem:

$$\frac{x+7}{7x+1} = \frac{1}{4},$$

de unde $x = 9$.

Înlocuind pe x cu valoarea găsită în prima relație, obținem:

$$4^n = 16,$$

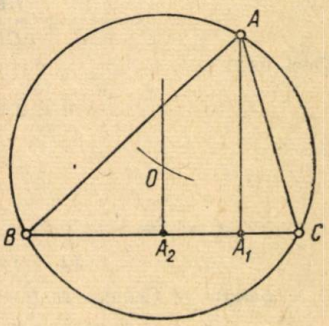
de unde $n = 2$.

Problema 2349

Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd înălțimea AA_1, distanța A_1A_2 (A_2 fiind mijlocul laturii BC) și R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

* * *

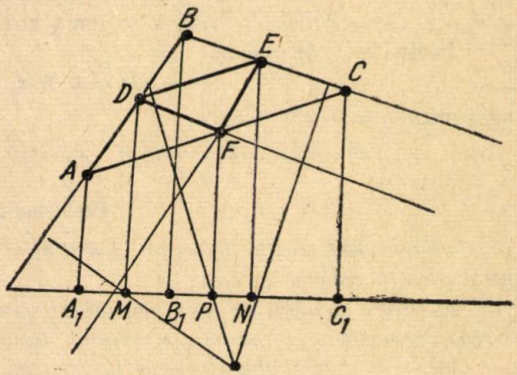
Soluție. — Într-adevăr, să considerăm un segment egal cu înălțimea AA_1 și un segment A_1A_2 perpendicular pe AA_1. Din punctul A_2 ridicăm o perpendiculară pe A_1A_2. Din vîrful A, cu o deschizătură de compas cît raza R, descriem un arc de cerc care întîlnește perpendiculara pe A_1A_2 în punctul O (centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Cu același deschizătură de compas și cu centrul în punctul O, vom descrie un cerc care intersectează dreapta A_1A_2 (sau prelungirea ei) în punctele B și C. Triunghiul ABC este triunghiul căutat. Problema este posibilă numai atunci cînd $A_1A_2 < R$.



Problema 2351

Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile vîrfurilor triunghiului ABC pe o dreaptă dată Δ și M, N, P respectiv mijloacele segmentelor A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. Perpendicularele duse din punctele M, N, P pe laturile AB, BC, AC sînt concurente.

Sorin Stegărescu, Iași



Soluție dată de **N. Doniga** (s. m. l. București). — Teorema ortopolului aplicată triunghiului median DEF al triunghiului ABC arată că perpendicularele din M, N, P pe EF, DF și DE sînt concurente în O. Deoarece $SF \| AB$, $DF \| BC$, $DE \| AC$ rezultă că OM, ON și OP sînt respectiv perpendiculare pe AB, BC, AC.

Problema 2355

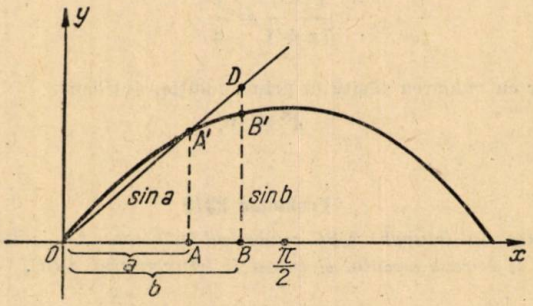
Dacă $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, *să se arate că* $\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b}$.

* * *

Soluție dată de **Radu Coșereanu**, elev Timișoara. — Triunghiurile AOA' și BOD sînt asemenea, deci:

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BD}{OB}; \text{ însă } BD > BB', \text{ deci: } \frac{BD}{OB} > \frac{BB'}{OB}.$$

Atunci



$$\frac{AA'}{OA} > \frac{BB'}{OB}; \quad \frac{AA'}{OA} = \frac{\sin a}{a} \text{ și } \frac{BB'}{OB} = \frac{\sin b}{b}.$$

Deci dacă

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2}, \text{ atunci: } \frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b}.$$

Problema 2363

Să se rezolve ecuația:

$$(x - 1)(x - 11)(x - 21)(x - 31) = 7161.$$

Soluție. — Ecuația se mai scrie:

$$[(x - 1)(x - 31)]\,[(x - 11)(x - 21)] = 7161$$

sau

$$(x^2 - 32x + 31)(x^2 - 32x + 231) = 7161.$$

Notînd $x^2 - 32x + 31 = y$, deducem $y(y + 200) = 7161$ sau $y^2 + 200y - 7161 = 0$ și $y = -100 \pm \sqrt{10\,000 + 7161} = -100 \pm 131$.

Pentru $y = 31$, avem:

$$x^2 - 32x = 0 \text{ și } x_1 = 0,\ x_2 = 32,$$

iar pentru $y = -231$ avem:

$$x^2 - 32x + 262 = 0 \quad \text{și} \quad x_3 = 16 + i\sqrt{6} \quad \text{și} \quad x_4 = 16 - i\sqrt{6}.$$

Problema 2370

Se consideră ecuația de gradul al doilea, $x^2 - mx + m^2 - 3m + 2 = 0$ în care m este un parametru variabil. Se cere:

a) *pentru ce valori ale lui m ecuația are rădăcini distincte; pentru ce valori ale lui m are o rădăcină dublă și ce valoare are rădăcina dublă?*

b) *să se studieze după valorile lui m semnul rădăcinilor;*

c) *să se determine m astfel ca una din rădăcini să fie dublul celeilalte. Care sînt rădăcinile acestea?*

d) *Se poate alege m astfel încît rădăcinile ecuației să fie sinusul și cosinusul unui arc α? Să se determine arcul α.*

(Dată la admiterea în facult. fizico-matematică, București)

Soluție. — *a)* Discriminantul

$$D = m^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = m^2 - 4m^2 + 12m - 8 = 3m^2 + 12m - 8$$

se anulează pentru $m = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$.

Între rădăcini discriminantul este de semn contrar primului termen, deci pozitiv, și ecuația dată are rădăcini reale și distincte pentru:

$$\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Pentru $m = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$ ecuația dată are rădăcina dublă $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

b) $x_1 + x_2 = m,$

$x_1 x_2 = m^2 - 3m + 2,$

$m^2 - 3m + 2 = 0, \quad m_1 = 2; \quad m_2 = 1.$

m	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$		1			2		$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$
$x_1 x_2$	+	+	0	—	—	0	+	+
$x_1 + x_2$	+	+	+	+		+	+	+
	2 rădăcini pozitive		2 rădăcini de semn contrar, cea mai mare pozitivă			2 rădăcini pozitive		

c) Sistemul

$$x_1 + x_2 = m,$$
$$x_1 x_2 = m^2 - 3m + 2,$$
$$x_1 = 2x_2$$

ne determină valoarea parametrului m pentru care una din rădăcini este dublul celeilalte

$2x_2 + x_2 = m, \quad x_2 = \frac{m}{3}, \quad x_1 = \frac{2m}{3}, \quad \frac{2m^2}{9} = m^2 - 3m + 2, \quad 7m^2 - 27m + 18 = 0,$

care ne dă:

$$m_1 = \frac{6}{7} \text{ și } m_2 = 3.$$

Rădăcinile ecuației sînt:

pentru $m_1 = \frac{6}{7}$; $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{2}{7}$;

pentru $m_2 = 3$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1$.

d) Pentru ca x_1 și x_2 să fie sinusul și cosinusul unui arc trebuie ca:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

care împreună cu

$$x_1 + x_2 = m,$$
$$x_1 x_2 = m^2 - 3m + 2,$$

ne dă $m_1 = 1$; $m_2 = 5$ (care nu convine). Rămîne deci $m_1 = 1$ pentru care avem $x_1 - \sin\alpha = 0$; $x_2 = \cos\alpha = 1$ și $x_1 = \sin\alpha = 1$; $x_2 = \cos\alpha = 0$, care ne dă $\alpha = 2k\pi$ sau $\alpha = 2k + \frac{\pi}{2}$.

— Soluție dată de **Ioana Buşilă**, București.

Problema 2371

a) *Să se rezolve și să se discute sistemul:*

$$x + (m+1)y + z = 2 + m - m^2,$$
$$mx + y - z = 0,$$
$$x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2,$$

știind că m este un parametru.

b) *Să se examineze cazurile particulare* $m = -1$; $m = 2$; $m = -2$.

(Date la fac. matematică-fizică, București 1956)

Soluție. — *a)* Adunînd a doua ecuație la prima și scăzînd ecuația a doua, înmulțită cu m, din cea de-a treia, obținem sistemul:

$$\begin{array}{l}(m+1)\,x+(m+2)\,y=\quad 2+m-m^2\\ (1-m^2)\,x-(m+2)\,y=-2+3m-m^2\end{array}$$

$$(m+1)(2-m)\,x=2m\,(2-m)$$

$$x=\frac{2m}{m+1};\quad m\neq -1;\quad m\neq 2.$$

$$\begin{array}{l}(1-m^2)\,x+(1-m)(m+2)\,y=(2+m-m^2)(1-m)\\ (1-m^2)\,x-(m+2)\,y=-2+3m-m^2,\end{array}$$

$$(m+2)(2-m)\,y=4-4m-m^2+m^3$$

$$(4-m^2)\,y=(4-m^2)(1-m)\quad;\quad m\neq\pm 2;$$

$$y=1-m.$$

Din ecuția a doua obținem:

$$z=\frac{2m^2}{m+1}+1-m;\quad z=\frac{2m^2+1-m^2}{m+1}\quad;\quad z=\frac{m^2+1}{m+1}.$$

b) $m=-1$. Sistemul devine:

$$\begin{array}{l}x+z=0,\\ -x+y-z=0,\\ x-2y+z=-6.\end{array}$$

Din primele două ecuații obținem $y=0$ pe care înlocuindu-l în cea de-a treia obținem:

$$x+z=-6.$$

Sistemul este deci imposibil.

$m=2$. Sistemul devine:

$$\begin{array}{l}x+3y+z=0,\\ 2x+y-z=0,\\ x-2y-2z=0.\end{array}$$

Sistemul este omogen și admite soluția banală $x=y=z=0$. Scăzînd prima ecuație din cea de-a doua obținem:

$$x-2y-2z=0,$$

identică cu cea de-a treia. Sistemul este nedeterminat și admite o infinitate de soluții pe lîngă cea banală.

$m=-2$. Sistemul devine:

$$\begin{array}{l}x-y+z=-4,\\ -2x+y-z=0,\\ x-2y+2z=-12.\end{array}$$

— Soluție dată de **Ioana A. Buşilă,** clasa X, s.m. 7 București.

Problema 2372

a) *Se dă trinomul*

$$y=mx^2-(1-3m)\,x+2m.$$

Ce valoare trebuie să aibă m pentru ca rădăcinile acestui trinom să fie reale?

b) *Se consideră două trinoame:*

$$y_1=m_1x^2-(1-3m_1)\,x+2m_1,$$
$$y_2=m_2x^2-(1-3m_2)\,x+2m_2,$$

valorile parametrilor m_1 *și* m_2 *fiind distincte* $m_1\neq m_2$.
Să se stabilească o relație între m_1 *și* m_2 *în următoarele două cazuri:*

— cînd suma rădăcinilor primului trinom este egală și de semn contrar cu suma rădăcinilor celui de-al doilea trinom,

— cînd suma pătratelor rădăcinilor este aceiași pentru ambele trinoame.

(Dată la admiterea în facult. fizico-matematici, București 1956)

Soluție. — a) Discriminantul

$$D = (1 - 3m)^2 - 8m^2 = m^2 - 6m + 1$$

care se anulează pentru $m = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Pentruca trinomul să aibă rădăcini reale trebuie ca $D \geq 0$, deci $m > 3 + 2\sqrt{2}$; $m < 3 - 2\sqrt{2}$.

$$\frac{1 - 3m_1}{m_1} = -\frac{1 - 3m_2}{m_2},$$

$$m_2 - 3m_1 m_2 = -m_1 + 3m_1 m_2,$$

$$m_1 + m_2 - 6m_1 m_2 = 0,$$

$$\frac{(1 - 3m_1)^2}{m_1^2} - 4 = \frac{(1 - 3m_2)^2}{m_2^2} - 4,$$

$$\left(1 - 6m_1 + 9m_1^2\right) m_2^2 = \left(1 - 6m_2 + 9m_2^2\right) m_1^2,$$

$$m_2^2 - 6m_1 m_2^2 + 9m_1^2 m_2^2 - m_1^2 + 6m_2 m_1^2 - 9m_1^2 m_2^2 = 0,$$

$$(m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - 6m_1 m_2) = 0,$$

și cum $m_1 \neq m_2$, urmează condiția

$$m_1 + m_2 - 6m_1 m_2 = 0,$$

adică aceiași condiție din cazul precedent.

— s-a primit soluție bună de la **Ioana A. Buşilă,** București.

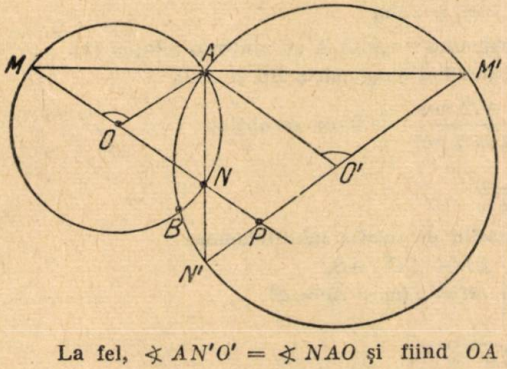
Problema 2374

Se dau două cercuri cu centrele în O și O' care se intîlnesc în două puncte A și B. Se consideră diametrul $MON \parallel O'A$ și diametrul $M'O'N' \parallel OA$ (punctele M', M, A sînt de aceiași parte a dreptei OO').

a) *Să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A'$ sînt asemenea, iar triunghiurile NOA și $N'O'A'$ sînt asemenea.*

b) *Să se stabilească că dreptele AM și AM' sînt confundate; AN și AN' sînt confundate.*

(La admiterea în Facult. matematică fizică București 1856)



Soluție. a) $\sphericalangle MOA = \sphericalangle M'O'A'$ avînd laturile paralele. Deci, triunghiurile isoscele MOA și $M'O'A'$ sînt asemenea.

La fel, $\sphericalangle NOA = \sphericalangle N'O'A'$ ca unghiuri opuse în paralelogramul $AOPO'$. Deci și triunghiurile isoscele NOA și $N'O'A'$ sînt asemenea.

b) Ținînd seamă de cele arătate la punctul *a)*, avem: $\sphericalangle MAO = \sphericalangle AM'O'$. Fiind $OA \parallel M'O'$, rezultă că M, A, M' sînt coliniare.

La fel, $\sphericalangle AN'O' = \sphericalangle NAO$ și fiind $OA \parallel N'O'$, rezultă că N', N, A sînt coliniare

Problema 2382

Avem un patrulater deformabil $ABCD$ obținut dintr-un triunghi echilateral articulat în cele trei vîrfuri și într-un punct D situat pe latura BC. Să se construiască patrulaterul $ABCD$ în cazul cînd devine inscriptibil.

Gh. Bazacov

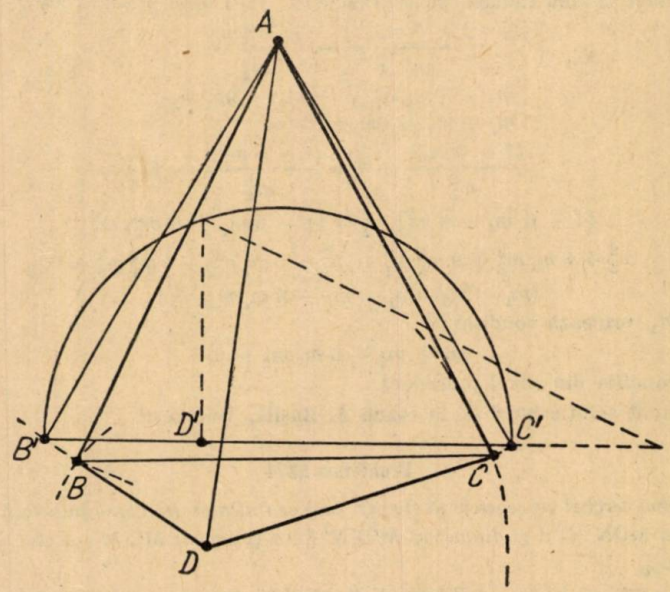
Soluția. — Prin deformare, să presupunem că $ABCD$ a devenit inscriptibil: atunci $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$. Notăm $BD = m$ și $CD = n$. Diagonala BC fiind latură comună la triunghiul ABC și triunghiului BDC, putem scrie:

$$2a^2 - 2a^2 \cos A = m^2 + n^2 - 2mn \cos D,$$

dar $\cos D = -\cos A$ și deci,

$$2a^2 - 2a^2 \cos A = m^2 + n^2 + 2mn \cos A,$$

însă $m + n = a$ și atunci



$$2a^2 - 2a^2 \cos A = a^2 - 2mn + 2mn \cos A,$$

de unde se obține

(1) $$\cos A = \frac{a^2 + 2mn}{2a^2 + 2mn}.$$

Construcția patrulaterului se poate face construind unghiul A cu ajutorul relației (1).

Să căutăm o construcție mai simplă, calculînd diagonalele BC și AD:

$$BC^2 = 2a^2 - 2a^2 \frac{a^2 + 2mn}{2a^2 + 2mn}, \text{ de unde se obține}$$

(2) $$BC = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + mn}}.$$

Pentru a calcula diagonala AD ne folosim de relația lui Ptolomeu:

$$AD^2 \cdot BC = AC \cdot BD + DC \cdot AB,$$

$$AD = BC = am + an = a(m + n) = a^2$$

și deci

(3) $$AD = \frac{a^2}{BC} = \frac{a^2\sqrt{a^2 + mn}}{a^2} = \sqrt{a^2 + mn}.$$

Preferăm relația (3), fiind mai simplă: a, a, m, n, fiind laturile patrulaterului deformabil îl vom construi în poziția cerută, construind triunghiurile ADB și ADC după ce s-a construit diagonala AD ca ipotenuză într-un triunghi dreptunghic cu catetele a și media geometrică a laturilor m și n.

PROBLEME PROPUSE *)

2807. Să se arate că dacă a, b, c sînt numere pozitive avem:

$$3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqslant 2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

C. Ionescu-Ţiu

2808 În triunghiul ABC se iau punctele α şi β situate pe latura BC, simetrice faţă de mijlocul acestei laturi. Notînd cu θ unghiul $BA\alpha$ şi cu γ unghiul $CA\beta$ se cere să se demonstreze relaţia:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin\theta \sin(A-\gamma)}{\sin\gamma \sin(A-\theta)}.$$

* * *

2809. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = 0.$$

Gheorghe I. Stoian, student Bucureşti

2810. Pentru a-şi determina astronomic punctul, un navigator ia trei înălţimi h_1, h_2, h_3 la un astru. Dacă unghiurile la pol corespunzătoare sînt P_1, P_2, P_3 şi $h_2 - h_1 = h_3 - h_2$, să se demonstreze relaţia:

$$\frac{\cos\dfrac{h_2+h_1}{2}}{\cos\dfrac{h_3+h_2}{2}} = \frac{\cos P_2 - \cos P_1}{\cos P_3 - \cos P_2}.$$

C. V. Costăchescu

2811. Să se rezolve ecuaţia:

$$xyz + 6x + 3y + 2z = 3xy + 2xz + yx + 7,$$

ştiind că x, y, z sînt numere consecutive.

Şaganai Nusfet, student Bucureşti

2812. Să se arate că în orice triunghi există relaţia

$$3\sum \overline{BC}\ \overline{AH} = 8R^2 \sum \sin^3 A \cos(B-C)$$

unde $\overline{AH}$ reprezintă distanţa de la vîrful A pînă la ortocentrul triunghiului ABC.

V. Băghină, Breaza

2813. Să se găsească puterea exprimată în CP a unui motor, cheltuită pentru rotirea unui dinam care furnizează un curent de 45 amperi, avînd tensiunea la borne de 110 volţi; iar randamentul industrial de 0,86.

* * *

2814. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($A = 90°$) a cărui ipotenuză variază păstrîndu-şi aceiaşi înclinaţie faţă de cele două catete. Pe AC se ia $AM = m$. Se uneşte M cu mijlocul D al catetei AB, iar paralela dusă din C la AC taie segmentul BM în punctul N. Să se afle locul punctului P de intersecţie a dreptelor CM şi AM.

Radu Ionescu, student Bucureşti

---

*) (VIII: 2809, 2815, 2816, 2817, 2821, 2825, 2829, 2834). Elevii din clasa VIII pot trimite soluţii şi la problemele dela elementar.

2815. Se consideră reacţia chimică:

$$SiO_2 + 2Mg = Si + 2MgO.$$

Să se calculeze cantitatea de SiO_2 care intră în reacţie, dacă pentru a-l reduce este necesară cantitatea de 300 g Mg, impurităţile SiO_2 fiind de 5%. Cît va cîntări siliciul obţinut?

Valeriu Dorobanţu, Slatina

2816. Să se descompună în factori expresia:

$$E = (2a^{m+1}b^{-n} - a^3) + a^6(a^{-m-1}b^n - 2a^{-3})$$

M. Stănculescu, student Bucureşti

2817. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1+x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1+x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}} = 0$$

C. Ionescu-Ţiu

2818. În planul unui cerc dat O se iau două puncte fixe oarecare. Să se determine pe acest cerc punctele M pentru care suma $MA^2 + MB^2$ are valoare minimă sau maximă.

Stelian Gh. Mărculescu

2819. Ştiind că x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$2a(x^2 - a^2 - b^2) + (b^2 + \lambda^2)(x + a) = 0$$

să se studieze variaţia raportului

$$U = \frac{a - x_1}{a - x_2}$$

cînd a şi b sînt constante iar λ variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

Gh. Buicliu

2820. Fiind date în plan dreptele Δ şi Δ' şi o direcţie δ, considerăm 4 drepte mobile AA', BB', CC', DD' paralele cu direcţia δ, care tae dreptele Δ şi Δ' respectiv în punctele A, B, C, D şi A', B', C', D'. Dreptele $A'C$ şi AC' taie respectiv dreptele BD' şi $B'D$ în punctele M şi M'.

Să se găsească locul punctului M, cînd M coincide cu M'.

Fl. Nedelcu

2821. Să se arate că:

$$2^{16n+2} + 3^{4n+1} + 7.4^{8n} - 5^{64n} + 6^{32n+1}$$

se divide cu 19.

C. N. Tudor, student Bucureşti

2822. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevienele unui punct L în raport cu triunghiul ABC Paralelele duse prin B_1, C_1 la AA_1 întîlnesc latura BC respectiv în M, N. Dreptele AA_1 B_1C_1 se întîlnesc în P. Să se arate că:

$$B_1M \cdot NA_1 = C_1N \cdot A_1M$$

$$\frac{1}{B_1M} + \frac{1}{C_1N} = \frac{2}{PA_1}$$

(vezi G.M.F.B., problemele 1719 şi 2242 şi C.d.p. geometrie de G. Ţiţeica nr. 525)

* * *

2823. Să se arate că în orice triunghi există relația

$$\sqrt[n]{a^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-2}} + \sqrt[n]{c^{n-2}} = 2\sqrt{\frac{4p^{n-1}}{R} \cdot \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

* * *

2824. Să se determine numeric laturile triunghiului în care există relația:

$$rr_1r_2 + rr_1r_3 + rr_2r_3 + r_1r_2r_3 = rr_1r_2r_3$$

unde r este raza cercului înscris, iar r_1, r_2, r_3 razele cercurilor ex-înscrise; r, r_1, r_2 și r_3 fiind numere întregi diferite, pare.

L. Mănescu, profesor R. Vîlcea

2825. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd piciorul A_h al înălțimii AA_h mijlocul A' al laturii BC, unghiul B și un punct P pe cercul ABC.

* * *

2826. Fie $ABCD$ un patrat înscris în cercul O și fie a, b, c, d proiecțiile vîrfurilor sale pe o tangentă la cercul O într-un punct oarecare M al acestuia. Să se arate că $ac^2 + bd^2 = \text{const.}$

Theodor Gh. Cocea

2827. Să se arate că expresia:

$$\sin^8 x - \cos x^8 + 4\cos^6 x - 6\cos^4 x + 4\cos^2 x$$

este independentă de x.

Simon St. Petre

2828. Circuitul oscilant de intrare al unui aparat de radio este format dintr-un condensator variabil cu aer și o inductanță. Datele constructive ale condensatorului sînt: Raza plăcilor rotorului = 50 mm; raza axului = 4 mm; numărul de plăci pe rotor 20; numărul de plăci pe stator 21; capacitatea minimă (condensatorul complet deschis) = 40 μF (plăcile au formă semi-circulară). Se cere:

a) Care este capacitatea maximă a condensatorului?

b) Care este inductanța circuitului oscilant pentru ca el să poată oscila pentru lungimi de undă cuprinse între 200 și 700 m?

c) Care este poziția condensatorului pentru ca circuitul să oscileze pe lungimea de undă a postului București (351 m)?

Al. Landman, student București

2829. Ce cantitate de fosfor (P), oxigen (O) și apă (H_2O) avem nevoie pentru a obține 1,5 kg acid ortofosforic (PO_4H_3).

B. V. Farcaș, Zalău

2830. Ce relație există între laturile triunghiului ABC dacă

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

Eugen Onofraș, Huși

2831. Se dă ecuația

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ale cărei rădăcini le notăm cu x_1, x_2, x_3.

Să se formeze ecuația de același grad în y, care are ca rădăcini

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2;\ y_2 = x_1^2 + x_3^2 \text{ și } y_3 = x_2^2 + x_3^2.$$

Al. Iorgulescu, student București

2832. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$|m + \sqrt{\operatorname{tg} x}| = \sqrt{m + \operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

Să se determine valoarea parametrului m, astfel ca argumentul x să poată lua pe rînd valorile: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Deac Iuliu

2833. Fie K punctul de intersecție al simedianelor în triunghiul ABC. Să se calculeze AK, BK, CK, în funcție de a, b, c.

Nicolae Șt. Alexandru

2834. Pe platoul unui cîntar cu cadran este lăsată să cadă liber o greutate de 500 g. Acul cîntarului a deviat în timp de 0,5 s de la diviziunea O pînă la diviziunea 700 g, după care s-a stabilit la diviziunea 500 g. De la ce înălțime a căzut greutatea dacă frecările ce intervin se neglijează?

Claudiu Orșivaschi, profesor Tecuci

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI*)

E: **1025.** Distanța dintre două localități a fost străbătută de un avion în sensul vîntului în 10 ore. Întorcîndu-se, avionul a făcut aceiași distanță în 11 ore. Știind viteza vîntului de 25 km pe oră, să se afle: *a)* distanța dintre cele două localități și 2) viteza proprie a avionului.

B. Baieră

E: **1026.** Populația unei comune este astăzi de 12167 locuitori.

Să se afle cîți locuitori au fost în acea comună cu trei ani în urmă, știind că în fiecare an populația comunei crește cu 15%.

* * *

E: **1027.** Din 112 kg mere de 3,50 lei kg și 2,25 lei kg s-a făcut un amestec. Dacă se vinde acest amestec cu 2,90 lei kg se cîștigă 10,30 lei. cîte kg de mere de fiecare calitate au intrat în amestec?

* * *

E: **1028.** Într-o G.A.C., 8 tractoare lucrînd cîte 8 ore pe zi au arat în 6 zile 192 ha. Să se afle:

1) cîte ha vor ara 10 tractoare în 12 zile dacă vor lucra cîte 10 ore pe zi?
2) care este raportul între arăturile efectuate?
3) cîte procente reprezintă din totalul arat, arătura celor 10 tractoare?

B. Baieră

E: **1029.** Numărătorul unei fracții este cu 5 mai mic decît numitorul ei. Dacă se scade 8 din numitor și se adaugă 1 la numărătorul acelei fracții se obține fracția inversă celei date. Să se afle fracția.

* * *

---

*) (V: E: 1025, 1027, 1029, 1035). În numărul următor al G.M.F.-B din noembrie 1958 vor fi publicate problemele claselor V, VI, VII, propuse pentru Olimpiada micilor matematicieni și fizicieni; precum și regulamentul acestor olimpiade (OMMF).

E: **1030.** Se dă un triunghi oarecare ABC în care se duc înălțimile AA_1 și BB_1 care se întîlnesc în punctul H. Se prelungește AA_1 cu un segment A_1 și BB_1 care se întîlnesc în punctul H. Se prelungește AA_1 cu un segment $A_1D = A_1H$. Perpendiculara din A pe BD taie pe BB_1 în E. Să se arate că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAA_1 + \sphericalangle AEB_1$.

Grosu I., elev Botoșani

E: **1031.** Să se verifice identitatea:

$$(b + c - a)(b^2 + c^2 - a^2) + (c + a - b)(c^2 + a^2 - b^2) + (a + b - c)(a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$= (a^3 + b^3 + c^3) + (a^2 - b^2)(a - b) + (a^2 - c^2)(a - c) + (b^2 - c^2)(b - c)$$

* * *

E: **1032.** Să se arate că:

$$ab(a + b)(a + b + c) + bc(b + c)(a + b + c) + ac(a + c)(a + b + c) -$$
$$- (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) = 2abc(a + b + c) + a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

* * *

E: **1033.** Să se arate că

$$\frac{a\dfrac{b-c}{b+c} + b\dfrac{c-a}{c+a} + c\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a} + \dfrac{a-b}{a+b}} =$$

$$= \frac{2\left(\dfrac{a}{-a+b+c} + \dfrac{b}{a-b+c} + \dfrac{c}{a+b-c}\right) + 3}{\dfrac{1}{-a+b+c} + \dfrac{1}{a-b+c} + \dfrac{1}{a+b-c}} = a + b + c$$

C. Coșniță

E: **1034.** Să se demonstreze identitatea:

$$(a + b + c - d)^3 + (a + b - c + d)^3 + (a - b + c + d)^3 + (-a + b + c + d)^3 =$$
$$2(a + b + c + d)^3 - 24\,ab(c + d) - 24\,cd(a + b)$$

Strătescu Ion, elev Călărași

E: **1035.** Într-o grădină zoologică se află 37 ființe cu 86 picioare și 44 de limbi. Știind că vulpile și tigrii la un loc sînt cît cangurii la număr, iar tigrii și urangutanii împreună, cît șerpii la număr, să se afle cîți canguri și urangutani care stau în două picioare fiecare, șerpi cu cîte două limbi fiecare și cîți tigri se află în grădina zoologică.

Ștepan Ionel

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

Pînă la 15 iunie 1957 s-au primit cîte cel puțin zece soluții bune la problemele propuse sau la chestiunile de examen propuse în ultimele trei numere apărute ale «Gazetei matematice și fizice» seria B, de la următorii rezolvitori de probleme:

ALBA IULIA. Cl. 8. Vartic Mihai (E: 911, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 30, 32—35, 42, 47, 48).

---

*) Evidențiații pentru rezolvările de probleme sînt scriși cu litere cursive,

La pagina 273 la rubrica evidențiați mai trebuia adăogat: *Strătescu Ion* (cl. 10 Călărași) *Iordănescu Sorin* (cl. 10 S.m. 20 București); iar la pag. 497 în loc de Chirică Daurian se va scrie *Tudor M. Gheorghe* (cl 10 S. m. 13).

ALEXANDRIA. Cl. 8. Ştefan Cornel (E: 911—15, 17—19, 21, 23, 30, 32, 34—36, 40, 41, 48). Cl. 10. Nicolae Ioan (2477, 505, 15, 18, 19, 23, 30, 36, 49—51, 68, 79, 80, P)

ANINA. Cl. 9. Voia Iacob (2511, 15, 17—21, 23, 36, 38).

ARAD. S. m. « I. Slavici ». Cl. 9. Beştea Cătălin (2465, 70, 80, 82—84, 97, 98, 503, 05), Nadin Gh. (2470, 74, 82, 88, 89, 91, 97, 515, 19, 23, 32, 33), Savin Virgil (2470, 72, 82, 97, 505, 08, 09, 11, 15, 17—20, 23, 30, 32, 33, 38).

BĂBENI (Piteşti). Pelepceac Vasile (Descompunerea numerelor).

BACĂU. S. m. 2. Cl. 8. Smelţer Greta (E: 911—15, 17, 19, 21—23, 34, 35), Vasilache Ioan, (2523, E: 922, 23, 32, 35, 41—43, 47). Abs. Negoiţă Marcel (2507, 09, 10, 12, 15, 36, 67, 72, 73, 77, 78, 80).

BAIA DE ARIEŞ (Cîmpeni, Cluj). Cl. 7. Totolici Gabriel (2579, 80, E: 919, 35, 18-23, 36, 39, 42, 44—48).

BAIA MARE. S. m. 1. Cl. 8. Atanasiu Moise (2519, 55, 58—80, E: 935, 36, 38, 40—43, 45—52), Botez Zenoviu (2519, 53, E: 911, 14, 21—25, 27—30, 32—36, 38, 40, 45—48), Prodan Dorina (2523, 32, 39, 610, 24, E: 921, 23, 30, 32, 34—36, 46, 47, 49, 52, 55).

BEIUŞ (Oradea). Sm. 1. Cl. 8. Bodeanu Corneliu (2438, 55, 56, E: 889, 99, 900, 05, 08, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25).

BOTOŞANI. S. m. 2. Cl. 8. Missir Ioana (2491, E: 911, 14, 17, 19—21, 23, 25, 28, 33, 34).

BRĂILA. S. m. 2 « N. Bălcescu ». Cl. 8. Rarinca Aristide (E: 911, 13, 14, 19, 21—23, 28, 32—36, 41, 45, 46, 48), Ştefănescu Vasile (2504, E: 915, 17, 19, 21—23, 28, 32—34). Cl. 10. Comănici Petru (2472, 81, 83, 97, 98, 518, 20, 21, 23, 71, 74). Abs. Durbacă Cezar (2517, 18, 23, 32, 39, 67, 72, 79).

S. e. 10. Cl. 7. Andraş Traian (E: 911, 19, 21—23, 28, 30—35, 47, 48).

BREAZA. Lic. mil. « D. Cantemir ». Cl. 8. Mărăcineanu Viorel (2519, 78, E: 921, 23, 25, 32—36, 43, 46—48). Cl. 9. Ţapu Mircea (2472, 97, 515, 18, 19, 23, 29, 67, 76, 78—80).

BUCUREŞTI. S. m. 1. « N. Bălcescu ». Cl. 8. *Lupaş Laurenţiu* (2507, 09, 11, 13, 15, 19, 20, 23, 28, 33, 36, 38, E: 911—14, 17—23, 25, 27, 28, 30, 32—34), *Răşcanu Radu* (2502, 04, 09, 20, 21, 29, 33, 38, 52, 89, 94, 98, 604, 06, 10—12, 21, 24, 25, 27, 32, *E*: 929, 31, 38, 43, 49, 51, 52, 54, 55, P). Cl. 9. Isbăşescu Mihai (2468, 74, 75, 88, 90, 91, 97—99, 503—05). Cl. 10. *Doniga Nicolae* (2500.03, 05, 07, 09, 11, 15, 18—23, 28—34, 36, 49, 50, 54, 56, 57, 68, 73, 78, 79), Melega Eugen (2500, 01, 03, 15, 18, 23, 28—31, 33, 36, 38), Popa Mircea (2507, 14, 15, 21, 23, 25, 26, 30, 34—36, 39, 42, 49, 50, 54, 57, 67, 78, 79).

S.m.4. « Aurel Vlaicu ». Cl. 8. Budescu Natalia (E: 921—23, 25, 28, 30, 32—35), Drăgoi Mihai (2505, E: 911, 21—23, 28, 30, 32—34), Mohan Gheorghe (2505, E: 911, 21—23, 28, 30, 32—34), *Muşat Mihai* (2471, 73, 75, 77, 80, 82, 97, 99, E: 911—23, 25, 27, 38, 30, 32—41), Sorca Ilie (2523, E: 911, 21—23, 28, 30, 32—34). Cl. 9. Cişlaru Coble (2438, 44—48, 55—57, 61, 62). Cl. 10. *Stamatoiu Petre* (2503, 10, 15, 18—21, 23, 24, 28, 31—34, 36, 37, 49, 59, 60, 62, 65, 67, 73, 78, 79, 87, 91, 606, 10, 11, 16, 19—26, 30, 37, 72).

S. m. 7 « I. L. Caragiale ». Cl. 7. Vlad Valentin (E: 910, 13, 17, 19—26, 28—30, 32—36, 38, 39, 47, 48). Cl. 8. Ştefănescu Anton (E: 911, 12, 14, 15, 19—23, 25 26, 32—35 46). Cl. 10. Bălescu Dan (2497, 99, 500, 01, 03, 21, 22, 26, 28—30, 33, 79), Buşilă Ioana (2494, 96, 98, 99, 539, 42, 48—50, 52—55, 58, 62—64).

S.m. 10. Cl. 9. Repciuc Rodica (2540, 48, 54, 55, 60, 64, 71, 72, 74, 76, 79, 81, 84, 85, 89, 91, 94, 606, 07, 10).

S. m. 11. Cl. 9. Antoniu Sorin (2505, 36, 39, 42, 54, 65, 67, 68, 72, 78—80), Schiopulescu Dan (2475, 89, 91, 504, 05, 09, 18, 21, 32, 36).

S. m. 12. Glasberg Vladimir (2466, 70—72, 74, 75, 77, 78, 80—85, 87—92, 95, 97—99)

S. m. 13. Cl. 8. Bicu Dan (E: 922—24, 27, 28, 30, 32—35, 46, 47, 49, 51, 52, 57), Mereuţă Dan (2470, 82, 523, E: 911—15, 17, 18, 21, 22, 25, 27, 28, 32—34), Sburlan Corneliu (E: 911, 14, 18, 21—23, 25, 28, 30, 32—34).

S. m. 15. Cl. 8. Ionescu Sorina (2471—73, 81—83, 87, 97, 518—20, 23).

S. m. 16. Cl. 8. Berceanu Tedi (2504, 05, 09, 23, 68, 79, E: 935, 41, 42, 46, 47, 49—52, 61).

S. m. 17. « Matei Basarab ». Cl. 8. Claudi Victor (2499, E: 911, 14, 23, 30, 32, 36, 41, 42, 45). Cl. 9. *Oprică Mihai* (2418, 19, 22-25, 28, 30—35, 37—39, 44—49, 51—53,55—59, 61—63, 68, 70, 71, 78, 82). Cl. 10. Coconea Gabriel (2497, 98, 515, 18, 21, 28, 36, 70, 72).

S. m. 22. « Gheorghe Lazăr ». Cl. 10. Ciocănaş Doina (2418, 72, 87, 523, 28, 31, 50, 67, 69—71, 79).

S. m. 23. Cl. 9. Voinescu Alexandru (2423, 87, 98, 523, 38, 48, 67, 70, 74, 79).

Absolvenţi: Lungulescu Nuţică (2498, 515, 17, 29, 36, 50, 54, 62, 67—70, 72, 78—80, 84, 89, 611, 20—25, 32), Proşcan Ion (2502, 15, 21, 23, 30, 42, 50, 65, 68, 72, 78).

BUZĂU. C. 8. *Gheorghe Cezar* (2500, 01, 03, 05, 07—09, 12, 15, 17—21, 23, 30—33, 36—38, E: 921—23, 25—34, P). Cl. 10. Sîrbu Gheorghe (2549, 50, 54, 55, 65, 68, 70, 73, 76. 77, 79, 80), Toma Nicolae (2472, 78, 80, 84, 87, 97,—501, 70, 77). Absolvenţi: *Bătireanu Gheorghe* (2538—46, 48—52, 55, 56, 60—63, 65—75, 78, 80—82), Toia Georgeta (2472, 77, 91, 518, 23, 33, 36, 39, 49, 50, 60, 65, 78, 79).

CALAFAT. Cl. 8. Jidovin Ştefan (E: 902, 11, 21, 23, 33—35, 41).

CĂLĂRAŞI. Cl. 10. Geacă Despina (2518, 23, 29, 30, 34, 39, 38, 50, 68, 70).

CARACAL. S. m. 1. Cl. 9. Madan Constantin (2495, 57, 63, 72, 500, 01, 10, 15, 18, 21, 23, 28, 30, 34), *Mihăilescu Viorel* (2470, 74, 80, 82, 84, 87, 97, 98, 503, 05, 06, 09, 11, 15, 18—21, 23, 28—30, 33, 36, 39, 53, 54, 67, 68, 72, 74, 78, 79, 81, P).

CARANSEBEŞ. S. m. « Oţelul Roşu ». Cl. 8 Azola Giovanni (2491, 533, E: 914, 16, 18, 23, 25, 30, 32).

CÎMPINA (Ploieşti). Cl. 10. Nicolescu Furtană (2466, 87, 97, 553, 71, 73, 77), Absolvenţi: Ionescu Mihai (2519, 76, 81, 83, 87, 90, 91 523, 36, 50, 70, 79), Săndulache Mircea (2489, 97, 505, 11, 15, 17, 18, 21, 23, 30, 31).

CÎMPULUNG Moldovenesc. Lic. mil. C. 9. Merchez Constantin (2503, 05, 07, 12, 15, 18, 19, 23, 25, 30—33, 35, 36).

CÎMPULUNG Muscel. S. m. 1. Cl. 8. Bănică Constantin (E: 920—23, 25, 28, 30, 32—34). Cl. 10. Braga Zonel (2489, 505, 21, 23, 30, 31, 34, 36, 67, 70).

CLUJ. S. M. 4. Cl. 8. Lungu Şerban (2480, 509, 23, 33, 79, E: 912, 15, 16, 19, 21, 33—36), Micu Radu (2489, 523, E: 911, 14—18, 21—23, P). Cl. 9. Chisăliţă Adrian (2505, 39, 40, 54, 64, 65, 68, 71, 72, 78—80). Cl. 10. Bîrzan Romanel (2540, 54—57, 60, 62, 67, 69, 71, 72, 75—77, 606, 10, 16, 20, 23, 25, 27, P).

S. m. 5. Cl. 10. Standraluca Viorel (2509, 23, 30, 39, 54, 65, 67, 68, 70—72, 75, 78—80, P).

S. m. 6. Cl. 9. Dragoş Eugen (2509, 17, 54, 60, 65, 72, 78, 79, 606, 07, 11, 13, 20, 24, 25, 27), Păcurariu Radu (2420, 25, 32, 34, 38, 49, 53, 55, 56, 61, 62, 64).

Institutul Pedagogic. Anul II. Grindean Maria (2445, 56, 57, E: 910, 21, 22, 26, 27, 33—35), Neagoş Stela (E: 910, 11, 23, 25, 30, 33—35, 46, 47). Anul IV. Indoleanu Ion (2500, 01, 05, 11, 18, 22, 28, 29, 62, 65, 78, 79, E: 921, 22, 28, 30, 33, 34, 36, 42).

CONSTANŢA. S. m. 1. Cl. 8. Anghel Lucia (2503, 511, 23, E: 911, 14, 16, 17—23, 28, 30, 32—34). Abs. *Ste an Ionel* (2395, 409, 21, 22, 28, 29, 32, 35, 37—39, 47, 58, 59, 64—66, 69, 72—75, 78, 82—85, 87, 92, 93, 504, 05, 19, 53, 54, 57, 69—79).

CORABIA. Cl. 9. Truică Marin (2477, 78, 80, 88—90, 98, 525, 39, 67, 68).

CRAIOVA. S. m. 1. « Nicolae Bălcescu ». Săseanu Vasile (2538—40, 50, 52, 65, 67, 73, 76, 78—80).

S. m. 2. « Fraţii Buzeşti ». Cl. 10. Staicu Ştefan (2477, 81, 86, 89—91, 504, 25, 26, 35, 50, 65, 79). Absolvenţi: Bărbulescu Ion (2471, 519, 20, 30, 31, 54, 64, 67, 69, 71, 72, 75, 78), Toader Emil (2503, 11, 15, 17, 18, 21—23, 30, 34, 36, 39, 42, 50, 54, 65, 67, 68, 70, 79).

S. m. 3. Cl. 8. Haş Violeta (2539, 67, 79, E: 911—14, 16, 17, 35, 36, 38, 41—44, 46—48), Vasilescu Fevronia (E: 911, 21, 23, 28, 30, 32-35, 36, 41, 42).

S. tehn. expl. c.f.r. Anul II. Bureţea Mircea (2550, 67, 68, 76, 78, 79).

DEJ. S. m. 2. Cl. 9. Haranguş Ana (2392, 400, 48, 57, 71, 505, 12, 18), Mureşan Maria (2392, 95, 410, 23, 48, 52, 57, 71, 99, 512, 18), Pop Eugenia (2418, 19, 38, 45, 57, 61, 63, 71, 99, 512, 23), Rusu Margareta 2395, 400, 05, 06, 09, 10, 35, 38, 61, 62, 71, 99, 505, 12, 19). Abs. Cosmuţă I. (2477, 90, 518, 20, 34, 36, 42, 50, 54, 67, 68, 78—80).

DOROHOI. Cl. 10. Popa Gh. (2472, 76, 90, 97, 99, 515, 18, 21, 23, 50, 72, 78, 79).

FĂGET (Timişoara). Cl. 10. Antănaş Petru (2539, 42, 44, 49—52, 54, 65, 67, 69, 72, 77—79).

FOCŞANI. S. m. « Unirea ». Cl. 9. *Rădescu Eugen* (2465, 68, 74, 78, 81, 82, 88, 92, 511, 20, 25, 28, 35, 36, 38, 39, 42, 43, 48, 49, 52—54, 58, 63, 67, 68, 71, 72, 74, 79, 82, P).

GALAŢI. S. m. marină. Cl. 8. Andrei Dan (E: 911, 12, 19—23, 30, 32—34). Cl. 10. Chirilă Costică (2506, 07, 12, 18—21, 23, 25, 26, 28, 50, 51, 65, 67, 70, 77—79).

GIURGIU. S. M. 1. Cl. 9. Vişinescu Mihai (2542, 49, 50, 52, 54, 57, 65, 68, 72—74, 77, 79).

S. m. 2. Cl. 7. Popescu Adina (E: 920—26, 28, 30, 32—34). Cl. 8. Popescu Radu (2505, 28, 39, 40, 55, 67, 68, 74, 79, E: 926, 36, 38—41, 44—48).

HUŞI. Abs. Dolteanu Temistocle (2472, 77, 87, 89, 91, 95, 98, 505, 18, 20, 21, 23—25, 28, 29, 31, 36, 38).

HUNEDOARA. Dobali Daniel (2474, 75, 77, 83, 88—91, 93, 525, 35, 51, 52, 70).

IANCA. Cl. 7. Vlad Gabriel (E: 920—22, 26, 28, 30, 32).

IAŞI. S. m. 1 « Mihail Sadoveanu ». Cl. 8. Simarici Dan (2523, 39, 49, 54, 67, 78, E: 925, 34, 36). Cl. 9. Manole Corneliu (2504, 07, 11, 13, 15, 17—19, 21, 23, 32, 36, 38, 39, 41, 48, 71, 79).

S. m. 3. « Costache Negruzzi ». Cl. 8. Caba Mihai (2503, 49, 67, 79, E: 914, 17, 38, 42, 47, 48), Cernăianu Dan (2503, E: 915, 17, 18, 21, 23, 30, 32—36, 40, 43, 47). Cl. 9. *Nanu Octavian* (2384, 91, 401, 78, 81, 83, 508, 09, 12, 21, 30, 36, 48, 52, 54—56, 58, 60, 65, 67, 68, 71, 72, 75, 76, 78, 79, 84, 90, 91, 94, 602, 04, 06, 07, 10, 13, 15, 20, 21, 24, 24, 27, 28, 30, P), Purice Gheorghe (2509, 12, 19—21, 23, 32, 36, 39, 65, 71, 72, 78, 79), Sbiera Ion (2503, 09, 12, 18—21, 23, 32, 36, 39, 65, 61, 78, 79).

S. m. 5. Cl. 9. Soroceanu Mihai (2505, 15, 18, 21, 26, 28—30, 70, 72).

S. ped. învăţători. Anul II, Mucileanu Vasile (909, 11, 12, 14, 15—17, 21—23, 28, 30—36, 41, 46).

LUGOJ. Cl. 10. Păpuşoiu Gheorghe (2470, 72, 80—84, 87, 89, 97).

MEDGIDIA (Constanţa). Abs. Iordănescu Nicolae (P).

MEDIAŞ. Absolvent Albu Traian (2503, 07, 09, 11, 15, 18—20, 25, 23, 26).

ORADEA. S. m. 1. Cl. 9. Pop Corneliu (2472, 80, 84, 87, 97, 98, 509, 11, 19, 20, 30, 31). Abs. Kiss Eerno (2481, 18, 21, 23, 24, 30, 33, 34, 49, 97).

ORAŞUL STALIN. S. m. 1. Cl. 9. *Stoian Mircea* (2472, 74, 75, 77, 81, 82, 88, 89, 91, 97, 500, 01, 95, 07, 11, 15, 18—21, 23, 25, 28, 29, 31—37, 39, 42, 49, 54, 60, 62, 68, 70, 72, 74, 77—79).

S. m. 4. Cl. 10. Istok Albert (2531, 39, 42, 49, 50, 53, 65, 68, 72, 73, 77—79).

ORAVIŢA. S. m. Anina. Cl. 9. Damian Dumitru (2511, 15, 17—21, 23, 38, 72, 78).

PIATRA NEAMŢ. Cl. 6. Crivăţ Ioan (E: 919, 22). Cl. 9. Regneac Cornelia (2472, 81, 87, 89, 97, 504, 17, 20, 21, 23, 32, 36, 39, 60, 62, 68, 71—74, 77—79).

PETROŞANI (Hunedoara). Cl. 9. *Bergthaler Cristian* (2467, 78, 508, 11—13, 21, 22, 28, 29, 33, 36—40, 42, 49, 53, 54, 60, 62, 64, 70, 72—76, 78—80), Crustarciuc Corneliu (2465, 70—72, 78, 80—83, 91, 97).

PITEŞTI. S. m. 1. Cl. 9. *Bica Const.* (2465, 79, 80, 82—84, 87, 99, 503, 07, 09, 10, 12, 15, 17—21, 30, 33, 36, 54, 60, 65, 67, 71, 72, 78, 79, 82). Absolbenţi: Ghiţulescu Mihai (2531, 33, 89, 94, 98, 606—10, 13, 15, 16, 21, 24, 25), Popescu Aurel (2446, 48, 52, 55, 62, 87, 97, 518, 23, 79), Sîrbulescu Sanda (2495, 96, 524—26, 31, 34—36, 50, 51, 67, 68).

PLOEŞTI. S. m. 1 « Ion Luca Caragiale ». Cl. 8. Angelescu Constantin (2489, 505, 09, 39, E: 918, 35, 36, 40, 41, 43, 47, 49, 96), Călin Eugen (2498, 503, 09, 19, E: 916—19, 21, 35). Mîinea Georgeta (E: 912, 20—25, 28, 30, 32—36, 41, 47), Rosenberg Theodor (E: 914—19, 21, 23, 25, 27, 28, 32—36, 42, 47, 48). Cl. 9. Ivan Constantin (2509, 18—21, 23, 31, 33, 36). Cl. 10. Apostolescu Mihai (2481, 89, 517, 26, 30, 42, 71, 76, 78, 79), Avram Ion (2472, 83, 97, 518—20, 23, 30, 34, 70—72, 79), Bageac Constantin (2472, 97, 99, 517, 18, 23, 34, 36, 67, 68), *Baltag Vasile* (asupra teoremei lui Menelaus, 2478, 85, 94, 509, 12, 21, 26, 32, 36, 38, 40, 42, 48, 49, 53—55, 57, 60, 64—68, 70—75, 77—80, P), Bogdan Ion (2400, 02, 04, 06, 09—11, 83, 519), Ciprian Radu (2448, 52, 55—57, 61—63, 72, 518, 30, 36), Circiumaru Liviu (2495, 97, 515, 18, 20, 21, 23, 30, 32, 34—36, 39, 68, 79), Coman Alexandru (2395, 405, 09, 10, 82, 87, 90, 515, 23, 34), Constantinescu Gh. (2455—57, 61—63, 523, 34, 36, 71) Constantinescu Radu (2420, 45, 46, 48, 61—63, 72, 77, 79), Constantinescu Vasile (2445-48, 52, 55, 58, 61—63, 72, 76, 507, 19, 21 23, 26, 28, 30, 33, 34, 36, 56, 71), Costeanu Michael (2446, 48, 55, 57, 62, 83, 520, 70, 78, 79), *Delibas Constantin* (2511—13, 20, 22, 24—26, 29, 38, 39, 41, 49, 49—59, 64, 65, 67—75, 78, 79, 81, P), Dobrişan Marina (2438, 48—52, 55, 61, 63, 64, 90, 97, 518, 67), Drosu Cristian (2471, 80, 518, 23, 34, 42, 49, 51, 65, 61, 78, 79), Istrate Gh. (2507, 09, 11, 18, 19, 21, 23, 30, 33, 34, 54, 71, 72, 79), Lăzărescu Emil (2518, 20, 23, 31, 34—65, 78, 79), Lecca Aurel (2451, 78, 82, 517, 18, 20, 34, 39, 52, 58, 67, 68, 72, 79, 80), Mălăroiu Ion (2447, 48, 52, 55—57, 61—63, 68, 72, 518, 30) Manolescu Dumitru (2455, 56, 61—63, 523, 34, 36, 71), Marinescu Lucian (2471, 72, 78, 518, 20, 21, 30, 31, 34, 39, 54, 72, 87), Mincă Ion (2500, 01, 03, 05, 07, 09, 11—13, 15, 18—21, 23, 28—33, 36, 38), Morussi B. (2495, 97, 99, 520, 23, 31, 32, 34, 36, 67, 68, 79, 617), Niţă Mircea (2482, 83, 87, 530, 39, 54, 71, 72, 78, 79, 82), Panaitescu Gh. (2471, 72, 97, 512, 18—23, 54) 57, 64, 65, 71—75, 79, 80), Panaitescu O. (2452, 55—57, 61—63, 72, 518, 20, 78, 79, 83), Popescu Maria (2446—49, 55, 57, 62, 518, 20, 78, 79), Possa Alexandru (2348, 54, 95, 97, 400, 04—06, 08—11, 46, 71, 519), Radu Gh. (2418, 33, 45, 46, 48, 52, 55, 57, 60—62, 72, 83, 518, 30), Stanchevici

Bogdan, (2472, 73, 76, 81, 83, 95, 97, 505, 11, 15, 18, 21, 23, 30, 34, 36, 72, 78, 79) Viaşti Mircea (2472, 78, 80, 518—21, 23, 78, 79).

S. m. 3. Angelescu Mihai (E: 921, 24, 25, 28, 30—36, 40, 43, 47, 48).

PUCIOASA. Abs. *Stan N. D.* (2425, 27, 28, 30, 34, 38, 40, 42, 44, 64, 65, 70—73, 77—85, 87, 91, 94—501, 03, 05, 07, 09, 11—13, 15, 18—24, 26, 28—31, 33, 34, 36, 38—40. 49—51, 53—58, 60, 67—75, 77—79, 82).

RĂDĂUŢI. S. m. 1. Cl. 8. Onciulescu Ion (E: 912, 14, 19, 32, 35, 36, 42, 43, 46—48). Cl. 10. Alexiu Dan (2472, 78, 90, 97, 510, 15, 18—21, 23, 30, 31, 36, 39, 54, 65, 67, 68, 70, 71, 78, 79), Găină Nicolae (2500, 01, 31, 32, 39, 54, 65 67, 68, 70, 71, 78—80), Juravale Ilie (2472, 87, 90, 510, 15, 18—21, 23, 24, 34, 47, 51, 58, 72, 76, 87, 89—91).

REŞIŢA. Cl. 7. Chira Dana (E: 900, 02, 03, 05, 06, 08, 09, 11, 14, 22, 28, 29, 32—34, 47). Cl. 10. Tot Mircea (2406, 07, 33, 34, 47, 51, 58, 72, 76, 87, 89—91).

RÎMNICU SĂRAT. Cl. 8. Popescu Cornel (2620, 24, E: 935, 36, 40, 47, 49, 59, 52, 60).

RÎMNICU VÎLCEA. Cl. 8. Burgulea Dan (2480, 82, 84, 90, 503, 11, 21, 23, 28, 32, 33), *Costin Valerică* (2470, 80, 503, 05, 15, 19, 33, 45, 55, 67, 78, 79, E: 910, 11, 14—18, 21, 23, 32—36, 42—44, 47, 48), Himentkovski Dorel (2475, E: 912, 15—18, 22, 23. 28, 30, 33, 34, 47, 48), Munteanu Marin (2470, 80, 82, 505, 15, 19, 45, 67, 78, 79, :E3, 9, 14—18, 21, 23, 32—36, 42—44, 48).

ROŞIORII DE VEDE. Col. 9. Leonte Alexandru (2500, 01, 07, 09, 11, 15, 18—21, 23, 28, 30, 33, 36). Cl. 10. Iancu Petre (2500, 09, 15, 18, 23, 33, 34, 36, 50, 54, 65, 67, 77, 79).

SATU MARE. Cl. 10 Berkovitz Petru (2472, 75, 76, 81, 89, 90, 98, 517—19, 25, 26, 34—36, P).

SIBIU. Cl. 8. Lungu Brîndușa (E: 911, 14, 21, 23, 30, 34, 35, 43, 46, 47). Abs. Zimmermann Nicolae (2475, 77, 90, 91, 93, 525, 42, 49, 50, 60, 66).

S. mil. artilerie. Anul III. *Pupăzan Nicolae* (2539, 40, 48—51, 54—56, 58, 60, 64—66, 68, 70, 72—80, 610—13, 16, 21, 23, 25, 27).

ŞIMLĂUL SILVANIEI (Oradea). Mina Sărmăşag. Maistru minier Gherlan Vasile (2539—42, 48—50, 54—58, 61, 62, 64, 65, 67—75, 77—79, 81).

SÎNICOLAUL MARE (Timişoara). Cl. 7. Lovrenski Angela (E: 914, 17, 22, 23, 25 26, 28, 32, 33, 34, 42, 48).

TECUCI. S.m.1. Cl. 7. Grama Petru (E: 923, 24, 26, 28, 30, 33, 34). Cl. 8. Clisu Dorina (E:928, 30, 32—36, 41, 47, 48), Săvel Iftodie (E: 911, 21, 23, 32—36, 41, 47).

S. m. 2. Cl. 8. Costea Marin (E: 912, 13, 15, 19, 26, 27, 30—32, 35, 36, 40), Gaston N. (E: 935, 38, 44). Cl. 10. Popa Ion (2472, 77, 78, 80, 90, 97—99, 502, 18, 21, 23), *Tudose Traian* (2478, 503, 05, 07, 15, 19, 20, 26, 28, 29, 32—34, 38, 38, 39, 49, 50, 54 67, 68, 70, 72—74, 76, 79, 82, 88, 90, 610, 11, 20—25).

TIMIŞOARA. Cl. 6. Antonescu Antonia (E: 921, 22, 24, 28, 29, 32, 33, 35, 41, 46), Netedu Violeta (E: 900, 12, 13, 15, 19).

S. m. 1. Abs. Nica Const. (2477, 88—91, 93, 520, 21, 24—26, 29, 30, 35, 39, 42, 49, 50).

S. m. 3. Cl. 7. Anţila Tatiana (E:911, 14, 22, 23, 30, 32—35, 40).

S. m. 5. Cl. 9. Riţă Teofil (2470, 72, 87, 510, 11, 15, 17—19, 23, 30, 33, 36, 39, 54. 78).

TITU. Cl. 10. Ghinea Ion (2518, 23, 30, 34, 49, 52, 65, 72, 78, 79, 81).

TÎRGOVIŞTE. S. m. 1. Cl. 8. Ploscaru Mihail (2503, 23, 32, E: 911, 14 15, 17—19. 21—23, 25, 28—30, 32—34).

S. m. 2. Cl. 2. Cl. 8. Popescu Nicolae (2567, 78, E: 923, 32—36, 42, 43, 47, 48).

S. m. 3. Cl. 9. Dumitru Gheorghe (2471, 82, 97, 515, 18—21, 23, 32, 33, 36).

TÎRGU JIU. S. m. 2. Cl. 7. Petrescu Ştefan (2578, E: 920, 21, 23, 25, 27—30, 32—35, 41, 42, 44—48). Slăvescu Mihai (E: 911, 13, 14, 17, 21, 23, 27, 28, 32—34, 42). Cl. 8. Ceparu Romulus (2539, 54, 67, 79, 80, 610, 24, 21, E: 913, 21—23. 25, 27, 30, 32, 35, 36, 42—44, 46, 48, 49), *Costoiu Dorel* (2509, 23, 28, 39, 49, 53, 54, 65, 67, 68, 78—80, E: 911, 23, 25, 27—29, 35, 36, 40—48), Grigorian Mircea (2533, 39, 67, 79, 80, 610, E: 920, 22, 23, 25, 30, 32, 35, 36, 42—46, 48, 49), Şerban Viorel (2509, 28, 32, 39, 42, 54, 65, 67, 68, 78—80, 610. 20, 21, 23, E: 924, 25, 35, 36, 40, 42—49, 51, 52). Cl. 9. Bănete George (2521, 29, 39, 49, 54 67, 70, 72, 73, 75, 79, 620, 21, 23, 25), Berculescu Ion (2504, 23, 28, 39, 49, 54, 65, 67, 70, 72, 73, 79, 80), Chirculescu Vasile (2509, 18, 23, 28, 39, 49, 53, 65, 67, 70, 72, 73, 78—80), Ciocăzeanu Ion (2509, 17, 18, 29, 33, 39, 49, 52—54, 65, 67, 68, 70, 72, 75, 76, 78—80, 615, 20, 21, 23, 24), *Cocheci Nicolae* (2463, 71, 72, 78, 80—83, 87, 97, 505, 09, 13, 15, 18, 19, 21, 23, 33, 36, 39, 49, 52, 54, 65, 67, 68, 70, 72, 78, 78—80), Fota George (2482, 97, 509, 15, 18, 19, 23, 36, 39, 49 65, 67, 68, 70, 72, 73,

73, 79), Lupulescu Ion (2509, 18, 19, 23, 33, 36, 39, 49, 52, 65, 67, 70, 72, 73, 76, 78—80, 621, 23, 27), *Năsturică Iulian* (2463, 71, 72, 74, 78, 80—83, 87, 97, 504, 05. 09, 12, 15, 18, 19, 21, 23, 33, 36, 39, 49, 52, 505, 67, 68, 70, 72, 79), Popescu Ionaş (2504, 12, 20, 28, 29, 53—55, 70, 72, 78—80), Vlădoiu Dumitru (2504, 09, 12, 15, 18, 19, 21, 23, 29, 36, 39, 49, 54, 65, 67, 70, 72, 73, 78—80, 620, 21, 25, 27). Cl. 10. *Butulescu Ion* (2471, 72, 74, 76, 78, 80—83, 85, 87, 88, 90, 97, 500, 01, 05, 09, 13, 15, 18, 19, 23, 33, 36, 39, 49, 50, 52, 54, 65—68, 70 72, 73, 78—80), Comănescu Ion (2463, 71, 74, 76, 78, 85, 505, 17, 21, 23, 33, 34, 36).

TÎRGU MUREŞ. S. m. 1. Cl. 8. Neagu Victor (2464, E: 902, 09, 34, 35, 43, 47) Cl. 10. *Peterfi Attila* (2460, 514, 18, 21, 24, 25, 26, 28, 30—37, 39, 42, 44, 49, 50, 52, 54, 62, 65, 67, 68, 70—72, 74, 78—80, 608, 10, 11, 19, 20).

TÎRGU NEAMŢ (Bacău). Cl. 7. Găetan Alexandra (E: 921—23, 33, 36, 38, 40. 42, 43, 47), abs. Răileanu Mihail (2437—39, 70, 503, 07, 09, 11, 15, 18, 20—23, 25, 26, 28—30, 34, 38, 39, 53, 54, 68, 78—80, P).

TRUSEŞTI (Suceava). Cl. 10. *Bejenaru Ion* (2433, 46, 48, 52, 65, 77, 88—91, 97. 98, 518, 19, 21, 24—26, 34—36, 39, 42, 49, 50, 52, 57, 68, 72, 74, 77—79, P), *Bejenaru Maria* (2433, 48, 52, 65, 77, 88—91, 97, 98, 518, 19, 21, 24—26, 34, 35, 39, 42, 49, 50—52, 67. 68, 74, 77—79), *Mocanu Ovidiu* (2397, 427, 33, 42, 48, 51—54, 58, 65, 77, 78, 81, 82, 89, 90, 97, 99, 510, 15, 18, 19, 21, 23, 30, 50, 65, 67, 72, 79, P).

TURNU MĂGURELE. Cl. 10. Grecu Eftimie (2528, 34, 38, 39, 42, 50, 54, 65, 67, 68, 70—73, 78, 79).

TURNU SEVERIN. S. m. 1. Cl. 9. Alexe Alexandru (2472, 87, 518, 21, 23, 65, 76, 78—80), Bresniceanu Alexandru (2517, 18, 21, 23, 36, 65, 78, 79, 613, 15), Suici George (2515, 39, 49, 65, 67, 68, 71, 77, 78). Cl. 10. Nistoroiu Titel (2472, 76, 87, 97, 510, 18, 23, 25, 30, 31, 34—36).

Abs. Petre Titus (2500, 01, 03—05, 17, 20, 22, 23, 28—32, 34, 38, P.).

URLAŢI (Ploeşti). Cl. 10. Vasilescu Sorin (2470, 72, 519, 23, 34, 50, 51, 65, 71, 78, 79).

ZALĂU (Cluj). Farkaş Beniamin (2471, 97, 509, 11, 15, 32, 33, 39, 49, 50, 65, 67, 68, 78, P).

★

Corespondenţii G.M.F.-B, sînt rugaţi să se aboneze din vreme pe anul 1958, individual prin oficiile poştale, imediat după fixarea noului abonament, pentru a nu risca să rămînă fără primele numere ale G.M.F.-B. Mărirea numărului de abonamente şi colaboratori contribuie şi la îmbunătăţirea revistei.

★

ERATĂ. La E: 981 în loc de ab $(a—b)$ se va scrie a^3b^3 $(a—b)$.

La pagina 342 rîndul 8 de sus, în loc de «este» se va scrie «nu este».

„OLIMPIADA MICILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1957 — 1958"

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R. P. R. organizează „Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni 1957—1958" (OMMF) la care pot participa elevii claselor a V-a a VI-a, şi a VII-a ale învăţământului elementar.

Olimpiada se va desfăşura în trei etape:

— **Etapa pregătitoare** (prin corespondenţă) are loc în primul şi al doilea trimestru al anului şcolar. În acest timp participanţii la OMMF vor răspunde la întrebările puse şi vor rezolva problemele publicate în „Gazeta matematică şi fizică" seria B sau în „Matematikai és fizikai lapók".

— **Etapa locală** se va desfăşura duminică 23 martie 1958 între orele 9 — 12, în fiecare oraş regional, raion sau pe centre de comune.

— **Etapa regională** se va desfăşura la 11 mai, în fiecare reşedinţă de regiune.

Elevii evidenţiaţi la ultima etapă vor primi diplome şi premii.

În numărul 11 al acestei reviste vor apare regulamentul olimpiadei. şi problemele etapei pregătitoare.

ELEVI ŞI ELEVE,

participaţi cu tot entuziasmul vostru la aceste olimpiade de matematică şi fizică !

„OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1958"

În atenţia tineretului din şcoli

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează **„Olimpiadele de matematică şi fizică 1958"** la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcol.lor pedagogice, profesionale şi tehnice de maiştri.

Olimpiadele se vor desfăşura în trei etape:

— **etapa locală** (raională în Bucureşti), va avea loc pentru matematică la 2 martie, pentru fizică la 9 martie 1958;

— **etapa regională** va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 30 — 31 martie 1958;

— **etapa finală** va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta la matematică şi la fizică. Probele scrise (eliminatorii) şi orale au loc între 3 şi 6 mai 1958.

Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

În numărul 12 al acestei reviste va apare regulamentul şi programa olimpiadei.

ELEVI ŞI ELEVE,

participaţi cu tot entuziasmul vostru la aceste olimpiade de matematică şi fizică!

C. 934 — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1428

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - ÉCHANGE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Anul VIII — noembrie 1957

11

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VIII, Nr. 11 — noiembrie 1957

SUMARUL

Pag.

1. *Cîteva corelaţii în matematici elementare* de C. Ionescu-Ţiu 561
2. *Maşini de calcul numeric pe bază de circuite electronice* de D. Boiangiu 567
3. *Note matematice* de A. Năbădan şi D. Bulucea . . . 574
4. *Construirea unui transformator* 576
5. *Caleidoscop fizic* 579
6. *Probleme rezolvate (2352, 2354, 2357. 2361, 2364, 2383, 2384, 2385, 2386, 2390, 2392, 2395, 2396, 2397, 2399, 2401, 2403, 2418, 2423)* 582
7. *Probleme propuse (2835—2856)* 591
8. *Chestiuni de examen (2857—2882)* 597
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1036 — E: 1051)* 601
10. *Regulamentul «Olimpiadei micilor matematicieni şi fizicieni»* 603
11. *«Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni» 1958 (Problemele pentru cl. V, VI, VII)* 605
12. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 608

ANUL VIII 11 NOEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolanglu A.**, asistentă univ., **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Muşat I.**, profesor; **Neguleseu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.58 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII Nr. 11 noembrie 1957

CÎTEVA CORELAŢII ÎN MATEMATICI ELEMENTARE

Prof. C. IONESCU-ŢIU

Relaţii algebrice folosind geometria şi trigonometria şi reciproc

ŢINEM seamă că în cazul rezolvării triunghiurilor, exprimarea elementelor necunoscute se face în funcţie de cele (date) cunoscute, dintre care cel puţin un element trebuie să fie metric, că toate triunghiurile asemenea au aceleaşi unghiuri şi că elementele metrice sînt proporţionale. De aceea putem studia *triunghiuri tip* care să difere între ele numai prin modificarea unghiurilor. Pentru a determina forma unui triunghi este suficient a cunoaşte numai două din unghiuri, deoarece al treilea unghi rezultă.

1. Să considerăm ca triunghiuri tip orice triunghi înscris în cercul de diametru egal cu unitatea, adică $2R=1$. Un astfel de triunghi tip poate fi caracterizat prin două unghiuri A şi B date. Calculînd elementele metrice liieare ale acestui *triunghi tip*, toate elementele corespunzătoare ale oricărui triunghi asemenea cu acesta, se află multiplicînd elementele respectiv cu coeficientul de proporţionalitate $2R$, unde R este raza cercului circumscris. Fie $\sin A = a$ şi $\sin B = b$. Laturile triunghiului vor fi $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$,

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{2}; \quad h_a = \frac{2S}{a} = bc, \quad h_b = ac, \quad h_c = ab, \quad \frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}.$$

Ţinînd seamă că $R = \frac{1}{2} \geqslant 2r$, rezultă $r \leqslant \frac{1}{4}$ sau $\frac{1}{r} \geqslant 4$.

Înlocuind pe $c = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$ unde a şi b sînt numere pozitive subunitare triunghiul ABC fiind ascuţitunghi, rezultă inegalitatea

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})} + \frac{1}{b(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})} \geqslant 4$$

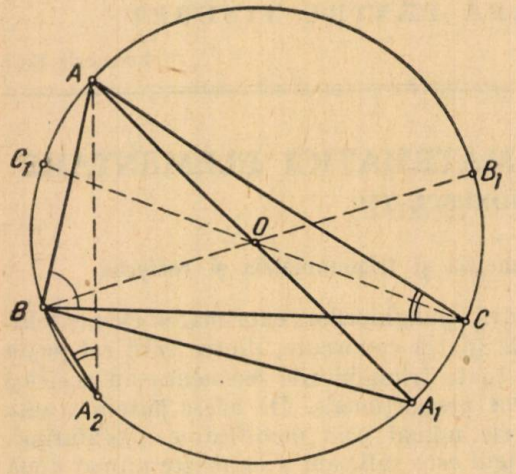
care se mai poate scrie

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + b + a \geqslant 4ab(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$$

unde a, b sînt numere pozitive subunitare, egalitatea avînd loc pentru $a = b = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. *În triunghiul tip* considerat, $2R = 1$, AA_1 fiind diametrul cercului circumscris, avem $A_1C = \cos B$; $A_1B = \cos C$, iar relaţia $a = b\cos C + c\cos B$ devine $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B + C)$ relaţie cunoscută.

Aceiaşi relaţie ia forma $AA_1 \cdot BC = AC \cdot BA_1 + AB \cdot CA_1$ fiind un caz particular al teoremei lui *Ptolomeu*.



— În triunghiul A_1BC relaţia

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

devine

$$\sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C\cos(180° - A)$$

sau

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

relaţie între cosinusurile unghiurilor unui triunghi oarecare.

— Să aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABA_2 unde A_2 este intersecţia înălţimii din A cu cercul circumscris.

Mai întîi avem $\sphericalangle ABA_2 = 180° - C - (90° - B) = 90° - (C - B)$; $AB = \sin C$, $A'A_2 = \sin(ABA_2) = \cos(B - C)$, $BA_2 = \sin(BAA_2) = \cos B$. Relaţia $AA_2^2 = AB^2 + BA_2^2 - 2AB \cdot BA_2\cos(ABA_2)$ devine $\cos^2(B - C) = \sin^2 C + \cos^2 B - 2\sin C\cos B\sin(B - C)$ relaţie adevărată B şi C fiind unghiuri oarecare.

3. Să alegem o altă categorie de *triunghiuri tip* astfel ca laturile triunghiului tip să fie exprimate raţional în funcţie de cele două numere care să caracterizeze forma triunghiului şi *în scopul de a evita dublul semn dinaintea radicalului*.

Pentru aceasta notăm $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{m_1}{m_2} = m$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{n_1}{n_2} = n$, unde m şi n sînt numere reale şi pozitive.

Avem $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{1 - mn}{m + n} > 0$ deci trebuie să avem şi $mn < 1$. Dacă m sau n este supraunitar atunci unghiul A sau B este obtuz. Dacă m şi n sînt ambele pozitive şi subunitare unghiul C este obtuz dacă $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1 - mn}{m + n} > 1$, adică $m + n + mn < 1$.

Triunghiul este ascuţitunghi cînd pe lîngă $m > 0$, $n > 0$, $mn > 1$ se adaugă condiţia $m + n + mn > 1$.

Dacă notăm $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{p_1}{p_2} = p$, relaţia cunoscută

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

ne dă relaţia de condiţie dintre numerele pozitive m, n şi p care este:

$$mn + np + pm = 1.$$

Cu notaţiile de mai sus rezultă:

$$\sin A = \frac{2m}{1+m^2}, \quad \sin B = \frac{2n}{1+n^2}, \quad \sin C = \frac{2p}{1+p^2};$$

$$\cos A = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \text{ etc}; \quad \operatorname{tg} A = \frac{2m}{1-m^2}, \text{ etc} \ldots$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+m}} \text{ etc.}$$

Putem lua ca *triunghi tip* triunghiul de laturi $a = m(1+n^2).(1+p^2)$, $b = n(1+m^2)(1+p^2)$ şi $c = p(1+m^2)(1+n^2)$ adică proporţionale cu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. În acest caz rezultă:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{1}{4}(1+m^2)(1+n^2)(1+p^2),$$

$$S = mnp(1+m^2)(1+n^2)(1+p^2),$$

$$h_a = 2np(1+n^2)(1+p^2), \; h_b = \ldots, h_c = \ldots$$

4. Folosind notaţiile $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = m$ etc. ..., putem stabili unele relaţii algebrice folosind relaţii din trigonometrie.

Exemple: 1° Relaţia

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

devine:

$$\frac{m^2}{1+m^2} + \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{p^2}{1+p^2} = 1 - \frac{2mnp}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)(1+p^2)}}$$

m, n, p fiind pozitive şi $mn + np + pm = 1$.

2° *Relaţia*

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

în aceleaşi condiţii devine:

$$\frac{m}{1-m^2} + \frac{n}{1-n^2} + \frac{p}{1-p^2} = \frac{4mnp}{(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)}.$$

3° Dacă plecăm de la inegalitatea

$$9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

obţinem

$$9(1+m^2)^2(1+n^2)^2(1+p^2)^2 \geqslant 16\,\Sigma\,[m^2(1+n^2)^2(1+p^2)^2]$$

sau

$$\frac{9}{16} \geqslant \frac{m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2} + \frac{p^2}{(1+p^2)^2}$$

unde $mn + np + pm = 1$. *Reciproc* ţinînd seamă că $\sin A = \frac{2m}{1+m^2}$ ne putem întoarce la trigonometrie obţinînd inegalitatea

$$\frac{9}{4} \geqslant \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

Dacă în inegalitatea în m, n, p înlocuim $m = \frac{1}{x}$; $n = \frac{1}{y}$ şi $p = \frac{1}{z}$ obţinem

$$\frac{9}{16} \geqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$$

aceiaşi inegalităţate, unde $x + y + z = xyz$, deci inegalitatea este mai generală.

4° La fel relaţia cunoscută

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

devine:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$

unde x, y, z sint *pozitive* şi îndeplinesc una din condiţile $xy + yz + zx = 1$ sau $x + y + z = xyz$.

5° *Inegalitatea*

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geqslant 9 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

devine $m + n + p > 9\,mnp$, unde m, n, p sînt pozitive şi $mn + np + pm = 1$ sau $xy + yz + zx \geqslant 9$, dacă x, y, z sînt numere pozitive şi $x + y + z = xyz$.

Alte aplicaţii interesante pot forma enunţul unor probleme propuse.

5. Stabilirea unor inegalităţi între diferite elemente ale unui triunghi se mai poate face, plecînd mai ales de la inegalităţi algebrice mai generale.

Cîteva exemple. 1° Fie inegalitatea cunoscută:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 6$$

oricare ar fi x, y, z numere pozitive.

Notînd $x = r = \frac{S}{p-a}$; $y = \frac{S}{p-b}$ şi $z = \frac{S}{p-c}$,

avem:

$$\frac{p-b}{p-a} + \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-b}{p-c} + \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-a}{p-c} \geqslant 6$$

sau

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 \geqslant 6(p-a)(p-b)(p-c) = 6Sr$$

2° *Inegalitatea*

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 > r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c,$$

ţinînd seamă că $r_a r_b + r_b r_c + r_b r_a = p^2$, devine

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 > p^2$$

3° Dacă a, b, c sînt numere *pozitive* evident că

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geqslant 0$$

şi care se mai poate scrie $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9\ abc$.

Înlocuim pe $a=r_a$, $b=r_b$, $c=r_c$ şi mai ţinînd seama că $r_a r_b r_c=p^2r$; $r_a r_b+r_a r_c+r_c r_a=p^2$ şi $r_a+r_b+r_c=4R+r$ obţinem şi inegalitatea $R\geqslant 2r$. Idem, notînd $a=p-a$, $b=p-b$, $c=p-c$.

Tot din inegalitatea de mai sus punînd $a=h_a$, $b=h_b$, $c=h_c$ rezultă inegalitatea cunoscută $h_a+h_b+h_c\geqslant 9\ r$.

Aplicaţii analoage am mai dat la rezolvarea *problemei* 677 din G.M.F-B, septembrie 1953 şi la *problema* 847 în G.M.F.-B din ianuarie 1954, sau la rezolvarea *problemei* 1606 din aprilie 1956.

6. Am văzut că notînd $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=m$ şi $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=n$ putem exprima raţional în funcţie de m şi n sinusurile, cosinusurile, tangentele unghiurilor A, B, C, aria triunghiului tip ABC etc.

Ştim că bisectoarele unui triunghi se exprimă în funcţie de sinusul sau cosinusul *jumătăţilor de unghi* care deşi conţin în expresia lor $\sqrt{1+m^2}$ şi $\sqrt{1+n^2}$; totuşi expresiile $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ şi $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ *sînt raţionale.*

Pentru a avea *raţională* şi cantitatea $\sqrt{1+m^2}$, notînd $m=\frac{m_1}{m_2}$, unde m_1 şi m_2 sînt *întregi*, este necesar ca $m_1^2+m_2^2$ să fie patrat perfect, ori acesta este posibil dacă avem $m_1=p_1^2-q_1^2$ şi $m_2=2\,p_1q_1$, unde $p_1>q_1$, m fiind *pozitiv*. Analog notăm $n=\frac{p_2^2-q_2^2}{2p_2q_2}$.

Dacă am notat $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{m_1}{m_2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{n_1}{n_2}$ rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{m_2n_2-m_1n_1}{m_1n_2+m_2n_1};$$

m_1, m_2, n_1, n_2 *fiind întregi* şi $m_2n_2>m_1n_1$. Mai rezultă

$$\sin A=\frac{2m_1m_2}{m_1^2+m_2^2};\qquad \cos A=\frac{m_2^2-m_1^2}{m_1^2+m_2^2};$$

analog pentru $\sin B$ şi $\cos B$.

$$\sin C=\frac{2(m_1n_2+m_2n_1)(m_2n_2-m_1n_1)}{(m_1^2+m_2^2)(n_1^2+n_2^2)}$$

$$\cos C=\frac{4m_1m_2n_1n_2-(m_1^2-m_2^2)(n_1^2-n_2^2)}{(m_1^2+m_2^2)(n_1^2+n_2^2).}$$

Ţinînd seamă că putem considera *triunghiul tip* ABC cu laturile

$$a = m(1 + n^2); \quad b = n(1 + m^2), \quad c = (m + n)(1 - mn), \quad p = m + n,$$

$$R = \frac{1}{4}(1 + m^2)(1 + n^2).$$

$$S = mn(m + n)(1 - mn); \quad r = mn(1 - mn); \quad r_a = m(m + n);$$

$$r_b = n(m+n); \quad r_c = 1 - mn; \quad h_a = 2n(m + n)(1 - mn): \ (1 + n^2);$$

$$h_b = 2m\ (m+n)(1 - mn): \ (1 + m^2); \quad h_c = 2mn.$$

Înlocuind cum am arătat mai sus:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = m = \frac{m_1}{m_2}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = n = \frac{n_1}{n_2} \text{ şi } m_1 = p_1^2 - q_1^2, \quad m_2 = 2p_1q_1$$

şi analoagele, cu notaţiile m_1, m_2, n_1 şi n_2 putem considera *triunghiul tip* cu laturile

$$a = m_1m_2(n_1^2 + n_2^2); \quad b = n_1n_2(m_1^2 + m_2^2); \quad c = (m_1n_2 + n_1m_2)(m_2n_2 - m_1n_1);$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2)(n_1^2 + n_2^2).$$

$$S = \frac{abc}{4R} = m_1m_2n_1n_2(m_1n_2 + n_1m_2)(m_2n_2 - m_1n_1)$$

$$p = m_2n_2(m_1n_2 + m_2n_1); \quad r = \frac{S}{p} = m_1n_1(m_1n_2 - m_1n_1);$$

$$r_a = \frac{S}{p - a} = m_1n_2(m_1n_2 + m_2n_1); \quad r_b = n_1m_2(m_1n_2(m_1n_2 + m_2n_1)$$

$$r_c = m_2n_2\ (m_2n_2 - m_1n_1), \text{ etc.}$$

Se observă că dacă am ales numerele *întregi* m_1, m_2, n_1, n_2, astfel ca $m_2n_2 > m_1n_1$ toate elementele triunghiului a, b, c, p, r, r_a, r_b, r_c S sînt numere întregi, iar R va fi un întreg dacă m_1, m_2, n_1, n_2 sînt numere *pozitive*.

Dacă ţinem seamă şi de notaţiile în p şi q avem:

$$R = \frac{1}{8}(p_1^2 + q_1^2)^2(p_2^2 + q_2^2)^2; \text{ iar din } \sin C > 0 \text{ rezultă}$$

condiţia $|p_1q_2 + p_2q_1| > |p_1p_2 - q_1q_2|$
adică $mn < 1$, m şi n fiind *pozitive*. Efectuînd calculele obţinem

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1 - mn}{m + n} = \frac{(p_1p_2 + p_2q_1)^2 - (p_1p_2 - q_1q_2)^2}{2(p_1q_2 + p_2q_1)^2(p_1p_2 - q_1q_2)} > 0$$

$$\sqrt{1 + m^2} = \frac{p_1^2 + q_1^2}{2p_1q_1}; \quad \sqrt{1 - m^2} = \frac{\sqrt{(2p_1q_1 + p_1^2 - q_1^2)(2p_1q_1 - p_1^2 + q_1^2)}}{2p_1q_1};$$

$$\sin A = \frac{4p_1q_1(p_1^2 - q_1^2)}{(p_1^2 + q_1^2)^2}; \quad \cos A = \frac{(2p_1q_1 + p_1^2 - q_1^2)(2p_1q_1 - p_1^2 + q_1^2)}{(p_1^2 + q_1^2)^2}$$

$$\sin C = \frac{4(p_1q_2 + p_2q_1)(p_1p_2 - q_1q_2)[(p_1q_2 + q_1p_2)^2 - (p_1p_2 - q_1q_2)^2]}{(p_1^2 + q_1^2)^2(p_2^2 + q_2^2)^2}$$

Laturile fiind proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse pentru noul *triunghi tip* putem să luăm:

$$a = p_1q_1\ (p_1^2 - q_1^2)\ (p_2^2 + q_2^2)^2.$$

$$b = p_2q_2\ (p_2^2 - q_2^2)\ (p_1^2 + q_1^2)^2$$

$$c = (p_1q_2 + q_1p_2)\ (p_1p_2 - q_1q_2)\ [(p_1q_2 + q_2p_1)^2 - (p_1p_2 - q_1q_2)^2]$$

$$S = \frac{abc}{4R} = 2\,p_1q_1\,p_2q_2\,(p_1^2 - q_1^2)\,(p_2^2 - q_2^2)\,c$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{4p_2q_2\,(p_2^2 - q_2^2)\,c}{(p_2^2 + q_2^2)^2}\ ;\ h = \frac{4p_1q_1\,(p_1^2 - q_1^2)\,c}{(p_1^2 + q_1^2)^2}$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = 4p_1p_2\,q_1q_2\,(p_1^2 - q_1^2)\,(p_2^2 - q_2^2),\ \text{etc.}\ \ldots$$

Ținînd seamă că în acest caz $\sqrt{1 + m^2}$ se exprimă *rațional* în p și q și că bisectoarea interioară $l_a = 2\,bc\cos\frac{A}{2} : (b + c)$ și bisectoarea exterioară $l'_a = 2bc\sin\frac{A}{2} : (b - c)$ și analoagele, *rezultă că și bisectoarele triunghiurilor tip considerate sînt exprimate prin numere raționale*; dacă multiplicăm toate elementele liniare cu numitorul lor comun *obținem triunghiuri cu toate elementele exprimate prin numere întregi, inclusiv bisectoarele.*

Aplicații interesante se pot face cu numere întregi mici date literelor p și q astfel ca să avem $m_2n_2 - m_1n_1 > 0$ sau $(p_1q_2 + p_2q_1)^2 > (p_1p_2 - q_1q_2)^2$.

Rezolvitorii de probleme vor găsi și alte aplicații ca probleme propuse în cuprinsul revistei. Vom publica și *aplicațiile numerice* pe care le vor face corespondenții revistei pentru a găsi triunghiuri cu bisectoarele exprimate prin numere întregi, de preferat cu valori mici date numerelor întregi p_1, p_2, q_1 și q_2, pentru a putea mai ușor urmări calculele necesare.

MAȘINI DE CALCUL NUMERIC PE BAZĂ DE CIRCUITE ELECTRONICE

D. D. BOIANGIU,
Institutul Politehnic București

MENIREA mașinilor electronice de calcul este de a înlocui un calculator, care poate fi un contabil, un inginer sau un om de știință de o anumită specialitate. Aceasta înseamnă că o mașină electronică de calcul numeric trebuie să știe să execute în primul rînd operațiile aritmetice elementare: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea. Totodată mașina trebuie să știe să aleagă numerele de adunat și pe cele de înmulțit etc. și apoi, să știe ce să facă cu rezultatele obținute, cum să le treacă la operațiile următoare.

Așadar, persoana care efectuează calculele este înlocuită printr-un automat electronic care știe să citească, să scrie, să efectueze operații aritmetice elementare și combinațiile de calcul corespunzătoare. Este evident că acest

lucru se poate realiza numai dacă acest automat este instruit în mod corespunzător. Această instruire se realizează cu ajutorul unor dispozitive care trebuie să stabilească:

1. Care sînt cele două numere care trebuie combinate în operaţia aritmetică comandată şi unde se găsesc ele.
2. Ce operaţie aritmetică trebuie efectuată.
3. La ce foloseşte rezultatul şi unde se scrie el.
4. Ce operaţii trebuie efectuate cu rezultatul obţinut, şi anume cum.

Maşina este prevăzută în acest scop, cu:

1. Un sistem de înregistrare a numerelor şi a ordinelor din instrucţiunile necesare.
2. Un mediu pe care să se scrie.
3. Dispozitiv de scris şi pentru citit.
4. Un sistem care permite interpretarea rezultatelor obţinute.

Maşina trebuie să aibă şi proprietatea de a fi reversibilă, adică un număr sau un cuvînt citit să poată fi convertit în maşină într-o serie de mărimi (de exemplu tensiuni) care operează în circuite, şi invers.

Maşina este prevăzută cu un sistem de acumulare sau înregistrare în unităţi aritmetice şi cu un sistem centralizat de transmitere a ordinelor la organul de acumulare şi la celulele care execută operaţiile.

Schematic o maşină electronică de calcul trebuie să cuprindă:

1. Un sistem de înregistrare (de intrare) a datelor de prelucrat.
2. Un sistem de comandă şi control centralizat care dirijează operaţiile între părţile componente ale maşinii (adică trecerea datelor dintr-o parte într-alta).
3. Sisteme de acumulare.
4. Celule unităţi pentru efectuarea operaţiilor.
5. Sisteme locale de control şi comandă, anexate la sistemele de acumulare şi la celulele de efectuare a calculelor.
6. Un sistem de exprimare şi interpretare a rezultatelor finale pe care trebuie să le dea maşina.

Din acestea rezultă că într-o astfel de maşină trebuie să se introducă concomitent, numere, ordine şi pentru anumite operaţii, şi cuvinte. Toate numerele, ordinele şi cuvintele se introduc în maşină în mod codificat, adică totul se transformă în cifre. Maşina este astfel dispusă, încît în timpul lucrului numerele merg la locul numerelor din dispozitivele de înregistrare şi de acumulare, ordinele sînt conduse la sistemul de comandă şi control, iar cuvintele transformate în cifre, sînt înregistrate la locul lor, în sistemele de înregistrare.

În acest mod în maşină totul devine convenţional şi este interpretat pe baza codului stabilit de la început, adică înainte de a se introduce informaţiile şi datele de prelucrat în maşină. Putem preciza chiar şi mai mult: sistemul de codificare se stabileşte de cele mai multe ori încă la proiectarea şi construirea maşinii în fabrică.

O primă chestiune care trebuie lămurită este aceea a reprezentării şi transmisiei numerelor în maşină. În această privinţă există mai multe sisteme, care diferă între ele, determinînd construcţia diferită a maşinilor; evident, la baza lor stă şi sistemul de codificare şi înregistrare a numerelor. Astfel:

A. — Înregistrarea şi transmisia cifrelor unui număr se face direct pe coloanele sale. O coloană este folosită pentru unităţi, alta pentru zeci, alta pentru sute etc, iar informaţiile se transmit de-a lungul coloanelor.

Acest sistem de înregistrare şi transmisie a cifrelor pe coloane realizează o operaţie în paralel şi transmite toate cifrele în acelaşi timp.

B. — Toate cifrele se înregistrează şi se transmit pe una şi aceiaşi coloană. Ele se separă în ordinea lor: unităţi, zeci, sute, mii etc, prin timpul lor de sosire la linia comună. La acest sistem se foloseşte înregistrarea în serie.

Un număr oarecare este introdus în maşină prin acelaşi număr de impulsuri de tensiune. Prin impuls se înţelege creşterea bruscă şi foarte scurtă a tensiunii în reţea. Pentru sistemul de scriere obişnuită a numerelor în sistemul de numeraţie, adică cel zecimal, s-au realizat o serie de dispozitive, dintre care însă unele au fost părăsite, fiind complicate.

Deoarece citirea numărului se poate face chiar pe tuburile electronice ale maşinii, care sînt aprinse sau stinse, deci există numai două semne distincte, s-a stabilit că este mult mai convenabilă scrierea în sistemul de numeraţie binar, în care semnele sau cifrele distincte sînt 1 şi 0, corespunzînd poziţiilor « stins » sau « aprins » ale tubului. Oricare număr din sistemul zecimal poate fi scris şi în sistemul binar. Trecerea dintr-un sistem de numeraţie în altul se realizează automat. Dacă se ia, spre exemplu, numărul 27, avem:

$$27 = 7 + 2 \cdot 10 \text{ — în sistemul zecimal;}$$

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 \text{— în sistemul binar,}$$

Numărul se poate scrie:

$$27 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

În sistemul binar numărul 27 se scrie: 1·1·0·1·1·

Pentru a reprezenta un număr pe cale electrică sau electronică se trimite un tren de impulsuri succesive, care reprezintă cifrele zero sau unu din sistemul de numeraţie binar. Această reprezentare corespunde sistemului (*B*) de înregistrare, adică pe o singură coloană.

Prezenţa impulsului reprezintă cifra 1, iar absenţa ei cifra 0. Timpul de înregistrare pe o singură coloană (sau linie) pare să fie mai mare decît la transmisia şi înregistrarea în paralel. Dacă se ţine seama însă că între două impulsuri succesive este necesar un interval de timp de 0,5 microsecunde şi că un număr din zece cifre din sistemul zecimal se scrie cu 35 cifre în sistemul binar, ceea ce necesită 17,5—18 microsecunde, se deduce că viteza de scriere este foarte mare, iar timpul de înregistrare a numerelor este atît de mic încît practic nu se pot introduce în maşină atît de multe numere, încît să fie ocupată complet.

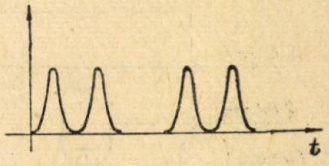


Fig. 1. Tren de impulsuri

Din această cauză o astfel de maşină este prevăzută cu o serie de dispozitive de înregistrare auxiliare, care efectuează înregistrarea, adică introducerea datelor în maşină în ritmul obişnuit şi accesibil operatorilor care fac înregistrarea. Toate aceste dispozitive centralizează datele în maşina electronică de calculat, care abia pe urmă lucrează cu viteza ei, pe care am menţionat-o, şi în fine dă rezultatele la dispozitivele de ieşire, exprimîndu-le de asemenea într-o viteză accesibilă.

Cele mai moderne sisteme fixează informaţiile în dispozitive de memorizare. Rezultă că există două feluri de dispozitive de memorizare: unele pentru viteze mici, altele pentru viteze foarte mari. Primele se numesc dispozitive de memorie statică, iar celelalte, dispozitive de memorie dinamică.

Reprezentarea cifrelor 0 şi 1 cu ajutorul tuburilor electronice

În maşină trebuie reprezentate numerele cu care se operează în sistemul de numeraţie binar, la locul lor, prin două poziţii, care să corespundă la fiecare loc cifrelor 0 şi 1. Pentru aceasta se foloseşte *circuitul simetric basculant*. Acest circuit (fig.2) este cunoscut şi sub numele de montaj simetric cu două tuburi în contra timp Ecles-Jordan. Din montajul indicat rezultă că fiecare grilă este cuplată la placa opusă ei.

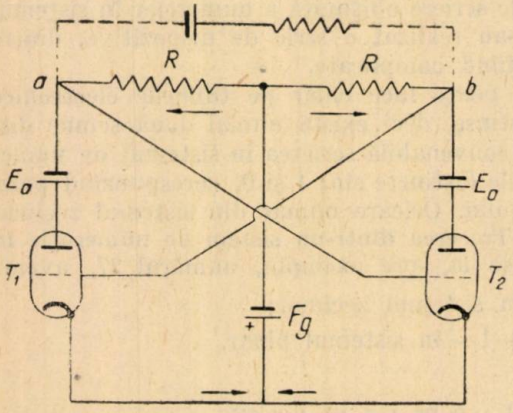


Fig. 2. Circuitul basculant

În circuitul indicat să presupunem că tubul T_1 conduce, iar tubul T_2 nu conduce curent. Dacă aplicăm în *a* un impuls pozitiv, acesta va acţiona atît la placa tubului T_1 cît şi la grila tubului T_2. Dacă grila tubului T_2 primeşte un impuls pozitiv, curentul anodic în T_2 trece de la valoarea zero spre o valoare pozitivă şi provoacă în acelaşi timp o scădere a potenţialului tubului T_2, deci şi a grilei tubului T_1 ceea ce determină scăderea curentului anodic în tubul T_1.

Scăderea potenţialului tubului T_1 şi a curentului anodic în T_1 face să crească potenţialul tubului T_2. Avem astfel, o acţiune acumulativă care nu se opreşte decît la ieşirea din funcţiune a tubului T_1, astfel încît T_1 nu conduce, iar T_2 conduce. În acest mod, cu ajutorul unui impuls aplicat în *a*, s-a realizat schimbarea (bascularea) din funcţie a celor două tuburi. Această basculare a funcţiunii tuburilor corespunde în sistemul binar de numeraţie, cu trecerea de la cifra 0 la cifra 1.

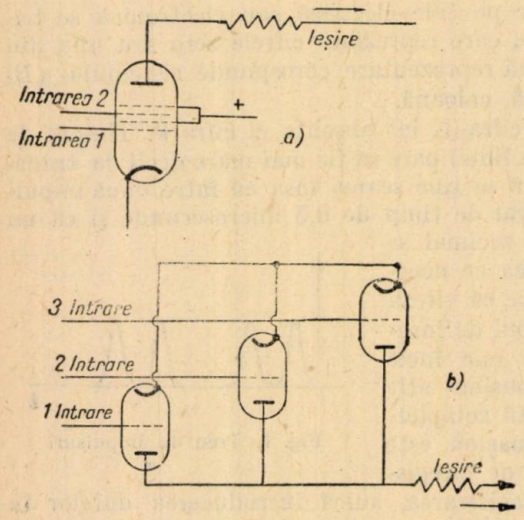


Fig. 3. *a*) Poartă de sontrol cu înpulsuri pozitive
b) Poartă de control pentru înpulsuri negative

Combinînd un şir de astfel de circuite simetrice basculante, realizăm tot atîtea locuri pentru semnele cifrelor scrise în sistemul binar. Un astfel de şir formează aşa-numitul registru. Scrierea în registru şi apoi citirea registrului se realizează introducînd în circuitele acestea, aşezate în serie, un tren de impulsuri corespunzător numărului scris în sistemul binar.

Pentru ca înregistrarea să fie făcută corect, adică fiecare cifră să fie aşezată la locul ei corespunzător, maşina electronică de calcul numeric este prevăzută cu un sistem de comandă şi control.

Sistemul de comandă şi control cuprinde un număr de dispozitive, denumite porţi şi tampoane, precum şi aşa-numitele sisteme de întîrziere. Să vedem ce este şi ce face fiecare din aceste dispozitive.

Poarta este un dispozitiv electronic, un circuit cu două intrări şi o ieşire. Dispozitivul permite de regulă ieşirea unui impuls (semnal), numai dacă există două semnale corespunzătoare (impulsuri) de semn corespunzător la cele două

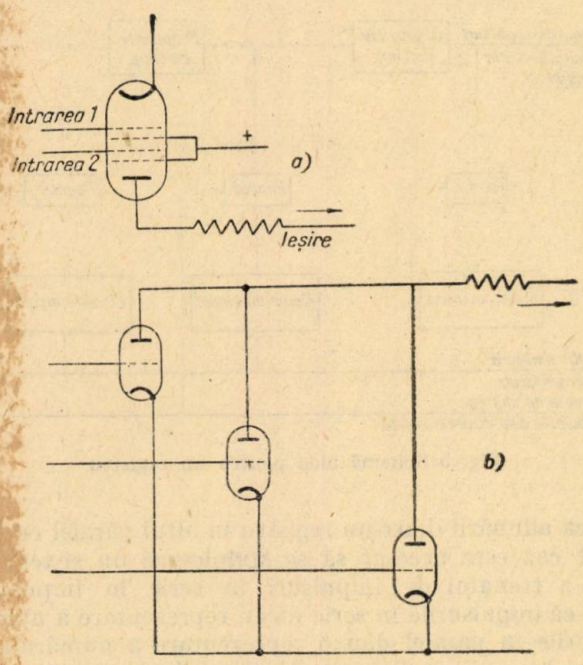


Fig. 4 *a*) Tampon peutru impulsuri negative
b) Tampon pentru impulsuri pozitive

circuite de intrare. Poarta îndeplineşte o funcţiune logică ce se poate exprima sub forma: este posibil, dacă avem şi un lucru (semnal) şi altul.

În fig.3 sînt reprezentate cîteva scheme de porţi caracterizate prin semnul impulsului.

Tamponul este de asemenea o poartă, adică un dispozitiv electronic, un circuit, care dă însă ieşirea unui semnal (impuls) la apariţia numai a uneia din posibilităţi de semnale (impulsuri) de la intrare. Un tampon îndeplineşte o funcţiune logică ce se poate exprima sub forma: este posibil, dacă avem fie un semnal, fie altul.

În fig.4 sînt reprezentate schemele unor tampoane obişnuite, de la maşinile de calculat.

Înregistrarea numerelor în maşină în vederea operaţiilor

Pentru a efectua operaţiile aritmetice elementare, trenul de impulsuri trebuie să fie înregistrat şi transformat în numere. După cum am menţionat, această operaţie o realizează un ansamblu de dispozitive. Un generator de impulsuri dă după comandă (informaţie) trenul de impulsuri corespunzător,

porţile şi tampoanele permit — dacă este cazul — înregistrarea, iar sistemele de întîrziere (de timp) sincronizează operaţia de înregistrare. Înregistrarea trenului de impulsuri se realizează în serie. Pentru efectuarea operaţiilor aritmetice (acest lucru se vede mai clar la adunare), se foloseşte transmisia în paralel pe coloane de acelaşi ordin, pentru a realiza astfel uşor, o înmagazinare a numărului într-un registru static sau pur şi simplu pentru transferul sem-

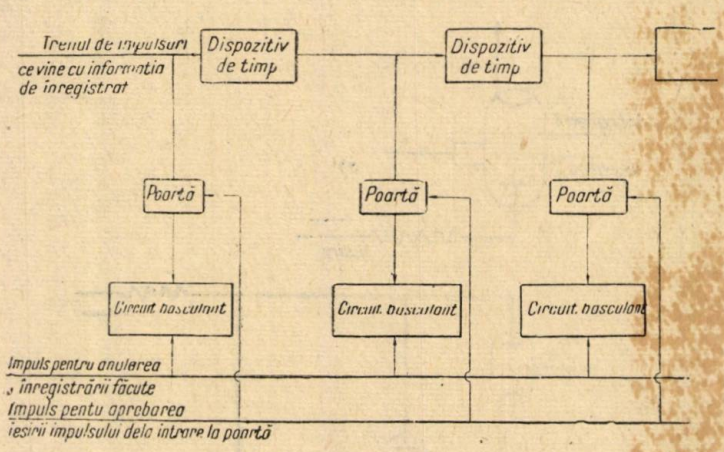


Fig. 5 Schemă bloc pentru un registru

nalelor în vederea adunării dintr-un registru în altul paralel cu primul şi situat sub el. În acest caz este necesar să se stabilească un sistem de înregistrare şi transformare a trenului de impulsuri în serie în impulsuri în paralel.

Remarcăm, că impulsurile în serie dau o reprezentare a numărului în timp, pe cînd impulsurile în paralel dau o reprezentare a numărului în spaţiu pe coloane şi ordine de mărime. Schema din fig. 5 înlesneşte înţelegerea funcţionării maşinii.

Trenul de impulsuri trece prin toate dispozitivele de timp care, au rolul de a întîrzia corespunzător cu un timp foarte mic (cîteva microsecunde) şi în acelaşi timp de a sincroniza semnalul care trebuie dus la poartă. Semnalul sosit la poartă nu poate acţiona circuitul basculant decît în momentul cînd apare impulsul comun, simultan la toate porţile, care dă aprobarea de ieşire a impulsului corespunzător din poartă. În momentul aprobării toate circuitele basculante sînt puse pe una din cele două poziţii care corespund fie cifrei 1, fie cifrei 0. Dacă nu mai este nevoie de numărul format în registru, se poate anula totul cu un impuls de anulare. Menţionăm că există multe variante de înregistrare a numerelor în registru. Indicată este o variantă simplă şi uzuală, care se foloseşte la multe tipuri de maşini electronice, cunoscută sub numele de înregistrare, sau memorie statică.

În maşinile electronice moderne se folosesc şi dispozitive de memorie dinamică, ce reţin informaţiile sub formă de trenuri de impulsuri în mişcare continuă şi care sînt denumite registru dinamic. Practic acest lucru se realizează alimentînd cu impulsuri un dispozitiv de întîrziere; impulsurile ieşite şi amortizate sînt simplificate şi reintroduse în circuit.

Maşina de acest tip conţine: un generator de impulsuri, un receptor, un registru static, dispozitivele (celulele aritmetice) pentru operaţiile aritmetice

elementare, urmate de registru static şi registru dinamic şi din nou circuitul de la capăt. Toate aceste părţi sînt legate între ele prin dispozitive de comandă şi control. Memoria dinamică se poate realiza şi prin transformarea impulsurilor electronice în unde acustice, sau unde ultrasonore, în interiorul unei coloane (tank) de mercur, prevăzută la ambele capete cu un cristal de recepţie şi unul de emisie.

Pentru realizarea operaţiilor aritmetice elementare (adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea) este suficient să se poată realiza adunarea. Acest

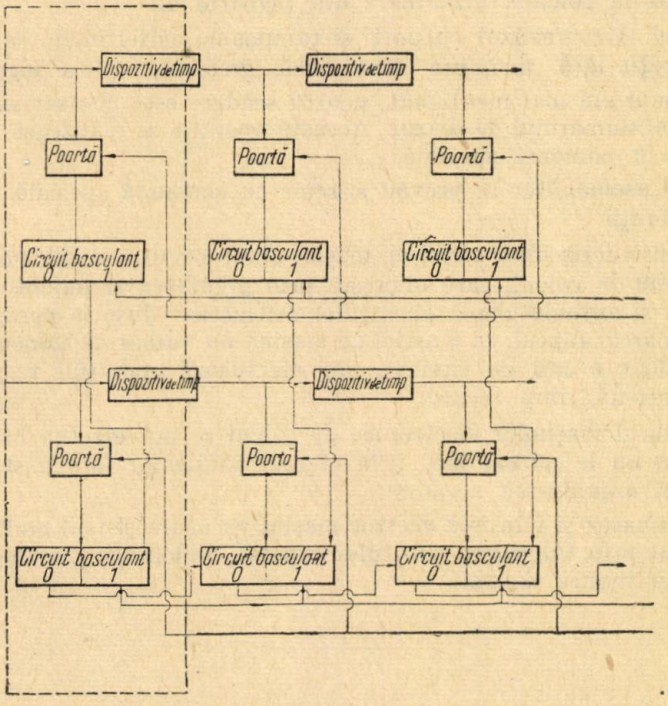


Fig. 6 Schemă bloc cu două registre pentru adunare

lucru este posibil, deoarece scăderea se poate realiza prin adunarea complimentului aritmetic, înmulţirea prin adunare repetată, iar împărţirea prin scădere repetată.

La vitezele de lucru ale tuburilor electronice, timpul necesar pentru repetarea acestor operaţii nu contează, deoarece se realizează o rapiditate de calcul pe care nici un alt tip de maşină nu-l poate realiza.

Pentru a înţelege operaţia de adunare a două numere trebuie să explicăm operaţia de adunare a două cifre. Mai întîi să arătăm că pentru a aduna două cifre este necesar să introducem în maşină două cifre. La sistemul binar acest lucru necesită două trenuri de impulsuri.

Dacă pe o coloană suma celor două impulsuri este mai mare decît 1, este absolut necesar să se genereze un impuls la coloana următoare. Aşadar, la intrarea într-o celulă de adunare trebuie să existe trei intrări.

În fig. 6 se poate vedea schematic cum se realizează acest lucru. În primul rînd avem două registre, în care se înregistrează separat cele două numere.

În registrul A se înregistrează un număr, iar în registrul B, celălalt. În registrul A un număr poate fi stabilit fie prin cifra 0, fie prin cifra 1 — respectiv o poziţie sau alta a circuitului balansor. În mod asemănător avem înregistrarea în B. La adunare trebuie să transferăm impulsul din registrul A în registrul B.

Impulsul pornit din A spre B poate găsi în celula registrului B cifra 0; în acest caz va trece datorită impulsului, pe poziţia cifrei 1. Dacă impulsul din A va găsi în B poziţia 1, sistemul este dispus astfel, încît impulsul să fie transferat la coloana următoare din registrul B.

Sistemul este prevăzut cu porţi şi tampoane, astfel încît realizează toate aceste operaţii fără nici cea mai mică greşeală, cu o logică perfectă.

După cum am mai menţionat, pentru scădere este necesar să introducem complimentul numărului de scăzut. Această operaţie se realizează de asemenea automat, prin comenzi speciale.

În mod asemănător se prevăd sisteme cu comandă specială pentru toate celelalte operaţii.

Prin construcţia unor astfel de maşini omul a reuşit să înlocuiască aportul mintal necesar la calcul, care oboseşte prin greutatea şi monotonia lui, prin mecanizarea şi automatizarea operaţiilor aritmetice duse la perfecţiune. Este demn de remarcat faptul, că o astfel de maşină nu numai că înlocuieşte munca a sute şi chiar a mii de oameni, dar efectuează operaţiile respective fără greşeli şi într-un timp record.

Cu ajutorul maşinilor electronice de calcul se pot efectua lucrări de calcule pe care nu le putem face prin efortul oamenilor fără a strecura erori, oricum ar fi organizarea acestora.

Perfecţionarea şi folosirea acestor maşini va uşura şi mai mult construcţia societăţii noi prin înlocuirea efortului repetat, îndelungat, monoton şi greu al omului cu munca maşinii.

NOTE MATEMATICE

O demonstraţie geometrică a formulei lui Mollweide

Considerăm triunghiul oarecare ABC şi prelungim pe BC pînă în P astfel ca $AC = PC$.

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle CAP = \frac{C}{2}$$

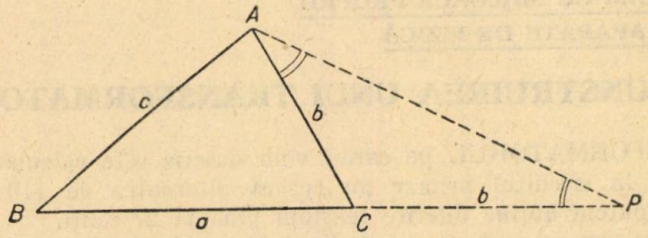
Aplicînd teorema sinusului în triunghiul BAP obţinem:

$$\frac{a+b}{\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)} = \frac{c}{\sin\frac{C}{2}} \quad \text{sau} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}};$$

însă

$$\frac{C}{2} = 90 - \left(\frac{A+B}{2}\right), \quad \text{deci}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(A + 90 - \frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(90 + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$



adică formula lui Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

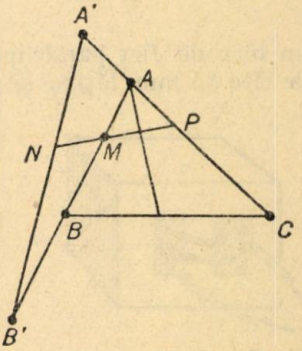
A. Năbădan, Timişoara

Generalizarea problemei 2540

Într-un triunghi oarecare ABC se iau pe laturile AB şi CA, respectiv de la A spre B şi de la C spre A, în prelungire, punctele B' şi A' astfel ca $\frac{AA'}{BB'} = k = \frac{MA}{MB}$, *punctul M aflîndu-se pe AM.*

Perpendiculara din M pe bisectoarea unghiului A taie pe $A'B'$ în N. Să se arate că:

$$\frac{NA'}{NB'} = k.$$



Soluţie. Aplicînd teorema lui Menelaus pentru triunghiul $AA'B'$ tăiat de transversala MNP, $P = (MN; AC)$ avem:

$$\frac{NA'}{NB'} \cdot \frac{PA}{PA'} \cdot \frac{MB'}{MA} = 1. \qquad (1)$$

Dar cum $MA = PA$, relaţia (1) devine:

$$\frac{NA'}{NB'} \cdot \frac{MB'}{PA'} = 1. \qquad (2)$$

Din relaţiile din enunţ putem scrie $AA' = k_0 BB'$ şi $AP = k \cdot MB'$ cum $AM = AP$, apoi adunînd obţinem $A'P = kB'M$.

Înlocuind în (2) obținem

$$\frac{NA'}{NB'} \cdot \frac{1}{k} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{NA'}{NB'} = k.$$

În cazul particular $k = 1$ se obține punctul 1 din problema 2540 propusă de prof. C. Ionescu-Țiu.

C. Bulucea, elev R. Vîlcea,

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI TRANSFORMATOR

TRANSFORMATORUL pe care-l vom descrie este calculat astfel, încît să primească în circuitul primar un curent alternativ de 110 volți, iar în secundar să putem obține diferite tensiuni pînă la 27 volți.

Miezul de fier se confecționează din table subțiri izolate între ele pentru a evita curenții Foucault. Tablele de fier (tole) trebuie să aibă o grosime de 0,25—0,30 mm. Din această tablă vom tăia tolele după modelul indicat în fig. 1, unde dimensiunile sînt date în milimetri. Numărul lor depinde de grosimea tablei folosite. Întregul miez de fier inclusiv păturile izolatoare alcătuite din fășii de hîrtie subțire îmbibate cu lac izolator, trebuie să aibă o grosime de 102 mm. Asamblarea miezului este mai ușoară dacă hîrtia izolatoare este lipită de tablă. Între două table consecutive avem nevoie de o singură hîrtie izolatoare.

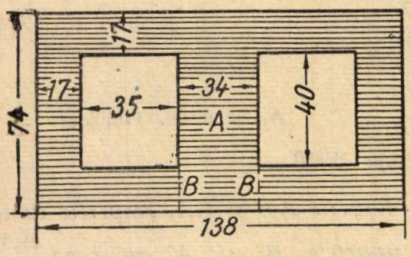


Fig. 1. — Dimensiunile tolelor miezului de fier.

Dacă s-a lucrat cu îngrijire se capătă un bloc de fier paralelipipedic cu fețe netede (fig. 2), avînd două deschideri de cîte 35 mm. lățime și 40 mm înălțime despărțite de o coloană A de 34 mm lățime. Pe această coloană, miezul propiu zis, se vor face ambele bobine suprapuse. Deoarece este dificil să se bobineze sîrma direct pe miez ne folosim în acest scop de un mosorél de mărime corespunzătoare, care ulterior va fi montat pe coloana A.

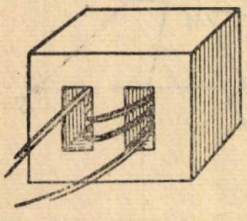


Fig. 2. — Forma miezului de fier.

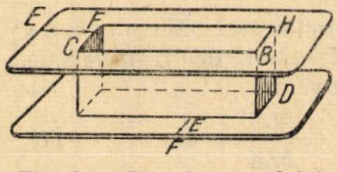


Fig. 3. — Planul mosorelului.

Mosorelul de secțiune dreptunghiulară peste care vom înfășura sîrma (fig. 3) se confecționează din carton subțire avînd următoarele dimensiunii: lungimea deschiderii interioare $BC = 115$ mm, lățimea deschiderii interioare $AB = 36$ mm, adîncimea deschiderii interioare $AD = 39$ mm. Lățimea flanșelor $EF = 33$ mm.

Tiparul mosorelului este arătat în fig. 4, partea haşurată constituie un surplus de material care se îndoaie în unghi drept şi se lipeşte de flanşe fixînd capacele (fig. 5).

Pentru a evita turtirea mosorelului este bine ca înainte de bobinare să se introducă în deschiderea centrală o bucată de lemn de aceiaşi dimensiune cu deschiderea, dar cu lungimea ceva mai mare, pentru a putea fi scoasă apoi.

Înaintea de bobinare se acoperă toate părţile mosorelului cu un strat gros de lac izolator. Pentru aceasta se lăcuieşte de două

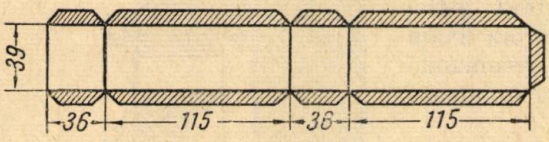


Fig. 4. — Tiparul mosorelului.

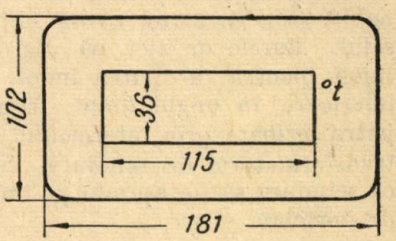


Fig. 5. — Dimensiunile capacelor mosorelului.

ori. După uscarea lacului putem începe bobinarea în circuitul secundar, pentru ca sîrma mai groasă să fie spre interior.

Pentru circuitul secundar mai avem nevoie de circa 30—35 metri de sîrmă de cupru izolată, cu grosimea de 2mm. Capătul sîrmei se trece printr-o gaură *t* făcută în flanşa mosorelului astfel, încît să ne rămînă un capăt liber de 30 mm care să ne permită ulterior legarea uşoară cu clemele circuitului secundar. Fiecare strat de spire se va acoperi cu un strat de lac izolator.

Pentru tensiunea amintită de 27 volţi în circuitul secundar avem nevoie de 87 spire. Dacă dorim să avem în circuitul secundar şi alte tensiuni intermediare n-avem decît să facem ramificările necesare. Cum pentru 27 volţi avem nevoie de 87 spire înseamnă că fiecare spiră din circuitul secundar ne dă $27 : 87 \simeq 0{,}31$ volţi, deci este foarte uşor să calculăm numărul de spire necesar pentru orice tensiune intermediară dorită. Ramificaţiile corespunzătoare tensiunilor dorite se realizează prin lipire cu cositor şi apoi izolate. Fiecare din ramificările făcute le trecem prin cîte o gaură a flanşei, analoagă cu gaura *t* (fig. 5), pentru ca ulterior să putem prinde aceste capete la cîte o clemă. Acelaşi lucru facem şi cu capătul ce rămîne după ce am terminat cele 87 spire.

Circuitul secundar fiind gata bobinat acoperim totul cu două rînduri de panglică de mătase peste care dăm cu lac izolator.

Peste bobinajul secundar astfel acoperit bobinăm circuitul primar care se compune din 180—200 metri de sîrmă de cupru izolată, cu grosimea de 0,8 mm.

Circuitul primar este alcătuit din 334 spire. Începutul şi sfîrşitul bobinei primare se trece de asemenea prin cîte o gaură a flanşei mosorelului. Ca şi în cazul circuitului secundar fiecare strat de sîrmă se izolează cu două straturi de lac izolator.

După terminarea circuitului primar se acoperă cu panglică de mătase şi lac izolator. Dacă s-a lucrat cu îngrijire, bobinajul va ocupa exact locul indicat de flanşele mosorelului.

Pentru a monta bobina pe miez fiecare tablă se va tăia de-a lungul liniilor punctate *BB* (fig. 1). Este preferabil ca această tăietură să fie efectuată

încă de la început. Îndoim braţele *a* şi *b* aşa cum se vede în fig.6. În felul acesta mosorelul poate fi uşor introdus pe coloana *c*, pentru ca apoi braţele *a* şi *b* să fie readuse în poziţie iniţială. Operaţia se repetă cu fiecare tablă în parte, dar vom avea grijă ca tăietura tablelor cu soţ să fie situată de o parte a mosorelului, iar cea fără de soţ de partea cealaltă a mosorelului. După ce s-a aşezat şi ultima tablă presăm întregul miez cu ajutorul a patru bare solide de fier şi a patru bolţuri de lungime convenabilă (fig. 7), astfel ca să obţinem un tot solid. Barele de fier să fie suficient de lungi pentru a putea îndoi capetele lor inferioare în unghi drept, căpătînd astfel patru picioare prin intermediul cărora fixăm transformatorul de scîndură. Se recomandă ca scîndura să fie aşezată pe mici izolatoare de porţelan.

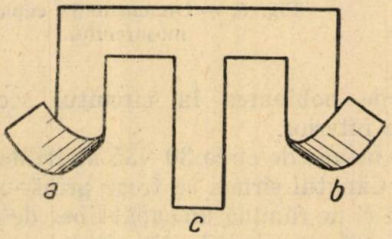


Fig. 6. — Cum se îndoaie braţele tolelor pentru a permite introducerea bobinelor.

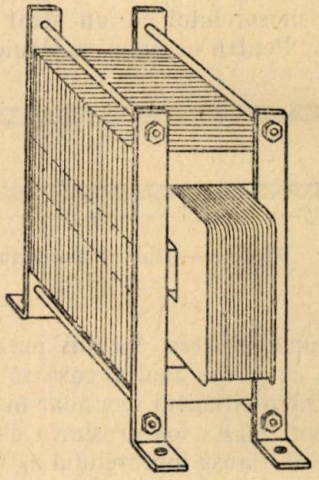


Fig. 7. — Aspectul exterior al transformatorului.

Capetele de sîrmă pe care le-am scos afară prin flanşele mosorelului se vor fixa de cleme potrivite avînd grijă să dispunem clemele circuitului primar la unul din capetele suportului şi cele ale circuitului secundar la celălalt capăt al scîndurii ce serveşte drept suport.

Dacă am făcut mai multe ramificaţii în circuitul secundar atunci vom duce începutul circuitului secundar la o clemă pe care o însemnăm cu 1, prima ramificaţie la clema 2, ş.a.m.d. Între clema 1 şi 2 vom putea avea de exemplu, 9 volţi, între clema 1 şi 3 vom avea 18 volţi, între 1 şi 4 vom avea 27 volţi, aceasta în cazul cînd am făcut ramificaţii după 28 şi 59 spire ale secundarului. Preferabil este să se lege circuitul primar al transformatorului cu un cordon pe care apoi îl putem pune la priză. De asemenea se recomandă ca între priză şi transformator să intercalăm siguranţe fuzibile calculate pentru o intensitate de 2 amperi. Trebuie să fim atenţi şi să nu lăsăm transformatorul să se încălzească prea mult încît să ardă bobinajul şi să se producă un scurt circuit. Transformatorul construit ne poate de o putere de 216 waţi, deoarece în circuitul secundar putem avea un curent de 8 amperi şi tensiune de 27 volţi, ori: 8 . 27 = 216.

Putem căpăta un transformator de putere ceva mai mică, de exemplu, 170 waţi, dacă în circuitul secundar în loc de 87 spire bobinăm numai 71 spire. În acest caz avînd în primar 110 volţi, vom obţine în secundar 22 volţi. Şi în cazul acestui transformator putem avea în secundar 8 amperi. Stabilirea tensiunii pe spiră, în secundar, şi efectuarea de ramificaţii se face în mod analog primului caz.

V. A.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Umbre mobile.** Un disc de carton de 30 cm în diametru, aşezat vertical, ne serveşte drept ecran. El este astfel montat încît se poate roti în jurul unei tije de lemn orizontale, care trece prin centrul său şi este fixată într-un suport vertical de lemn ce serveşte drept mîner pentru a se ţine aparatul.

Lipim de centrul discului o cutie de carton cilindrică cu diametrul de 5 cm şi înălţimea de 8 cm; tija orizontală străbate prin centrul fundului şi capacului cutiei, adică trce prin axul cilindrului.

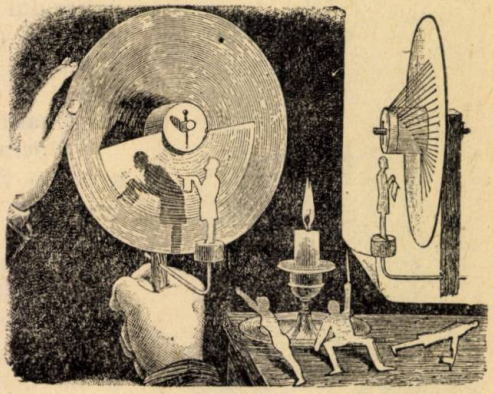


Fig. 1

Pe o jumătate din suprafaţa cilindrică a cutiei trasăm o elice plecînd de la fund şi pînă la partea ei de sus. Pe jumătatea discului corespunzător acestei elice trasăm un semicerc cu raza de 10 cm concentric cu discul. Perforăm cu ajutorul unui cui subţire, 25 de găuri în cutia cilindrică, pe urmele elicei trasate. Găurile trebuie să fie egal distanţate unele de altele. Împărţim şi semicercul în 25 părţi egale şi găurim discul în punctele de diviziune. Întindem 25 de aţe, aşa cum se vede în desenul din partea dreaptă a figurii 1. Prima aţă uneşte gaura care se găseşte la înălţimea cea mai mare pe elice, cu gaura situată la extremitatea semicercului. O altă aţă leagă a doua gaură a elicei cu cea de-a doua gaură a semicercului şi aşa mai departe, fiecare aţă făcînd cu planul diiscului un unghi din ce în ce mai mic.

Urmează partea cea mai delicată a construcţiei. Toate aţele trebuie legate între ele în aşa fel, încît să formeze o suprafaţă elicoidală continuă. Aceasta se poate realiza cu ajutorul cîtorva benzi de hîrtie lipite unele peste altele în direcţii diferite, în scopul de a obţine o suprafaţă pe cît posibil mai compactă; cu această operaţie dispozitivul este terminat.

Decupăm dintr-o carte de vizită o siluetă, de exemplu un om care stă în picioare ţinînd o pălărie în mînă. Fixăm picioarele personajului în fanta practicată într-un dop fixat printr-o sîrmă de suportul discului, după cum se vede în figură.

Ţinem cu o mînă mînerul discului, iar cu cealaltă învîrtim discul în faţa unei lumînări aprinse. Cînd partea plană a discului trece îndărătul siluetei, umbra proiectată pe disc rămîne nemişcată, însă îndată ce această umbră se apropie pe suprafaţa helicoidală vedem bustul siluetei înclinîndu-se din ce în ce mai mult înainte, pe cînd umbra picioatelor rămîne fixă, pentru că ea se proiectează pe marginea plană a discului. La fiecare rotaţie a discului vedem umbra siluetei salutînd, apoi ridicîndu-se brusc, în timp ce silueta însăşi rămîne nemişcată.

Este uşor să desenăm şi să decupăm diferite alte siluete cu care înlocuim pe prima: un înnotător care se scufundă, un trăgător care trage cu arma etc.

2. **Un fenomen de capilaritate.** Luăm două pahare identice A și B și le scufundăm într-o găleată cu apă, ținînd unul drept, iar pe celălalt răsturnat. Cînd ambele pahare sînt complet pline cu lichid le așezăm margine la margine menținînd axele lor în poziție verticală, paharul *A* dedesubt în picioare, iar paharul *B* răsturnat. Scoatem apoi paharele din găleată și după ce le lăsăm să se zvînte pe o farfurie și le ștergem bine, constatăm că paharul *B* este plin cu apă chiar dacă deplasăm ușor marginea lui așa încît să rămînă între el și paharul *A* un mic interval, al cărui rol îl vom vedea îndată. Pe piciorul paharului *B* așezăm un mic pahar *C* conținînd vin roșu (fig. 2). Vom putea trece vinul din *C* în *B*, fără a atinge vreunul din cele trei pahare și fără ca o picătură din acest vin să pătrundă în paharul *A*.

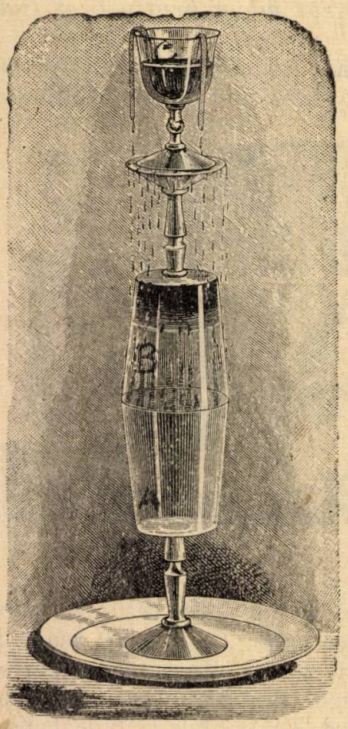


Fig. 2

Operația este evident, dublă: 1° trebuie să scoatem vinul din paharul *C*; 2° trebuie să-l trecem în paharul *B* răsturnat. Un fir de lînă muiat în vinul din paharul *C* și ale cărui extremități vor atîrna în afară, va constitui, prin capilaritatea sa, un excelent sifon. La fiecare extremitate a firului de lînă se vor prelinge picături de vin, care se vor mări din ce în ce mai mult, pînă vor cădea pe piciorul lui *B*, și de acolo se vor revărsa pe pereții acestui pahar. Astfel, vinul va curge încetișor pînă la marginea suprapusă ale celor două pahare; acolo însă, în loc să-și continue coborîrea sub acțiunea gravității, vom vedea un lucru ciudat: vinul va fi aspirat între cele două margini.

Acest fenomen se datorește capilarității și ne reamintim experiența cu lichidul care urcă între două plăci de sticlă apropiate una de alta sau în interiorul unui tub cu diametrul foarte mic. Vom vedea că vinul odată intrat în interiorul paharelor, urcă în vinișoare roșii subțiri spre partea superioară a apei din *B*, colorîndu-o cu o tentă din ce în ce mai închisă, care se degradează pe măsură ce se apropie de margine.

Prelungind suficient experiența, care decurge după cum se vede, automat, vom ajunge în cele din urmă la un rezultat neașteptat: paharul *A* va fi plin cu apă limpede, *B* plin cu un lichid roșu, iar *C* va fi complet gol.

3. **Golirea unui pahar cu ajutorul unei sticle pline.** Vi se dă un pahar plin cu apă și o sticlă de asemenea plină cu apă și vi se cere să goliți paharul cu ajutorul sticlei, fără a goli sticla! Problema pare foarte complicată. Vedeți însă, că soluția este simplă.

Faceți două găuri întrun dop și în ele fixați cu frecare, două fire de pai, unul avînd lungimea egală cu adîncimea paharului, iar celălalt avînd lungimea dublă (fig. 3 dreapta). Cu miez de pîine sau cu ceară închideți orificiul firului mic și introduceți pe celălalt în sticla plină, pînă cînd apa țîșnește prin capătul paiului mai lung.

Pentru a goli paharul este suficient să răsturnaţi sticla (fig. 3 stînga), astfel încît paiul mic să ajungă cu capătul la fundul paharului; tăiaţi acest pai cu foarfecele aproape de extremitatea astupată şi îndată din pahar începe să curgă prin paiul mai lung, pînă cînd paharul se goleşte complet, în timp ce sticla rămîne tot plină.

Care este explicaţia fenomenului? Cele două paie formează ramurile unui sifon, care nu trebuie amorsat, deoarece ramurile sale sunt pline cu lichid în timp ce o cantitate de apă se scurge prin paiul mare, ea tinde să creeze în sticlă un oarecare gol. Acest gol este imediat umplut cu o porţie egală de lichid, care intră în sticlă prin paiul mic sub influienţa presiunii atmosferice, care acţionează la suprafaţa lichidului în pahar.

Fig. 3

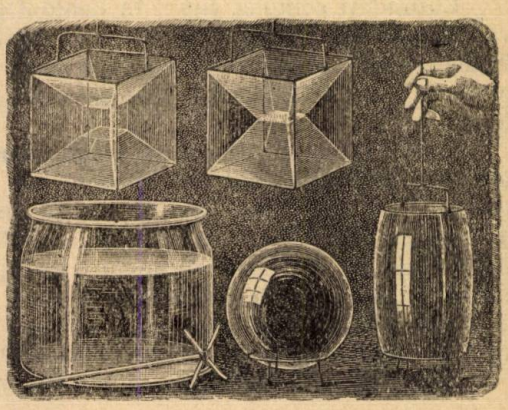


Fig. 4

4. **Metamorfoza unui balon de săpun.** Faceţi o soluţie foarte concentrată din săpun alb şi apă călduţă; trebuie să lucraţi la temperatură de aproximativ 15°. Treceţi soluţia printr-o cîrpă, pentru a separa bucăţelele de săpun nedizolvate, şi amestecaţi filtratul cu glicerină pură în proporţie de 2/5 glicerină faţă de 3/5 soluţie de săpun. Agitaţi totul bine, pentru a obţine un amestec omogen şi lăsaţi vasul să stea pînă cînd veţi vedea că se formează la suprafaţa lichidului o pojghiţă alburie. Îndepărtaţi această pojghiţă şi decantaţi lichidul într-o sticlă, pe care o astupaţi şi unde această soluţie se poate păstra oricît.

Iată cîteva experienţe foarte simple, care se pot efectua uşor cu lichidul astfel obţinut. Pentru a sufla un balon întrebuinţaţi un fir de pai pe care l-aţi despicat în patru la una din extremităţi, îndoind în unghi drept părţile despicate, după cum se vede în figura 4. Se poate lucra şi cu un tub confecţionat identic din hîrtie. Cu un astfel de tub, dacă are grosimea unui deget, veţi putea obţine baloane de mărimea capului, frumos colorate.

Confecţionaţi din sîrmă de fier groasă un mic suport, adică un inel sprijinit pe un trepied. Muiaţi inelul în lichidul glicerinei şi ataşaţi uşor de el un balon de săpun; adăpostit de curenţii de aer acesta va rămîne aşezat pe suport (v. figura), fără a se sparge, un timp destul de îndelungat.

Confecționați apoi un alt inel de sîrmă susținut de o tije verticală și care trebuie să aibă, ca și inelul trepiedului, un diametru de cca 7 cm; după ce ați muiat acest inel în lichidul gliceric preparat, apropiați-l de partea de deasupra a balonului de pe trepied și veți vedea că balonul se lipește de inelul superior cu destulă forță; cînd ridicați inelul în sus balonul de săpun ia forma unui cilindru drept sau oblic, după cum inelul de sus se află exact deasupra inelului de jos sau este deplasat față de el.

Acest cilindru revine la forma sferică, dacă coborîți progresiv mîna. Este mai mult decît curios să vezi cum un balon de săpun ia două forme geometrice diferite, ca și cum ar fi constituit dintr-o substanță maleabilă !

Puteți continua experiențele adăugînd la materialul folosit un cub de sîrmă cu latura de 7 cm, pe care-l suspendați de o tijă, după cum se vede în figură. Sîrma de fier trebuie să fie ruginită, pentru a nu avea o suprafață prea netedă.

Cufundați complet tubul în lichidul gliceric; dacă-l scoateți cu precauție vă așteaptă o surpriză: veți vedea la centru o lamă de apă foarte subțire, de formă pătrată, avînd fiecare latură unită cu latura corespunzătoare a cubului printr-o lamă lichidă, așa cum se vede la cubul din partea dreaptă, sus, a figurii.

Cînd cufundați numai fața inferioară a cubului în lichid, constatați o nouă transformare: lichidul formează în interiorul cubului de sîrmă un cub mic cu fețe din soluție de săpun și ale cărei laturi sînt unite prin plane din soluție de săpun cu laturile cubului mare; aceste plane formează cu fețele cubului mic șase trunchiuri de piramidă perfect regulate și întreaga formă ca și baloanele de săpun, prezintă colorațiile curcubeului. Spargeți cu o hîrtie sugativă una din fețele cubului mic și prima figură, în care cubul central este redus la un pătrat, reapare îndată.

Toate acestea experiențe se explică prin fenomenul tensiunii superficiale.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2352

Să se calculeze factorul de putere al unei bobine fără miez de fier avînd rezistența $R = 4{,}9$ *ohmi cînd aceasta consumă o putere de* 1000 *wați la o tensiune de* 100 *volți.*

Gh. I. Stoian

Soluție. — În acest caz, toată puterea transformîndu-se în căldură, avem:

$$P_j = I^2 R = \left(\frac{U}{R}\cos\varphi\right)^2 \cdot R = \frac{(U\cos\varphi)^2}{R}.$$

De aci rezultă:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{P_j R}}{U} = \frac{\sqrt{1000 \cdot 4{,}9}}{100} = 0{,}7.$$

Problema 2354

Într-o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a *și înălțimea* h, *se face o secțiune ce trece printr-o diagonală a bazei și face cu planul bazei unghiul* α. *Să se afle volumul piramidei ce are ca bază secțiunea făcută și ca vîrf, vîrful piramidei date* ($\alpha < 90°$).

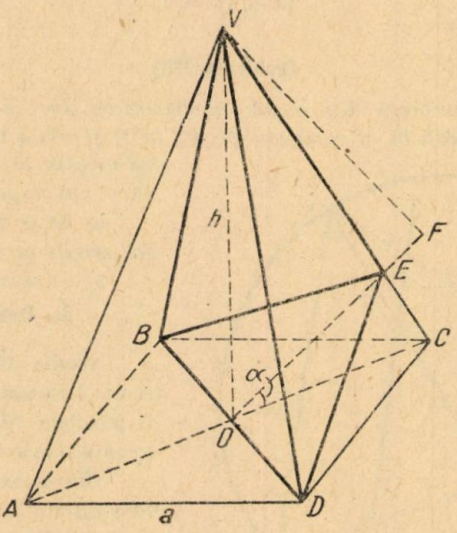
Radu Stroe, elev Ploești

Soluție. — Vol. piramidei $VBDE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \overline{OE}}{2} h \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{6} ah \cos \alpha \cdot \overline{OE}$.

În triunghiul EOC avem:

$$\frac{OE}{\sin (VCO)} = \frac{OC}{\sin (OEC)} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin (90° - \alpha + \sphericalangle OVE)} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos (\alpha - \sphericalangle OVE)} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2 (\cos \alpha \cos (OVE) + \sin \alpha \sin (OVE))} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha \sin (VCO) + \sin \alpha \cos (VCO)},$$



$$OE = \frac{a\sqrt{2} \sin (VCO)}{2 (\cos \alpha \sin (VCO) + \sin \alpha \cos (VCO))} = \frac{a\sqrt{2}}{2 (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} (VCO))} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2 \left(\cos \alpha + \frac{a\sqrt{2}}{2h} \sin \alpha \right)} = \frac{ah\sqrt{2}}{2h \cos \alpha + a\sqrt{2} \sin \alpha}.$$

$$\text{Vol. piram. } VBDE = \frac{\sqrt{2}}{6} ah \cos \alpha \cdot OE = \frac{\sqrt{2}\, ah \cos \alpha}{6} \cdot \frac{ah\sqrt{2}}{2h \cos \alpha + a\sqrt{2} \sin \alpha} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{2a^2 h^2 \cos \alpha}{2h \cos \alpha + a\sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{1}{6} \frac{2a^2 h^2}{2h + a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 h^2}{2h + a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Problema 2357

Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini satisfac condițiile: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{m^2 + 1}{m^2}$; $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$, m fiind cunoscut.

Donca Sorin, Buhuși

Soluție dată de **Gh. I. Stoian** București. Din relația $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$ rezultă: $1°.\ x_1 = -1$. Înlocuind valoarea lui x_1 astfel găsită în relația $x_1^2 + x_2^2 = \frac{m^2+1}{m^2}$ obținem:

$$x_2 = \pm \frac{1}{m}.$$

În acest caz, obținem ecuațiile:

$$x^2 - \left(-1 \pm \frac{1}{m}\right) x \mp \frac{1}{m} = 0$$

sau

$$mx^2 + (m \mp 1)\, x \mp 1 = 0.$$

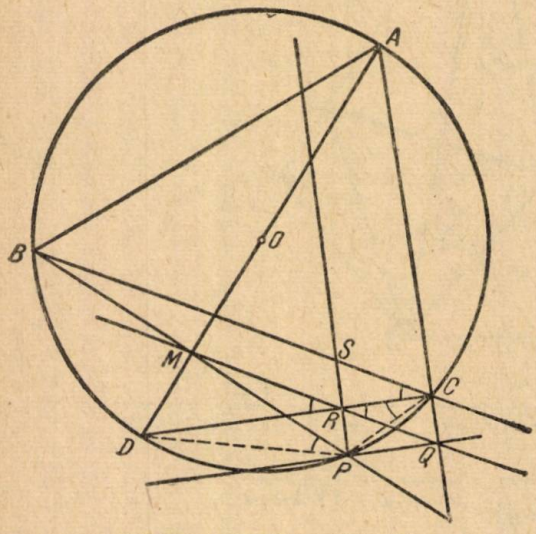
2°. Cazul $x_2 = -1$ se reduce la primul caz.

3°. $x_1 = -1, x_2 = -1$. În acest caz obținem o relație de condiție pentru m și anume, $m = \pm 1$. Dacă nu îndeplinește această condiție, atunci obținem ecuația:

$$(x + 1)^2 = 0.$$

Problema 2361

Fie un triunghi oarecare ABC și cercul său circumscris. Perpendiculara din B pe diametrul AD taie acest diametru în M; mai taie pe AC în N și cercul în P. Prin punctul P se duc paralele la DC și AC care taie pe AC și DC respectiv în Q și P.



a) Să se arate că punctele M, Q, R sînt așezate pe o paralelă la BC.

b) Să se arate că $NP \cdot BC = NB \cdot QR$.

Șt. Donescu, student București

Soluție dată de **Buşilă A. Ioana** (s. m. 7 Bucureşti). a) Pentru a arăta că punctele M, Q, R se găsesc pe o dreaptă vom arăta că $\sphericalangle MRD = \sphericalangle CRQ$.

Într-adevăr: patrulaterul $DMRP$ fiind inscriptibil, $\sphericalangle MRD = \sphericalangle MPD$. În cercul circumscris triunghiului ABC, $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DCP$, arcele BD și MP fiind egale. Deci $\sphericalangle MRD = \sphericalangle DCP$.

Pe de altă parte patrulaterul $CRPQ$ fiind un dreptunghi, $\sphericalangle DCP = \sphericalangle CRQ$. De unde $\sphericalangle MRD = \sphericalangle CRQ$. Punctele M, Q, R sînt deci coliniare și cum am văzut că $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CRQ$, rezultă că dreapta MRQ este paralelă cu BC.

b) În triunghiul NBC în care PS este paralelă cu NC avem:

$$\frac{BP}{PN} = \frac{BS}{SC}\,;\ \frac{BP + PN}{PN} = \frac{BS + SC}{SC}\,;\ \frac{BN}{PN} = \frac{BC}{SC}\,.$$

Cum $SC = QR$ ca paralele cuprinse între paralele:

$$\frac{BN}{PN} = \frac{BC}{QR} \text{ sau } NP \cdot BC = BN \cdot QR.$$

Problema 2364

Să se arate că dacă ecuația $x^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale, atunci și ecuația:

$$x^2 + bx + c + (x + a)\,(2x + b) = 0$$

are rădăcini reale.

* * *

Soluție. — Ecuația a doua se scrie:

$$x^2 + bx + c + 2x + 2ax + bx + ab = 0$$

sau:

$$3x^2 + 2x(a + b) + ab + c = 0.$$

Dacă ecuaţia $x^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale înseamnă că realizantul ei: $b^2 - 4ac \geqslant 0$ (1).

Pentru a arăta că şi ecuaţia a doua are rădăcini reale trebuie să arătăm că realizantul ei: $R \geqslant 0$:

$$R = 4(a + b)^2 - 12(ab + c) = 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 12ab - 12c =$$
$$= 4a^2 + 4b^2 - 4ab - 12c = (4a^2 - 4ab + b^2) + 3b^2 - 12c =$$
$$= (2a - b)^2 + 3(b^2 - 4ac).$$

Se observă deci, ţinînd seama de relaţia (1) şi de faptul că: $(2a - b) \geqslant 0$, că $R = (2a - b)^2 + 3(b^2 - 4ac) \geqslant 0$, adică şi a doua ecuaţie are rădăcini reale.

Problema 2383

Reluctanţa unui circuit magnetic este de 5 **Gb/Mx**, *inducţia magnetică de* 10 **Gs**, *iar secţiunea miezului de* 2 **cm²**. *Să se afle forţa magnetomotoare a circuitului.*

R. Ionescu, elev Turnu Severin

Soluţie. — Notăm cu Φ fluxul magnetic al circuitului, cu B inducţia sa magnetică, cu S secţiunea miezului şi cu Rm reluctanţa circuitului magnetic. Obţinem relaţiile:

$$\Phi = B \cdot S \; ; \quad M = Rm\ \Phi,$$

unde M este forţa magnetomotoare.

Dacă $\Phi = B \cdot S$, atunci 1 **Mx** = 1 **Gs** · 1 cm². Dar 1 **Gs** = 10^{-4} **Wb/m²**,

$$10 \text{ Gs} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 = 10^{-3} \text{ Wb/m}^2.$$

Dar 1 cm² = 0,0001 m² ; 2 cm² = 0,0002 m².

$$\text{Deci, } \Phi = 10^{-3} \cdot 0{,}0002 = 10^{-3} \cdot \frac{2}{10^4} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb.}$$

$$\text{Dar } 1 \text{ Mx} = 10^{-8} \text{ Wb}; \; 1 \text{ Mx} = \frac{1}{10^8} \text{ Wb. De unde } 1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx.}$$

$$\Phi = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 = \frac{2 \cdot 10^8}{10^7} = 20 \text{ Mx}$$

Dar $M = Rm\ \Phi$; $M = 5 \text{ Gb/Mx} \cdot 20 \text{ Mx} = 100 \text{ Gb.}$

Problema 2384

Să se arate că dacă: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *avem:*

$$-\sqrt{3} \leqslant x + y + z \leqslant \sqrt{3}.$$

Simon Petre

Soluţii date de **N. Doniga** (s.m.l. Bucureşti), **Th. Schein** (s.m.l.) Bucureşti). — Pornim de la inegalitatea:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz,$$

deoarece

$$x^2 + y^2 - 2xy > 0, \ldots$$

care este evidentă. Adunăm de o parte şi de alta $(x^2 + y^2 + z^2)$ după ce am înmulţit cu 2 şi avem:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2.$$

Dar

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

deci

$$3 \geqslant (x + y + z)^2$$

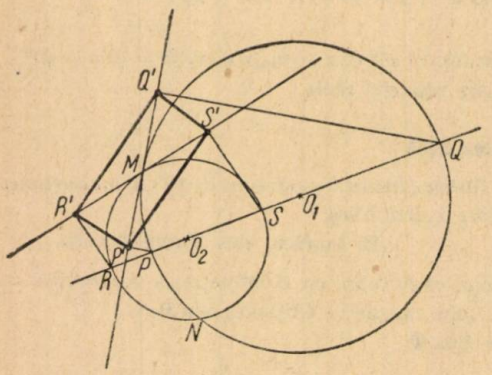
sau

$$-\sqrt{3} \leqslant x + y + z \leqslant \sqrt{3}.$$

Problema 2385

Se consideră două cercuri O_1 și O_2 secante în M și N. Dreapta centrelor O_1O_2 intersectează cercul O_1 în punctele P, Q și cercul O_2 în punctele R,S. Fie P' și Q' proiecțiile lui P și Q pe tangenta în M la cercul O_1, iar R' și S' proiecțiile lui R și S pe tangenta în M la cercul O_2. Să se arate că diagonalele patrulaterului $P'Q'R'S'$ sînt egale.

Theodor Gh. Cocea



Soluție. În nota privind problema 1509 s-a arătat că proiecția unui diametru al unui cerc pe o tangentă într-un punct M al său este egală cu lungimea coardei ce trece prin M și este perpendiculară pe diametrul dat.

În cazul nostru, cu cercul O_1, $P'Q'$ este proiecția diametrului PQ din cercul O_1 pe tangenta în M. Rezultă că $P'Q'$ este egală cu coarda MN perpendiculară pe PQ.

De asemenea $R'S'$ este proiecția diametrului RS din cercul O_2 pe tangenta în M și deci este egală tot cu MN. În consecință, $P'Q' = R'S'$.

Observație. Patrulaterul $P'Q'R'S'$ este un dreptunghi. Locul geometric al punctelor P' și Q', dacă cercul O_1 variază, este un cerc de centru M și rază $\frac{MN}{2}$.

Problema 2386

Să se calculeze adevărata valoare a expresiilor:

$$E_1 = \frac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg} x}\ ;\quad E_2 = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

pentru $x \to 0$.

* * *

Soluție. — Înmulțim și împărțim pe E_1 cu $(\sqrt[4]{1+\sin x}+1)(\sqrt{1+\sin x}+1)$ și obținem:

$$E_1 = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x\,(\sqrt[4]{1+\sin x}+1)(\sqrt{1+\sin x}+1)}\ .$$

Pentru $x = 0$, avem:

$$E_1 = \frac{\cos x}{(\sqrt[4]{1+\sin x}+1)(\sqrt{1+\sin x}+1)} = \frac{1}{4}\ .$$

Înmulțim și împărțim pe E_2 cu $(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)$ și obținem:

$$E_2 = \frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2\,(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}\ .$$

Se știe că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, deci $E_2 = \frac{1}{4}$.

Au dat soluție bună **Berdan Margareta**, cl. X A s.m. 2 Bacău.

Problema 2390

Se dau numerele complexe: $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 8\text{-}4i$ *ale căror afixe sînt punctele* B, C. *Se cere:*

1. *Să se arate că triunghiul* OBC *este dreptunghic.*

2. *Să se determine relaţia dintre coeficienţii reali ai numărului complex* $z = a + bi$, *de afix* A, *aşa încît patrulaterul* OBAC *să fie inscriptibil şi în acest caz să se determine* a *şi* b *cînd* $OA \perp BC$.

3. *Să se arate că* b *este maxim cînd* A *se află pe bisectoarea cadranului* I (xOy) *şi* OBAC *este inscriptibil.*

4. *Care este modulul lui* A (a,b) *în funcţie de unghiul* $\varphi = \sphericalangle$ xOA *şi abscisa* a, *apoi de* φ *şi raza* r *a cercului circumscris.*

N. C. Ciomu

Soluţia 1. — Fie B', B'', C', C'' proiecţiile punctelor B, C pe axele Ox, Oy, şi D intersecţia dintre BB' şi CC''.

— din triunghiul $OB'B$ avem: $\overline{OB}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{BB'}^2$ sau $\overline{OB}^2 = 20$;

— din triunghiul $OC'C$ avem: $\overline{OC}^2 = \overline{OC'}^2 + \overline{CC'}^2$ sau $\overline{OC}^2 = 80$;

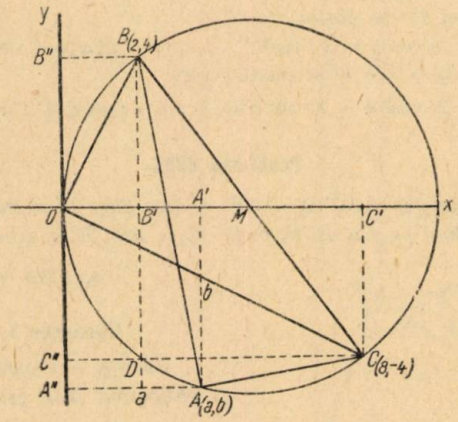
— din triunghiul BCD avem: $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ sau $\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

Rezultă că $\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BC}$, deci unghiul BOC este drept.

Sau: $\operatorname{ctg}(B'OB) = \dfrac{OB'}{BB'} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \operatorname{tg}(C'OC) = \dfrac{CC'}{OC'} = \dfrac{1}{2}$,

deci $\operatorname{tg}(C'OC) = \operatorname{ctg}(B'OB)$, prin urmare:

$$\sphericalangle(C'OC + B'OB) = 90°.$$



2. — Deoarece triunghiul BOC este dreptunghic în O, cercul său circumscris are ca diametru segmentul BC. Punctul A se află pe acest cerc dacă suma patratelor distanţelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ este egală cu patratul lui $\overline{BC}$. Avem:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\overline{AA''} - \overline{BB''})^2 + (\overline{AA'} + \overline{BB'})^2 + (\overline{CC''} - \overline{AA''})^2 + (\overline{AA'} - \overline{CC'})^2 =$$

$$= (a-2)^2 + (b+4)^2 + (8-a)^2 + (b-4)^2,$$

$$a^2 - 4a + 4 + b^2 + 8b + 16 + 64 - 16a + a^2 + b^2 - 8b + 16 = 2(a^2 + b^2) - 20a + 100.$$

Şi cum trebuie să avem: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} = 10^2$, rezultă că vom avea:

$$a^2 + b^2 = 10a,$$

care este relaţia cerută.

Dacă $OA \perp BC$ trebuie ca: $\overline{OB} = \overline{BA}$ sau $OB^2 = BA^2$, unde $\overline{OB}^2 = 20$, iar $BA^2 = a^2 + b^2 - 4a - 8b + 20$; avem sistemul:

(1) $$a^2 + b^2 = 10a,$$

(2) $$a^2 + b^2 = 4(a + 2b),$$

de unde $6a = 8b$; substituind în (1) pe $b = \frac{3a}{4}$, avem $25a^2 = 160a$, cu soluţiile $a_1 = O$, $b_1 = a$ (punctul A în origină) şi $a_2 = \frac{32}{5}$, $b_2 = \frac{24}{5}$ (A-simetricul originei faţă de BC).

Atunci $x_3 = \frac{8(4 + 3i)}{5}$.

3. Relaţia $a^2 + b^2 = 10\,a$ se poate scrie:

$$b^2 = a(10\text{-}a)$$

Suma factorilor variabili a şi $(10—a)$ fiind constantă, produsul lor este maxim cînd factorii sînt egali: $a = 10—a$, de unde $a = 5$, $b^2 = 25$ sau $b = \pm 5$. Punctul A (5,5) fiind echidistant de axele Ox, Oy, se află pe bisectoarea unghiului xOy. Dacă $b = —5$, punctul A (5,-5) este simetricul lui A(5,5) faţă de axa Ox.

Observare — Relaţia $a^2 + b^2 = 10a$ se mai poate scrie, notînd cu x, y, coordonatele lui A: $x^2 - 10x + y^2 = O$ sau: $(x - 5)^2 + y^2 = 25$, care este ecuaţia cercului cu centrul în M (5,0) şi raza $r = 5$ (cercul circumscris triunghiului OBC).

4. Modulul m al numărului complex $z_2 = a + bi$ este: $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, care se mai poate scrie: $m = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$; însă $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, deci: $m = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ sau $m = \frac{a}{\cos \varphi}$.

De asemenea, m este proiecţia diametrului sub unghiul φ pe direcţia modulului, deci $m = 2r \cos \varphi$.

Din relaţiile de mai sus se obţine:

$$a = m \cos \varphi = 2r \cos^2 \varphi \quad ; \quad b = a \operatorname{tg} \varphi = r \sin 2\varphi.$$

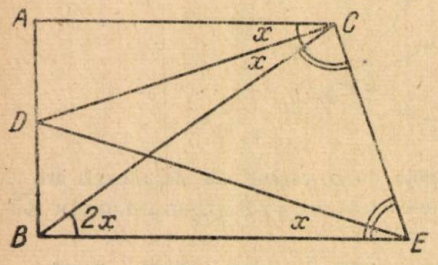
Numărul complex $z_3 = a + bi$ se poate scrie:

$$z_3 = 2r \cos^2 \varphi + i\, r \sin \varphi = 2r \cos \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Problema 2392

În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$) se duce bisectoarea interoară CD. Din punctul B se ridică o perpendiculară pe AB astfel, încît $BC = BE$. Să se demonstreze că:

$$\sphericalangle BED = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB.$$



Gheorghe I. Stoian, Bucureşti

Soluţie. — Deoarece $BC = BE$, rezultă că triunghiul BCE este isoscel. Avem:

$$\sphericalangle BDC = 180° - (B + \frac{1}{2} \sphericalangle C),$$

$$\sphericalangle CBE = C, \quad \sphericalangle BEC = 90° - \frac{1}{2} \sphericalangle C,$$

$$\sphericalangle BDC + \sphericalangle BEC = 180° - (\sphericalangle B + \frac{1}{2} \sphericalangle C) + 90° - \frac{1}{2} \sphericalangle C - 270° - (\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 180°.$$

Rezultă aşa dar, că patrulaterul $BDCE$ este inscriptibil.

$\sphericalangle DCE = 90°$ deoarece el este opus unghiului ABE în patrulaterul inscriptibil $BDCE$

$$\sphericalangle CBE - \sphericalangle CDE = \sphericalangle C,$$

$$\sphericalangle CED = 90° - \sphericalangle CBE = 90° - \sphericalangle C = \sphericalangle B$$

Rezultă,

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle BEC - \sphericalangle CED = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C - \sphericalangle B.$$

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle B + \sphericalangle C - \frac{1}{2}\sphericalangle C - \sphericalangle B,$$

deci

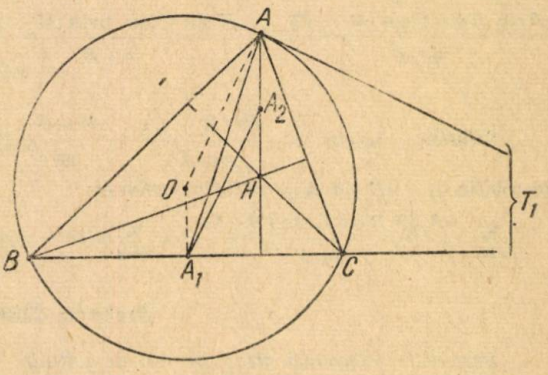
$$\sphericalangle BED = \frac{1}{2}\sphericalangle C.$$

Problema 2395

Se dă triunghiul oarecare AVC în care notăm: A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 respectiv mijloacele laturilor BC, CA, AB şi mijloacele segmentelor AH, BH, CH, în care H este ortocentrul triunghiului ABC. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 sînt coliniare.

Iocob Hodîrcă, profesor Breaza

Soluţie dată de *Marcel Bărbulescu* Slatina. — Este cunoscut faptul că $OA = \| A_1A_2$ (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Deci înălţimea din A a triunghiului AA_1A_2 este tangentă la cercul O în punctul A. Se observă uşor că BC este prelungirea înălţimii din A_1, a triunghiului AA_1A_2. Notînd cu T_1 ortocentrul triunghiului AA_1A_2 şi cu T_2, T_3 ortocentrele analoge, rezultă imediat că punctele T_1, T_2, T_3 sînt coliniare, aceasta în baza problemei 1091 (din Culegerea de probleme de geometrie de *Gh. Ţiţeica*), al cărei enunţ este: *Tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC în vîrfurile A, B, C, întîlnesc laturile opuse în trei puncte T_1, T_2, T_3 coliniare.*



Într-adevăr, în baza teoremei lui Nagel: Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci dreptele AO, BO, CO sînt respectiv perpendiculare pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului ortic. Avem: $B'C' \| AT_1$ şi cum triunghiul ortic este omologic cu triunghiul ABC, rezultă că T_1, T_2, T_3 sînt coliniare.

Problema 2396

Dacă într-un patrulater convex oarecare $ABCD$ notăm cu E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC şi respectiv CD şi DA; cu $M = (CH; AG)$, $N = (DF; BG)$, $P = (BH; DE)$ şi $Q(AF; CE)$, între laturile a, b, c, d ale patrulaterului $ABCD$ şi m, n, p, q, şi laturile patrulaterului $MNPQ$, există relaţia

$$\frac{abcd}{mnpq} = 81.$$

V. Baltag, Ploeşti

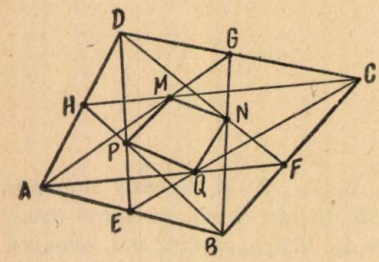
Soluţie. — Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul AGD cu transversala HMC şi în triunghiul BGC cu transversala DNF, avem:

$$\frac{HA}{HD} \cdot \frac{MG}{MA} \cdot \frac{CD}{CG} = 1$$

şi

$$\frac{FC}{FB} \cdot \frac{NB}{NG} \cdot \frac{DG}{DC} = 1.$$

Ţinînd seama de condiţiile problemei avem:



$$\frac{MA}{MG} = 2 \quad \text{şi} \quad \frac{NB}{NG} = 2,$$

de unde

$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{a}{m} = 3.$$

Analog,

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{a} = 3$$

şi rezultă

$$\frac{abcd}{mnpq} = 81.$$

Problema 2397

Să se arate că între elementele unui triunghi avem relaţia

$$\frac{a^3 \sin B \sin C \sin (B - C)}{\sin A} + \frac{b^3 \sin C \sin A \sin (C - A)}{\sin B} + \frac{c^3 \sin A \sin B \sin (A - B)}{\sin C} = 0.$$

Kiss Elemer

Soluţie. — Se ştie că $\frac{\sin (B - C)}{\sin A} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$ (GMF-B 9/955, p. 423). Se ţine seamă de relaţia $a = 2R \sin A$ şi analoagele Avem:

$$\sum \frac{a^3 \sin B \sin C \sin (B - C)}{\sin A} = \sum a (b^2 - c^2) \sin B \sin C = \frac{abc}{4R^4} \sum (b^2 - c^2) = 0.$$

Problema 2399

Proiecţiile ortogonale ale punctului de întîlnire al diagonalelor unui patrulater convex înscriptibil pe laturile sale, împarte aceste laturi în raporturi al căror produs este egal cu unitatea.

Theodor Gh. Cocea

Soluţie. — Fie A', B', C', D' proiecţiile orotgonale ale punctului de intersecţie M a diagonalelor AC, BD din patrulaterul inscriptibil $ABCD$ respectiv pe laturile AB, BC, CD, şi DA.

Patrulaterele $AA'MD'$, $BB'MA'$, $CC'MB'$ şi $DD'MC$ sînt inscriptibile. Din primele două rezultă:

$$\sphericalangle D'AM \text{ (sau } \sphericalangle DAC) = \sphericalangle D'A'M$$

şi

$$\sphericalangle MA'B' = \sphericalangle MBB' \text{ sau } \sphericalangle BCD'.$$

Însă

$$\sphericalangle DAC \text{ (sau } \sphericalangle D'AM) = \sphericalangle DBC \text{ (sau } \sphericalangle MBB')$$

şi deci,

$$\sphericalangle MA'B' = \sphericalangle D'A'M.$$

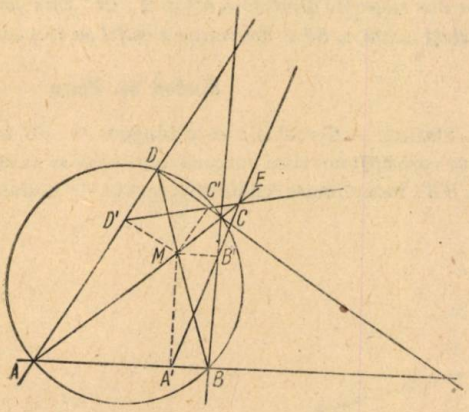
În consecinţă, dreapta MA' este bisectoarea interioară a unghiului $D'A'B'$ şi AB este bisectoarea exterioară a acestui unghi.

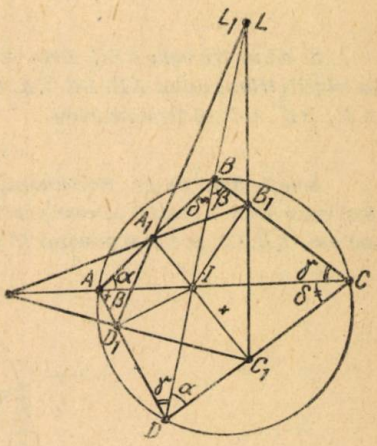
Analog se arată că AD este bisectoarea exterioară a $\sphericalangle C'D'A'$. Punctul de intersecţie A al bisectoarelor unghiurilor $D'A'B'$ şi $C'D'A'$ este egal depărtat de dreptele $A'B'$ şi $D'C'$.

Se arată la fel că și punctul C este în aceiași situație și deci dreapta AC este bisectoarea unghiului format de dreptele $A'B'$ și $D'C'$, adică AC trece prin punctul de intersecție E al laturilor $A'B'$ și $D'C'$ ale patrulaterului $A'B'C'D'$

Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ABC de transversala $EA'B'$ avem:

$$\frac{AA'}{AB'} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CE}{EA} = -1. \tag{1}$$





De asemenea din triunghiul ACD tăiat de transversalele $ED'C'$ avem:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = -1. \tag{2}$$

Făcînd produsul lui (1) și (2) obținem relația căutată

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DA'}{A'A} = +1.$$

Soluția II și generalizare dale de G. I. Bercea, Timișoara. — În adevăr, observînd notațiile de pe figură avem:

$$AA_1 = IA\cos\alpha \quad ; \quad CC_1 = IC.\cos\delta;$$
$$A_1B = IB\cos\delta \quad ; \quad C_1D = ID.\cos\alpha;$$
$$BB_1 = IB\cos\beta \quad ; \quad D_1D = ID.\cos\gamma;$$
$$B_1C = IC\cos\gamma \quad ; \quad D_1A = IA.\cos\beta.$$

Cu acestea se verifică relația cerută.

Fie L intersecția lui C_1B_1 cu DB; din triunghiul DBC tăiat de transversala C_1B_1L avem:

$$\frac{DC_1}{C_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1B} \cdot \frac{LB}{LD} = 1.$$

Fie L_1 intersecția lui D_1A_1 cu BD; din triunghiul DAB tăiat de transversala $D_1A_1L_1$ avem

$$\frac{BA_1}{A_1A} \cdot \frac{AD_1}{D_1D} \cdot \frac{DL_1}{BL_1} = 1.$$

Dacă înmulțim ultimele două relații și ținem seama de enunț, rezultă

$$\frac{LB}{LD} = \frac{L_1B}{L_1D} \text{ și deci } L \equiv L_1.$$

Rezultă deci, că triunghiurile BA_1B_1 și DD_1C_1 sînt omologice, centrul de omologie fiind pe DB. Așadar și triunghiurile AA_1D_1 și CB_1C_1 sînt omologice, centrul de omologie fiind pe AC.

Putem deci enunța următoarea proprietate:

Laturile opuse ale patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ se întîlnesc pe diagonalele patrulaterului $ABCD$.

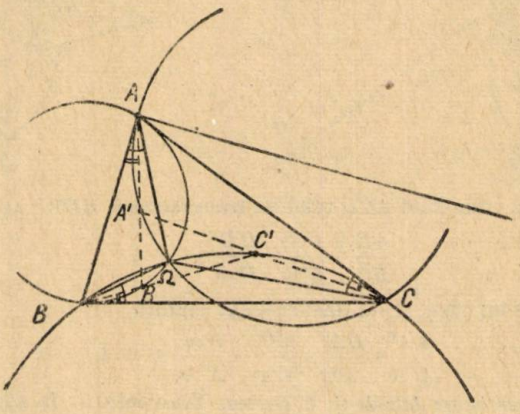
Se vede ușor că avem în general: *Fiind dat un patrulater oarecare $ABCD$ și A_1, B_1, C_1, D_1, puncte pe laturile lui, atunci, dacă este satisfăcută relația* (1) *laturile patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ se întîlnesc pe diagonalele patrulaterului $ABCD$.*

Problema 2401

Se dă un triunghi ABC. Prin vîrfurile lui se duc respectiv dreptele AA', BB', CC' care fac cu laturile triunghiului AB, BC, CA, respectiv același unghi x. Să se determine x astfel ca dreptele AA', BB'. CC' să fie concurente.

Simion St. Petre

Soluție dată de *M. Bărbulescu*, absolvent Slatina. — Cercul $\overline{AB}$ este tangent la BC în B și trece prin A, astfel de cerc poartă numele de cerc adjunct și se notează după cum se vede mai sus, $\overline{AB}$. Oricare ar fi punctul B' pe cercul ABB', îndeplinește condițiile cerute de același



unghi x. Analog, punctele C' și A' se găsesc pe cîte un cerc $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. În felul acesta avem un triplet de cercuri adjuncte $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ care au un punct comun Ω (numit punctul retrograd al lui Brocard sau primul punct). În adevăr, cercurile adjuncte $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ se taie în punctul Ω pentru care avem:

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA,$$

relații unghiulare care dovedesc că tripletul de cercuri $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ are un punct comun Ω. Aceasta pentru cele trei cercuri adjuncte considerate în sensul direct $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Pentru cazul sensului invers $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$, există un alt punct Ω' (al doilea punct sau punctul direct al lui Brocard) care este comun cercurilor $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$.

În concluzie, unghiul x are două valori care se determină pe cale grafică.

Problema 2403

Știind că a este un număr întreg, se cere să se determine numerele întregi x și y astfel încît numărul $z = \dfrac{ax - y}{x - ay}$ să fie de asemenea număr întreg. Aplicație: $a = 4$.

Gh. Buicliu

Soluție. — Presupunem că numerele x și y sînt prime între ele, altfel divizorul lor comun, fiind divizor comun și al numărătorului și al numitorului, dispare prin simplificare.

Se observă că putem scrie:

$$z = \frac{ax - a^2y + a^2y - y}{x - ay} = a + \frac{a^2 - 1}{x - ay}y.$$

y fiind prim cu x, este prim şi cu $x - ay$, aşa că z va fi întreg cînd $x - ay$ va fi egal cu unul din divizorii lui $a^2 - 1$. Fie $d_1 = 1, d_2, d_3, \ldots, d_p = a^2 - 1$ aceşti divizori, iar $q_1, q_2, \ldots, q_p$ cîturile succesive ale lui $a^2 - 1$ prin d_i. Acum avem:

$$x - ay = d_i, \quad \text{deci} \quad x = d_i + ay \quad \text{şi} \quad z = a + q_i y,$$

unde y este un întreg oarecare.

Aplicaţie. Pentru $a = 4$ avem $a^2 - 1 = 15$, iar $d_i = 1, 3, 5, 15$ şi $q_i = 15, 5, 3, 1$, aşa că:

$$x = 1 + 4y;\ 3 + 4y;\ 5 + 4y;\ 15 + 4y;$$

$$z = 4 + 15y;\ 4 + 5y;\ 4 + 3y;\ 4 + y, \qquad y = \text{arbitrar}.$$

La o valoare dată a lui y se obţin pentru x şi z atîtea sisteme de valori cîţi divizori are $a^2 - 1$.

Problema 2418

Un obiect este aşezat în faţa unei lentile convergente care formează o imagine de 4 ori mai mare decît obiectul. Distanţa dintre obiect şi imagine este de 100 cm. La ce distanţă de lentilă se găseşte obiectul şi cît de mare este distanţa focală a lentilei?

(La Fac. matematică şi fizică, Bucureşti)

Soluţie. — Avem conform enunţului: $I = 4A$, unde I este imaginea, A = obiectul, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ şi $\frac{I}{A} = \frac{p'}{p}$; $p + p' = 100$ cm.

$$\frac{4A}{A} = \frac{p'}{p}\ ;\ 4 = \frac{100 - p}{p}\ ;\ 4p = 100 - p;\ p = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm};$$

$$p' = 100 - 20 = 80 \text{ cm};\ \frac{1}{f} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} = \frac{1}{16}\ ;\ \text{deci } f = 16 \text{ cm}.$$

Problema 2423

Fie ABC un triunghi oarecare şi dreapta mobilă B_1C_1 antiparalelă cu BC. Perpendicularele în B_1 şi C_1 pe laturile AC, respectiv AB, se intersectează în M. Se cere:

a) *Locul geometric al punctului M,* b) *locul geometric al centrului cercului circumscris patrulaterului BCB_1C_1.*

Valeriu Hulubei, elev, Craiova

Soluţie. — a) În triunghiul MAC_1: $\sphericalangle MAC_1 + \sphericalangle AMC_1 = 90°$.

În patrulaterul inscriptibil AB_1MC_1:

(1) $$\sphericalangle AMC_1 = \sphericalangle AB_1C_1.$$

Dreptele B_1C_1 şi BC fiind antiparelele avem

(2) $$\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle ABC.$$

Ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2) putem scrie:

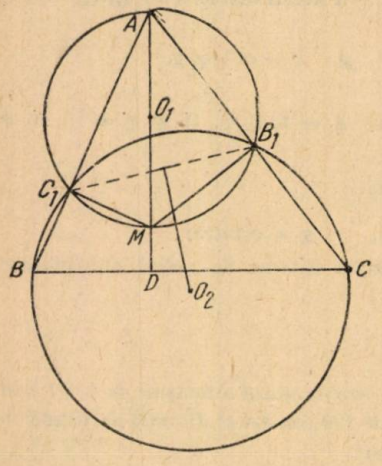
$$\sphericalangle AMC_1 = \sphericalangle ABC.$$

Dar cum aceste unghiuri egale au şi o latură perpendiculară $MC_1 \perp AB$, rezultă că şi $AM \perp BC$.

Deci, *locul geometric al punctului M este dreapta AM perpendiculară pe BC sau înălţimea din A a triunghiului ABC.*

a) În punctele B și C ridicăm perpendiculare pe AB și AC care se intersectează în N (fix).

Patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil, deoarece dreptele BC și B_1C_1 sînt antiparalele. Centrul cercului BCB_1C_1 este în O, mijlocul segmentului MN, deoarecere se află pe intersecția perpendicularelor pe mijloacele coardelor B_1C_1 și BC_1 (dreptele BN și GM fiind perpendiculare pe C_1B, perpendiculara ridicată pe mijlocul lui BC_1 va trece prin mijlocul lui MN. Idem pentru dreptele B_1M și CN).



Deoarece punctul N este fix, iar M descrie dreapta AD, rezultă că punctul O, mijlocul lui MN, descrie o dreaptă paralelă cu AD care intersectează pe AN în E (fix), mijlocul lui NA (linie mijlocie în triunghiul NDA),

Deci, *locul geometric al punctului* O *este dreapta perpendiculară pe* BC, *dusă din* E.

Soluție dată de *Marcel Bărbulescu*, Slatina. — *a)* În nota din G.M.F. (B) nr. 2/1956, p. 79, s-a demonstrat următoarea problemă:

Fie un triunghi oarecare ABC și înălțimea AD. Cu centrul pe înălțime se descrie un cerc ce trece prin A, care taie laturile AB și AC respectiv în E și F. Dreptele BC și EF sînt antiparalele, în baza acesteia putem spune că locul geometric al punctului M este înălțimea AD, deoarece cercul O_1 taie pe AD într-un punct M astfel că $MN_1 \perp AB$; $MB_1 \perp AC$.

b) Întrucît centrul O_2 al cercului ABC_1C_1 se găsește pe intersecția mediatoarelor segmentelor BC, și B_1C_1, locul geometric al punctului O_2 este mediatoarea segmentului BC, deoarece spre deosebire de segmentul B_1C_1 el rămîne fix.

PROBLEME PROPUSE

2835. În lentila unui aparat fotografic cu diametrul de 2 cm, imaginea unui obiect liniar cu dimensiunea de 4 cm se formează la 9 cm de lentilă și are mărimea de 0,5 cm. Să se determine deschiderea relativă a aparatului.

Gavrilă Horia, elev București

2836. Se dă un cerc și un punct fix A pe acest cerc. Se duce coarda AB și se construiește segmentul $AB_1 = K.AB$, așa încît $\sphericalangle ABB_1 = \alpha$ (K și α sînt constante). Să se găsească locul lui B_1 cînd coarda AB se rotește în jurul lui A.

Corneliu Georgescu

2837. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd:

$1^\circ)$ a, h_c, l_c; $2^\circ)$ a, h_c l_b; $3^\circ)$ a, h_a, l_a,.

S-a notat cu l_a, l_b, l_c lungimile celor trei bisectoare. (Se poate consulta cap. XII din Probleme de construcții geometrice cu rigla și compasul).

Gh. Buiciu

2838. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd:

$4^\circ)$ a, h_a , l_c și $5^\circ)$ a, h_c , l_a

Caz analog cînd bisectoarele interioare l_a, l_b, l_c se înlocuiesc prin bisectoarele exterioare l'_a, l'_b, l'_c.

(Se indică metoda intersecţiilor locurilor geometrice).

Gh. Buicliu

2839. Dimensiunile sasului unei ecluze (E) cu timpul de scurgere $T = 20$ minute, sînt: lungimea $l_1 = 50$m, lăţimea $l_2 = 20$m şi adîncimea $h = 3$ m. Se întreabă:

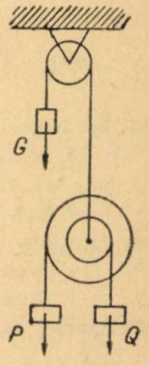
Cu cît să fie egal diametrul unuia din cele trei orificii ale sasului, dintre care unul de umplere şi două de scurgere?

I. Stepan, Cobadin

2840. Din studiul echilibrului sistemul de corpuri dat de figură, să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + y = a$$
$$bx = cy$$

(a, b, c reali, pozitivi).



Alexantru Stoeneseu

2841. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{a}{x+a} = \frac{y}{x+y} = \frac{a+y}{x+a+y}$$
$$\frac{b}{y+b} + \frac{x}{y+x} = \frac{b+x}{y+b+x}$$

I. I. Cristea, student Bucureşti

2842. Se dau în spaţiu două drepte rectangulare Ax şi By care nu se întîlnesc şi perpendiculara lor comună AB. Se ia pe Ax un punct C astfel ca $AC = x$ şi pe By un punct D aşa fel ca $BD = y$. Fie h distanţa între Ax şi By.

Să se demonstreze că între x şi y există relaţia

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{h},$$

cînd deplasînd punctele C şi D pe Ax şi By este verificată egalitatea

$$AB + CD = AC + BD.$$

Gh. Dobroteseu, Predeal

2843. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$ există relaţia:

$$\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C +$$
$$+ \Sigma \cos A \sin B \sin C + \Sigma \sin A \cos B \cos C = \cos 45° (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

C. Ionescu-Ţiu

2844. Să se arate că:

$$99(x^{101} - 1) - 101x (x^{99} - 1)$$

se împarte exact prin $(x-1)^3$ şi să se afle cîtul.

Să se afle adevărata valoare a fracţiei

$$\frac{99(x^{101} - 1) - 101x (x^{99} - 1)}{(x-1)^3}$$

pentru $x = 1$.

* * *

2845. Să se calculeze:

$$\frac{\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{a+b-c}}{1-\dfrac{b+c-a}{a+b-c}}+\frac{\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}}{1-\dfrac{a-b+c}{a+b+c}}+$$

$$+\frac{\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a-b+c}}{1-\dfrac{a+b-c}{a+b+c}}$$

C. Ioneseu — Bujor

2846. Să se determine numărul real m astfel ca rădăcinile ecuației

$$x^2-(m-1)x+m+2=0$$

să fie reale.

Să se construiască cercurile cu centrele pe axa Ox și punctele de abscise x_1 și x_2 și care să treacă prin origine.

a) Care este condiția ce trebuie să îndeplinească m astfel ca cele două cercuri să fie tangente exterioare unul altuia?

b) Pentru ce valori ale lui m cele două cercuri tangente exterior au razele egale?

c) Să se determine lungimea tangentei comune celor două cercuri între punctele de contact în funcție de m.

(Journal de Mathématiques Élementaires)

2847. Considerăm parabola $y=(p-1)x^2+2px+4$.

a) Pentru ce valori ale lui p parabola este tangentă în A axei Ox.

b) Pentru ce valori ale lui p vîrful parabolei este în B pe axa Oy.

c) Să se arate că cele două curbe de la *a)* și *b)* sînt simetrice în raport cu mijlocul segmentului AB.

d) Există vre-un punct prin care să treacă toate curbele cînd p variază?

(Journal de Mathématiques Élementaires)

2848. Să se demonstreze că dacă $a+b>0$ avem

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-2$$

. . .

2849. Să se arate că fracția:

$$F=\frac{3\cdot 5^{2n-1}+7\cdot 9^n+2}{3^{4n}+2\cdot 7^{2n-1}+1}$$

se simplifică prin 16, pentru orice n întreg, pozitiv.

C. D. Bulucea, elev R. Vîlcea

2850. În planul triunghiului oarecare ABC se ia punctul O din care se duc paralele la laturile triunghiului. Fie s, p, q respectiv segmentele de pe paralelele duse din O determinate de laturile AB, AC; CA, CB; BA, BC. Se cere relația

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2.$$

. . .

2851. O gospodărie agricolă colectivă are o orezărie care este udată la răstimpuri egale dintr-un lac de suprafaţă 10 ha alimentat de un rîu cu debitul de $4\sqrt{3}$ m³/s. Ştiind că lacul se află la un nivel de 750 m faţă de suprafaţa mării, iar cîmpia la 740 m, se întreabă:

Peste cît timp suprafaţa apei din lac va fi la acelaşi nivel cu suprafaţa apei de pe orezărie, dacă apei i se dă drumul cu o viteză de 10 m/s, printr-o secţiune trapezoidală (economică) cu o înălţime de 1 m şi a cărei bază inferioară se află la acelaşi nivel cu al orezăriei?

Ionel Stepan, Cobadin

2852. Care este inductanţa unui circuit cu o capacitate de 100 cm ştiind că lungimea de undă corespunzătoare acestui circuit este de 62,8 m?

Gh. Piţigoi, elev R, Vîlcea

2853. Se dau dreptele (Δ_1), (Δ_2) fixe şi perpendiculare între ele şi (Δ_3) variabilă, toate concurente în O. Pe Δ_1) se ia distanţa $OA = a$ şi din A se ridică o perpendiculară pe (Δ_3) care taie pe (Δ_2) în B. Paralela din B la (Δ_3) taie dreapta (Δ_1) în C, iar paralela din C la (Δ_2) taie dreapta (Δ_3) în M. Se cere locul geometric al punctului M.

Radu Ioneseu, student Bucureşti

2854. Să se demonstreze că suma patratelor distanţelor unui punct mobil de pe cercul înscris într-un triunghi echilateral la laturi este constantă. Generalizare.

C. Coşniţă

2855. Fie ABC un triunghi echilateral şi N un punct pe latura sa BC. Dreapta AN intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul M. Să se afle locurile centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor CMN, respectiv BMN şi să se demonstreze că aceste locuri se taie pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Eugen Onofraş, profesor Huşi

2856. Să se arate că unghiurile diedre ale unui dodecaedru regulat sînt date de formula

$$\cos \alpha = \frac{a_5 (l_5 - l'_5)}{l_5 (a_5^2 + a_5 - 1)}$$

unde a_5 şi l_5 sînt respectiv apotema şi latura pentagonului regulat convex înscris în cercul de diametru egal cu unitatea şi l'_5 este latura pentagonului regulat stelat înscris în acelaşi cerc.

C. Ioneseu-Ţiu

CHESTIUNI DE EXAMEN

2857. Într-o sferă de rază R = 10 cm se înscrie un trunchi exagonal regulat. Raportul laturilor exagoanelor este $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi înălţimea trunchiului este h. Se cere:

a) Să se calculeze laturile exagoanelor în funcţie de h.

b) Să se analizeze posibilitatea problemei după valorile pe care le poate lua h.

c) Se notează cu a înclinarea feţelor pe baza mare a trunchiului, cu b înclinarea muchiilor pe baza mare şi cu $2c$ unghiul diedru a două feţe alăturate. Să se calculeze expre-

siile $\frac{tg a}{tg b}$ și $\sin b \cdot tg c$. Să se deducă de aici că ele nu depind de vreun element de lungime al trunchiului de piramidă. Ce consecințe se pot deduce de aici.

Examenul de maturitate Constanța, 1957

2858. Perimetrul unui triunghi dreptunghic și suprafața lui sînt exprimate prin același număr. Mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu $\frac{m}{2}$.

a) Să se calculeze catetele în funcție de m.

b) Să se determine m astfel ca raportul catetelor să fie 3:4.

c) Se rotește figura în jurul unei axe perpendiculare pe bisectoarea unghiului drept și care trece prin acest vîrf. Să se calculeze volumul și suprafața corpului generat, pentru valoarea lui m determinată la punctul *b*.

Examenul de maturitate Constanța, 1957

2859. Se dă un trapez dreptunghic în care baza mare și înălțimea sînt egale cu a. iar unghiul ascuțit al trapezului este α. Trapezul se rotește în jurul laturii oblice. Să se determine α așa fel ca aria corpului obținut să fie egală cu $\frac{\pi a^2}{\sin \alpha}$.

Ex. de maturitate Craiova, 1957

2860. Să se rezolve ecuația

$$2 \arccos \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{5}$$

Ex. de maturitate Craiova, 1957

2861. Se dă ecuația

$$x^2 - (m+2)x + 2m = 0$$

în care m este un parametru. Se cere să se determine valorile lui m pentru care avem următoarea relație între rădăcinile ecuației date

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = \sqrt{2 x_1 x_2 + 1}$$

Ex. de maturitate Craiova, 1957

2862. Se consideră un semicerc cu diametrul $AB = 2a$. Fie C mijlocul razei AO iar x arcul AD pe acest semicerc. Figura limitată de CB, arcul DB și CD se rotește în jurul diametrului AB. Să se afle x știind că volumul obținut este egal cu

$$\frac{117a^3\pi}{126}(3 - 4\cos x + \cos^2 x)$$

(Ex. maturitate Craiova. 1957)

2863. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 - 4x + 8$. Să se determine a astfel ca polinomul să se dividă cu $x-2$. Să se simplifice fracția

$$\frac{x^3 + ax^2 - 4x + 8}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}$$

unde a are valoarea determinată mai sus, apoi să se afle x ca fracția obținută să fie mai mică decît 3.

(Ex. maturitate Craiova, 1957)

2864. Să se arate că ecuația

$$p \cos 6x + 2(p^2 + 1) \sin 3x - 3p = 0$$

admite rădăcini reale oricare ar fi p real. Să se rezolve această ecuație cînd $p = \sqrt{2}$.

(Ex. maturitate Craiova, 1957)

2865. Un triunghi isoscel cu una din laturile egale de mărimea a și unghiul de la vîrf egal cu α, se rotește în jurul uneia din laturile egale. Se cere:

a) Să se calculeze volumul corpului obținut,

b) Cît va fi de mare unghiul α dacă volumul obținut este $\frac{\pi a^3}{12}$.

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2866. Să se înscrie într-o sferă de rază R, un cilindru a cărui arie totală să fie egală cu jumătate din aria sferei.

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2867. În triunghiul ABC se cunosc: $BC = a$, $B = \alpha$ și $C = 90^0 + \alpha$. Se cere:

a) Să se calculeze celelalte elemente ale triunghiului inclusiv aria.

b) Aplicație pentru $a = 1$ și $\alpha = 30$.

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2868. 1. Considerăm cercul de rază R și diametrul AB. Ducem CD paralel cu AB și notăm arcul $AD = BC = n^0$. Se cere:

a) Să se calculeze aria născută prin rotirea arcului AD în jurul axei AB;

b) Ce măsură are arcul de cerc (n^0) dacă aria obținută este πR^2

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2869. Într-o sferă de rază R să fie înscris un con al cărui volum să fie egal cu un sfert din volumul sferei.

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2870. Într-un cerc de rază R și diametrul AB se duce în B o tangentă la cerc iar din A o secantă care taie cercul în D, iar tangenta în C și face cu diametrul unghiul α. Se cere:

a) Să se calculeze ariile triunghiurilor ABD și DBC în funcție de diametru și unghiul α.

b) Să se calculeze valoarea ariei triunghiului DCB pentru $R = 2$ și $\alpha = 45°$.

(Ex. maturitate Oradea, 1957)

2871. Un trapez isoscel în care unghiul ascuțit este de 45° și latura înclinată pe baze este egală cu baza mică, se rotește în jurul laturii înclinată pe bază. Dîndu-se lungimea ei a să se afle volumul și aria corpului de rotație.

b) Să se rezolve ecuația

$$\sin(x + 20°) + \cos(x - 10°) - \sin(x - 40°) = \sqrt{3}.$$

(Ex. maturitate Orașul Stalin, 1957)

2872. *a)* Un romb care are latura a și unghiul ascuțit α se rotește în jurul unei axe dusă prin vîrful acestui unghi perpendicular pe latură. Să se afle volumul și aria corpului de rotație.

b) Se dă ecuația: $x^2 - 3(m - 2)\, x - m^2 - 9 = 0$ în care m este un număr real oarecare. Să se afle, pentru ce valori ale lui m avem $x_1 = -x_2$; x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației.

(Ex. maturitate Orașul Stalin, 1957)

2873. Coşul unei fabrici are forma unui trunchi de con de înălţime h, iar bazele au ca raze, respectiv: Baza mare are raza interioară R şi cea exterioară $R + a$; baza mică are raza interioară r şi cea exterioară $r + b$. Să se calculeze:

a) volumul zidăriei,

b) volumul zidăriei în cazul cînd $a = b$,

c) aplicaţie numerică pentru $h = 15$; $R = 1{,}5$; $r = 0{,}80$; $a = b = 0{,}80$.

(Ex. maturitate Ploeşti, 1957)

2874. Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Să se afle ipotenuza CB ştiind că soluţiile pozitive ale ecuaţiei $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ reprezintă o catetă şi proiecţia sa pe ipotenuză în triunghiul dat.

(Ex. maturitate Ploesti, 1957)

2875. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{3x+19} - \sqrt{x+2}.$$

Soluţia ecuaţiei este egală cu tg α. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$E = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

(Ex. maturitate Ploeşti, 1957)

2876. Într-un triunghi ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Să se calculeze laturile şi unghiurile triunghiului ABC cunoscînd $AD = 12$ cm, $BD = 6$ cm, $\sphericalangle A$ este dublu soluţiei uneia din soluţiile ecuaţiei $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$.

(Ex. maturitate Ploeşti, 1957)

2877. Se dă un con de rază R şi înălţime h. Să se calculeze volumul sferei înscrise şi circumscrise.

(Ex. maturitate Ploeşti, 1957)

2878. Se dă ecuaţia:

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x - 8 = 0$$

a) Să se determine valorile parametrului m, aşa fel ca suma patratelor rădăcinilor să fie egală cu 5.

b) Să se formeze ecuaţia de gradul IV ale cărei rădăcini sînt valorile lui m şi $1 + 2i$.

(Ex. maturitate Ploeşti, 1957)

2879. Să se afle volumul unui paralelipiped dreptunghic, ştiind că cele 3 dimensiuni sînt în progresie aritmetică; că suma dimensiunilor este 12 m şi că suprafaţa totală a paralelipipedului este 88 m^2.

— Să se afle unghiul format de o diagonală a paralelipipedului cu baza;

— să se afle greutatea paralelipipedului ştiind că densitatea materialului din care este făcut este 8,9.

(Ex. maturitate Galaţi, 1957)

2880. Se dă un triunghi isoscel cu baza $BC = a$ şi înălţimea h în care se înscrie un patrat cu latura x, avînd două vîrfuri pe baza BC a triunghiului.

— Se notează cu S_1 aria patratului şi cu S aria triunghiului. Se cere: Să se calculeze x în funcţie de a şi h; să se arate că avem $2S_1 \leqslant S$; să se determine unghiul de la vîrful triunghiului isoscel pentru cazul $2S_1 = S$

(Ex. maturitate Galaţi, 1957)

2881. Un tetraedru regulat de latura l este înscris într-o sferă. Să se calculeze:
— mărimea unghiului diedru al tetraedrului; aria sferei circumscrise și volumul sferei înscrise în acest tetraedru în funcție de l.

(Ex. maturitate Galați, 1957)

2882. Într-un triunghi cu baza a și înălțimea h se duce o paralelă la bază așa fel ca aria trapezului astfel obținut să fie medie proporțională între aria triunghiului întreg și aria triunghiului mic. Se cere:
Să se calculeze lungimea x a paralelei în funcție de a; distanța y de la vîrful triunghiului la paralelă m în funcție de h.

(Ex. maturitate Galați, 1957)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI*)

E: 1036. Dacă suspendăm de platanul unei balanțe o bucată de metal și o introducem într-un vas plin cu apă, se scurge o cantitate oarecare de apă pe care o putem strînge și cîntări, iar pentru echilibru punem în celălalt platan 340 g.
Introducînd metalul într-un vas cu petrol de densitate 0,8, în celălalt platan va trebui să punem o greutate de 7 ori mai mare decît greutatea apei scurse din vas în prima experiență, pentru restabilirea echilibrului. Cu ce fel de metal s-a lucrat, care este greutatea și volumul său?

Const. Neeșoiu, București

E: 1037. Să se construiască un triunghi isoscel $(AB = BC)$ cunoscînd înălțimea $BD = 6$ cm și mediana $AM = 4$ cm.

N. Goicu, Timișoara

E: 1038. Sora mea îmi spune: eu am azi de două ori vîrsta pe care ai avut-o tu cînd eu aveam vîrsta ta plus $\frac{1}{10}$ din vîrsta mea, iar cînd tu vei avea vîrsta mea îmi vor lipsi 6 ani pentru ca să am de trei ori vîrsta pe care ai avut-o tu cînd eu aveam vîrsta ta plus $\frac{1}{7}$ din ea. Ce vîrstă aveau fiecare?

B. V. Fărcaș, Zalău

E: 1039. Dintr-un punct M se duc tangentele MA și MB la un cerc de centru O (A și B fiind punctele de tangență). Dreapta AO taie pe MB în C iar BO taie pe MA în D. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel.

C. D. Bulucea, R. Vilcea

E: 1040. O bibliotecă cumpără în total 350 cărți de cîte 4 lei și de cîte 7 lei, plătind suma de 2 000 lei. Cîte cărți de fiecare fel a cumpărat biblioteca?

D. Tomoiagă, Sighet.

E: 1041. Să se arate că

$$2a(b^2+1)(c^2+1)+2b(a^2+1)(c^2+1)+2c(a^2+1)(b^2+1)\leqslant 3(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

Dan Simovici, elev Iași

---

*) V (E: 1038, 1040, 1049); VI (E: 1036, 1043, 1048, 1050).

E: 1042. Fie un punct P pe diagonala BD a unui patrat $ABCD$. Să se arate că perpendiculara din P pe AB și perpendiculara din B pe AP, perpendiculara din D pe CP se întîlnesc pe diagonala AC.

C. I. Ț.

E: 1043. Pe un cîntar zecimal se pune un balot în greutate de 52,5 kg. Pentru a cîntări acest balot pe talerul cîntarului se pun greutăți confecționate dintr-un aliaj obținut prin topirea laolaltă a 780 kg fier și 270 kg aluminiu. Ce volum ocupă greutățile puse pe taler cunoscînd: densitatea fierului $D_1 = 7{,}8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ și densitatea aluminiului $D_2 = 2{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

C. Nica, elev Timișoara

E: 1044. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd $BC = 8$ cm $AC = 5$ cm și $\sphericalangle A - \sphericalangle B = 30°$.

. . .

E: 1045. Dacă $\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{m}{n}$ să se arate că:

$$(na + nb - mz)^2 + (nb + nc - mx)^2 + (nc + na - my)^2 =$$
$$= (mx + my - nc)^2 + (my + mz - na)^2 + (nz + nx - mb)^2.$$

Const. Bulucea, elev R. Vîlcea

E: 1046. Perimetrul unui trapez isoscel circumscris unui cerc este de 56 cm, iar unghiul sub care se vede baza mare din centrul cercului este de 120°. Să se calculeze laturile trapezului.

N. Goicu

E: 1047. Eu am azi vîrsta pe care tatăl meu o avea cînd mama avea vîrsta pe care eu o aveam acum 4 ani. Știind că vîrsta mamei este de 4 ori mai mare decît vîrsta pe care eu o aveam acum 6 ani și că suma vîrstelor noastre este 91, să se afle vîrsta fiecăruia.

Fl. Brezanu, elev Tîrgoviște

E: 1048. S-a făcut o soluție amestecîndu-se 17 litri de soluție de acid de 60% cu 8 litri de soluție din același acid de 70%. Să se afle concentrația în % a soluției de acid astfel obținută.

B. Baieră, Păunești

E: 1049. La o întovărășire agricolă în campania de însămînțare, două brigăzi aveau de arat după plan, 500 ha. Brigăzile însă, au arat cu 87 ha mai mult.

Să se afle cîte ha a arat mai mult fiecare brigadă dacă planul depășit pentru o brigadă a fost 115%, iar pentru a doua 119%.

B. I. Baieră, Păunești

E: 1050. Un elev are de parcurs distanța Ștefănești — Botoșani. Pleacă din Ștefănești și merge timp de 3 ore cu viteza de 6 km/oră, apoi își micșorează viteza și astfel merge timp de 2 ore cu viteza de 5 km/oră. În ceic din urmă, fiind obosit își micșorează viteza cu 4 km/oră. Să se afle lungimea distanței Stefănești — Botoșani, timpul cînd parcurge distanța rămasă, viteza medie a sa, știind că a parcurs distanța în 9 ore.

Th. Raliuc, elev Trușești

E: 1051. Să se verifice următoarea identitate:

$$4(a+b+c,(ab+bc+ac-a^2-b^2-c^2) \equiv (a+b+c)\,[c^2-(a-b)^2-(a+b-c)^2] + (a-b+c)\,[b^2-(a-c)^2-(a-b+c)^2] + (-a+b+c)\,[a^2-(b-c)^2-(-a+b+c)^2]$$

Stelian Mărculescu, O. Stalin

REGULAMENTUL OLIMPIADEI MICILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI

Art.1 — Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează anual, Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni (OMMF) pentru elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a ale învăţămîntului elementar, cu limba de predare romînă sau a minorităţilor naţionale.

Art.2 — OMMF contribuie la dezvoltarea interesului elevilor şi la antrenarea lor la o pregătire mai temeinică atît la matematică cît şi la fizică, la stimularea în muncă atît a elevilor cît şi a profesorilor, precum şi la orientarea elevilor spre locul de muncă viitor.

Art.3 — Organizarea

OMMF se desfăşoară în trei etape:

1) Etapa pregătitoare (prin corespondenţă),

2) Etapa locală (pe oraş regional, pe raion sau pe centre de comune),

3) Etapa regională.

Art.4 — Participarea la olimpiadă şi antrenarea elevilor

În nr. 11 al fiecărui an, « Gazeta matematică şi Fizică » seria B şi « Matematikai és Fizikai Lapok » vor publica întrebări şi probleme pentru fiecare clasă, cu conţinut din materia anilor respectivi şi a anilor precedenţi.

Aceste întrebări şi probleme vor fi extrase şi multiplicate de către S.S.M.F. şi trimise tuturor secţiilor de învăţămînt raionale din ţară pentru a fi difuzate în şcoli, astfel ca fiecare şcoală să primească cel puţin cîte un exemplar pentru fiecare clasă, în scopul de a fi afişat la ziarul de perete al clasei.

Pentru popularizarea etapei pregătitoare a OMMF, profesorul poate folosi: cercurile de specialitate ale elevilor, concursuri (victorine) pe şcoală sau între şcoli vecine, rezolvarea problemelor propuse în G.M.F.B sau M.F.L., organizarea unor ore educative cu un program adecvat etc.

Pot participa la OMMF toţi elevii claselor V, VI, VII care au întrunit în cursul trimestrelor I şi II minimum media 7, atît la matematică cît şi la fizică.

Problemele rezolvate şi răspunsurile la întrebările puse vor fi prezentate de fiecare elev profesorului de matematică şi de fizică al clasei respective, care le verifică, le notează, întocmeşte un tabel cu elevii participanţi la etapa pregătitoare. Tabelul se întocmeşte pentru fiecare clasă în parte şi va conţine următoarele date: localitatea, raionul, şcoala, clasa, numele şi pronumele elevului, mediile pe trim.I şi II la matematică şi la fizică, numărul problemelor rezolvate de către elev, totalul punctelor acordate, admis sau nu la etapa locală.

Fiecare întrebare sau problemă va fi notată cu note de la 1 la 10.

Aceste tabele semnate de profesorii de matematică şi de fizică ai şcolii se înaintează de către şcoală comisiei locale a OMMF, pînă la data de 3 martie 1958.

Art.5 — Organizarea şi desfăsurarea etapei locale

Etapa locală (pe oraş regional, raion sau pe centre de comune în raioanele unde se consideră aceasta mai indicat) se va desfăşura într-o duminică din a doua jumătate a lunei martie, între orele 9 — 12.

În fiecare oraş regional, în reşedinţele de raion sau centre de comune — după cum este cazul — va funcţiona o comisie locală a OMMF.

Comisiile locale vor fi alcătuite de filialele regionale ale S.S.M.F. în colaborare cu secţiile de învăţămînt regionale, şi comitetele regionale UTM.

Ele vor fi alcătuite din cîte 3 membri profesori: doi de matematică şi unul de fizică, şi un reprezentant al comitetului orăşenesc (raional) UTM. Unul dintre profesori va fi preşedintele comisiei.

Sarcinile comisiei locale sînt:

a) de a populariza olimpiada în oraşul regional, în raionul sau în grupul de comune respective, prin intermediul cercurilor pedagogice, a şedinţelor cu directorii etc;

b) de a primi din partea şcolilor respective tabelele cu propunerile elevilor participanţi, a tria aceste propuneri, a întocmi lista elevilor care au dreptul de a participa la etapa locală şi a o comunica în timp util şcolilor;

c) de a mobiliza cu sprijinul secţiei de învăţămînt raionale sau orăşeneşti, profesori supraveghetori şi profesori corectori, cunoscători ai limbilor în care se desfăşoară olimpiada;

d) de a asigura desfăşurarea etapei în cele mai bune condiţiuni (local, hîrtie, etichete etc.);

e) de a lua măsuri organizatorice pentru a asigura deplina obiectivitate:

. numele elevului va fi scris în colțul din dreapta sus al hîrtiei, iar colțul va fi lipit și sigilat,

. elevii participanți vor fi așezați în clase pe grupe cîte unul în bancă, așa ca în părți, în față și în spate nici unul să nu aibă un coleg din aceiași grupă,

. hîrtia pentru lucrările scrise ale elevilor va fi de același fel,

. elevii nu vor fi supravegheați de profesori ai clasei respective și în limita posibilului, lucrările vor fi corectate de profesori de specialitate ai altor clase,

. lucrările scrise se numerotează și se repartizează spre corectare la comisii de cîte doi profesori. Aceștia corectează separat și după ce cad de acord asupra punctajului acordat notează lucrările și le semnează citeț,

. deschiderea lucrărilor și a sigi.iului se face în fața comisiei locale;

f) asigură cazarea și masa elevilor și profesorilor însoțitori care s-au deplasat pentru etapa locală;

g) În intervalul de 5 zile de la desfășurarea acestei etape a olimpiadei, comisia locală comunică rezultatele comisiei regionale întocmind raportul OTMF pe teritoriul respectiv. Raportul cuprinde:

— numărul elevilor participanți pe clase și școli (la primele două etape),

— lista elevilor admiși pentru etapa regională pe clase, școli, cu punctajul acordat înaintînd și lucrările scrise ale acestor elevi,

— aprecieri critice asupra subiectelor propuse și asupra desfășurării etapei pregătitoare și locală, asupra nivelului de cunoștințe al elevilor comparativ între clase paralele și școli, asupra interesului manifestat de școli, profesori și elevi, asupra greutăților întîmpinate și lipsurilor semnalate;

h) Președintele comisiei locale primește subiectele în plic sigilat de la comisia regională și deschide plicul în fața comisiei în ziua concursului.

Art. 6. — Elevii școlilor cu altă limbă de predare decît limba romînă pot redacta lucrările tuturor etapelor în limba lor de predare (a școlii pe care o urmează).

Art. 7. — Pentru subiectele propuse se acordă fiecărui elev de la 1 la 20 puncte. Sînt declarați reușiți la etapa locală elevii care au obținut de la 15 puncte în sus; aceștia sînt propuși să participe la etapa regională.

Art. 8. — Deplasarea elevilor la etapa locală va fi asigurată de comitetul de sprijin al școlilor respective împreună cu sfaturile populare comunale, orășenești și raionale.

Art. 9. — Organizarea și desfășurarea etapei regionale.

Etapa regională se va desfășura între 1 și 10 mai în fiecare regiune a țării, la o dată care se va fixa de comisia centrală a OMMF. Pentru 1958 s-a fixat la 11 mai.

În fiecare regiune va funcționa o comisie regională a OMMF. Comisiile vor fi alcătuite de către filialele regionale ale S.S.M.F. în colaborare cu secțiile de învățămînt regionale, și comitetele regionale UTM.

Comisia regională va fi formată din doi profesori de matematică, 1 profesor de fizică, un delegat al comitetului reg. UTM și 1 președinte, profesor de matematică sau de fizică. În această comisie pot fi cooptați și membri supleanți, dacă este nevoie.

Sarcinile comisiei regionale sînt:

a) Comunică președinților comisiilor locale componența comisiilor respective pînă la data de 1 noiembrie; și urmărește popularizarea olimpiadelor în întreaga regiune pe toată durata desfășurării lor folosind cercurile pedagogice, consfătuirile raionale, ședințele cu directorii, presa etc.;

b) întocmește subiectele pentru etapa locală (pentru clasa a V-a, 3 probleme de matematică, pentru clasele a VI-a și a VII-a, cîte 2 probleme de matematică și una de fizică, din materia parcursă în primele două trimestre ale anului în curs și în anul precedent) și le expediază recomandat pînă la 20 martie, pe adresa președinților comisiilor locale);

c) primește rapoartele comisiilor locale și întocmește lista participanților la etapa regională, după trierea lucrărilor primite;

d) primește subiectele de la comisia centrală a olimpiadei în plicuri sigilate, prin delegați ai S.S.M.F. sau prin poștă;

e) pentru asigurarea bunei desfășurări a etapei regionale are aceleași sarcini ca și comisiile locale (v. art. 5, pct. c, d, e, f);

f) olimpiada se desfășoară în două zile: în prima zi între orele 8—12 au loc lucrările scrise, în după amiaza aceleiași zile și în dimineața zilei următoare corectarea lucrărilor scrise și vizitarea unor muzee, expoziții, întreprinderi, participarea la lucrări de laborator etc. Acordarea premiilor și programul cultural de încheiere a olimpiadei se va face la amiaza zilei a 2-a;

g) comisia regională centralizează rezultatele etapelor locală și regională și întocmește raportul olimpiadei pe întreaga regiune. Raportul trebuie să cuprindă:

— numărul participanților pe clase, școli, localități (separat la etapa pregătitoare, locală, regională),

— lista elevilor evidențiați la etapa regională cu punctajul acordat pe clase, școli, localități (sînt declarați reușiți la etapa regională toți participanții care au întrunit cel puțin 15 puncte din 20).

— aprecieri critice asupra olimpiadei (nivelul de cunoștințe al elevilor, interesul profesorilor, școlilor și organelor locale, subiectele, greutățile întîmpinate etc.), atît pentru etapa pregătitoare și locală cît și pentru cea regională.

Aceste rapoarte sînt înaintate comisiei centrale prin delegații S.S.M.F. care au fost prezenți la etapa regională, sau — în lipsa — prin poștă, în termen de trei zile.

Art. 10. — Comisia centrală a O.M.M.F. este formată din 2 profesori de matematică, 2 profesori de fizică, un delegat al Ministerului Învățămîntului și Culturii, direcția generală a învățămîntului de cultură generală, un delegat al C. C. al U.T.M. și un președinte desemnat de biroul de conducere al S.S.M.F.

Sarcinile acestei comisii sînt:

a) a fixa pentru fiecare an școlar datele exacte ale etapelor locală și regională,

b) de a propune subiecte pentru etapa pregătitoare, a asigura tipărirea și difuzarea lor secțiilor raionale și școlilor;

c) de a propune subiecte pentru etapa regională și a asigura difuzarea lor comisiilor regionale,

d) de a primi și studia rapoartele comisiilor regionale, a confirma lista premianților și menționaților și a asigura tipărirea în G.M.F. seria B.

Art. 11. — Dispoziții finale.

a) Elevii care au un număr mare de probleme rezolvate la G.M.F.B. sau M.F.L. și care au reușit la etapa locală vor fi preferați la recomandarea de a fi admiși la etapa regională.

b) Cheltuielile necesitate de transportul, cazarea, masa elevilor și profesorilor și premierea elevilor la etapa regională se asigură de secțiile de învățămînt regionale, conform Instrucțiunilor nr. 552 tipărite în Buletinul Ministerului Învățămîntului, seria A nr. 1—9 din 20 martie 1956. Comitetul fiecărei filiale regionale a S.S.M.F. răspunde de condițiile create elevilor admiși din alte localități, de programul cultural oferit acestora în cursul olimpiadei regionale și de festivitatea de înmînare a premiilor. Se va solicita și concursul comitetului regional U.T.M.

c) S.S.M.F. se va îngriji de acordarea diplomelor premianților și menționaților la etapa regională.

d) Presa locală și centrală vor fi solicitate să sprijine popularizarea O.M.M.F.

OLIMPIADA MICILOR MATEMATICIENI ȘI FIZICIENI 1958*)

PROBLEMELE PENTRU CLASA A V-a

V. 1. — Pentru evidențierea unui elev ca rezolvitor de probleme propuse la gazeta matematică a clasei, se cer 100 puncte. Se acordă 5 puncte pentru o problemă bine rezolvată și se scad 3 puncte pentru o problemă greșit rezolvată. Un elev evidențiat a obținut 102 puncte de la 30 probleme trimise. Cîte probleme a rezolvat și la cîte a greșit?

V. 2. — Lichidul turnat într-un vas cîntărește 252 kg. Știind că vasul plin cîntărește de 5 ori greutatea vasului gol, să se afle greutatea acestuia. Știind că vasul are capacitatea de 3,4 hl, să se afle densitatea lichidului

V. 3. — Distanța dintre doi stîlpi telegrafici așezați de-a lungul căii ferate este de 50 metri. Un elev știind aceasta, afirmă că viteza trenului în km/oră,

---

*) ***Soluțiile acestor probleme pentru clasa care o urmează participantul la Olimpiadă, vor fi predate profesorului său de matematică, pînă la 25 februarie 1958.***

este aceiaşi cu numărul intervalelor dintre stîlpii care trec prin dreptul său în timp de 3 minute. Să se justifice prin calcul dacă este justă afirmaţia făcută.

V. 4. — Dacă împărţim numerele 1201 şi 959 prin acelaşi număr obţinem respectiv restul 6 şi restul 4. Care este împărţitorul?

V. 5. — Trei autobuze pleacă dintr-o piaţă la ora 5 dimineaţa în trei direcţii şi se întorc astfel: primul după 56 minute şi pleacă din nou după 4 minute; al doilea se întoarce după o oră şi un sfert şi pleacă din nou după 5 minute; iar al treilea se întoarce după 45 minute şi pleacă după 3 minute. La ce oră vor pleca din nou în acelaşi timp din piaţă, cele trei autobuze?

V. 6. — Două roţi dinţate sînt angrenate împreună. Înainte de a se pune în mişcare se înseamnă cu creta cei doi dinţi ai ambelor roţi din locul de contact. Ştiind că o roată are 178 dinţi şi cealaltă are numai 132 dinţi, să se calculeze cîte rotaţii poate face fiecare din roţi pînă ce dinţii însemnaţi cu creta ocupă locul avut la începutul mişcării.

V. 7. — Trei şantiere de construcţii au cîte un autocamion de transportat pietriş. Deşi aceste şantiere au nevoie de aceiaşi cantitate de pietriş, autocamioanele fiind de capacităţi diferite, primul şantier are nevoie de 35 transporturi, al doilea şantier de 42 transporturi şi al treilea de 46 transporturi, fiecare autocamion lucrînd la şantierul său. Dacă la primul şantier s-au făcut 31 transporturi, la al doilea 37 transporturi şi la al treilea 41 transporturi să se calculeze la care şantier s-a transportat cea mai mare cantitate de pietriş şi la care cea mai mică?

Să se mai afle dacă primul şi ultimul autocamion pot încărca împreună odată atît cît încarcă al doilea camion în două transporturi.

V. 8. — Ce va deveni diferenţa a două numere dacă descăzutul se măreşte cu $12\frac{1}{15}$, iar scăzătorul se micşorează cu $4\frac{5}{21}$? dar dacă descăzutul se micşorează cu $1\frac{13}{28}$ şi scăzătorul cu $7\frac{19}{42}$?.

Să se justifice de fiecare dată operaţiile ce se fac.

V. 9. — Să se afle valoarea lui x astfel ca să avem:

$$x : \left(5\frac{2}{3} - 2\right) - \left(1 + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{5}{2}}{3}\right) = \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \left[\left(3 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{57}\right)\right]$$

PROBLEMELE PENTRU CLASA A VI-a

VI. 1. — Biletul de intrare la o expoziţie costă 1 leu. După reducerea preţurilor la bilete numărul vizitatorilor s-a dublat, iar încasarea a crescut cu jumătate. Care a fost reducerea?

VI. 2. — Într-un autocamion s-au pus 1920 kg cărămizi de două feluri şi anume: cărămizi de zidărie în greutate de 4,750 kg fiecare şi cărămizi de căptuşit sobe în greutate de 17 hg fiecare. Dacă în total s-au pus 523 cărămizi, să se calculeze cîte cărămizi au fost de fiecare fel.

VI. 3. — Un pilot zburînd cu un avion cu viteza de 400 km/oră vede drept în faţă lumina unui fulger, iar după 6 secunde aude tunetul. Să se calculeze la ce distanţă de fulger s-a aflat avionul în momentul cînd l-a văzut. Cît

timp i-ar mai trebui avionului să zboare pînă ar ajunge la locul unde s-a produs fulgerul?

(Nu se ţine seamă de timpul necesar luminii fulgerului pentru a ajunge la avion).

VI. 4. — Într-o gospodărie agricolă colectivă s-au arat în prima zi $\frac{3}{13}$ din întreaga suprafaţă de arat. În a doua zi s-a mai arat încă $\frac{4}{11}$ din ce a mai rămas de arat după prima zi. În a treia zi s-a arat $\frac{4}{7}$ din ce mai rămăsese nearat după a doua zi de lucru. A patra zi s-a terminat de arat.

a) Să se arate prin calcul, că în ziua a doua şi în ziua a treia s-au arat arii egale;

b) să se stabilească că în ziua a patra s-a arat cel mai puţin;

c) cît s-a arat în fiecare zi, dacă în prima zi s-a arat cu 6 hectare mai mult decît în ultima zi.

VI. 5. — Să se afle care va fi anul cel mai apropiat care urmează, astfel ca să fie exprimat printr-un patrat perfect. Explicaţi calculele făcute.

VI. 6. — Se desenează un unghi drept ABC şi se construeşte o semidreaptă BD în interiorul lui. Să se arate că simetricele acestei semidrepte faţă de laturile unghiului, sînt în prelungire.

Ce devine acest rezultat dacă unghiul ABC are 45°?

VI. 7. — Un vas gol cîntăreşte 750 grame. În vas se toarnă 2 litri de apă minerală, după care, cîntărind vasul se constată o greutate de 2 kg şi 766 g. Apoi se pune în vas o bucată de gheaţă de apă minerală care cîntăreşte 400 grame şi are un volum de 480 cm^3. Să se afle densitatea apei minerale şi a gheţii. Să se spună dacă se ridică sau rămîne acelaşi nivelul din vas după topirea gheţii şi să se motiveze răspunsul.

VI. 8. — În lunecarea unei sănii pe un plan înclinat, spaţiile parcurse sînt proporţionale cu patratele timpurilor (duratei) socotite din momentul plecării. Un spaţiu de 50 m pe un plan puţin înclinat a fost parcurs de o sanie, în 20 secunde.

Care a fost spaţiul parcurs după primele 4 secunde?

În cît timp a parcurs sania 40 metri de la plecare, lunecînd pe acest plan înclinat?

VI. 9. — Să se construiască un patrulater convex cu laturile: $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 3$ cm, $DA = 4$ cm şi cu o diagonală de 2,6 cm. Cîte cazuri sînt posibile?

PROBLEMELE PENTRU CLASA A VII-a

VII. 1. — Este ora 7. Peste cîte secunde cele două ace care arată orele şi minutele vor fi în linie dreaptă? Peste cît timp vor fi perpendiculare? Peste cît timp se vor suprapune?

VII. 2. — Într-o emisiune de radio «Ştiinţa învinge», se evidenţiază o metodă fizică cu ajutorul piliturii de fier întrebuinţată în agricultură pentru a separa cerealele care sînt netede de seminţele plantelor străine care prezintă asperităţii şi sînt acoperite cu perişori.

Cum credeţi că se poate face această separare şi cu ajutorul căror fenomene fizice?

VII. 3. — Să se construiască un triunghi ABC cu laturile $AB = 4$ cm, $BC = 5{,}6$ cm, $CA = 6{,}8$ cm. Pe laturile AB, AC, BC se iau segmentele $AD = 1$ cm, $AE = 1{,}7$ cm şi $BF = 4{,}2$ cm. Să se dovedească că $DF \parallel AC$, şi $DE \parallel BC$. Este oare şi EF paralel cu AB? Dece?

VII. 4. — Pe o dreaptă sînt aşezate 4 puncte în ordinea A, B, C, D. Să se arate că:

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{CD}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AD}.$$

VII. 5. — Durata unei oscilaţii simple a unei pendule este dată de formula $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, unde T est timpul, $\pi = 3{,}14$, l este lungimea în centimetri a pendulei, iar $g = 981$ cm/s^2. Să se calculeze lungimea pendulei pentru $T_1 = 1$ secundă şi pentru $T_2 = 2$ secunde.

Cu cît se micşorează durata unei oscilaţii simple cînd lungimea pendulei se scurtează cu 51%?

(Se va considera că lungimea iniţială a pendulei corespunde cu $T = 1$ secundă).

VII. 6. — Într-o cadă de baie se află 60 litri apă fierbinte de 96°C. Să se calculeze cîtă apă rece de 12°C este necesară să se adauge pentru a obţine o temperatură finală de 40°C.

VII. 7. — Un triunghi isoscel are baza 10 cm. şi perimetrul 36 cm. Să se afle lungimea bisectoarei care este şi mediatoare. Să se calculeze apoi aria, înălţimile şi medianele triunghiului.

VII. 8. — Să se determine latura unui poligon regulat înscris într-un cerc de rază R şi circumscris unui cerc de rază r. Să se exprime r cu ajutorul lui R, dacă poligonul este: *a)* un triunghi echilateral, *b)* un patrat, *c)* un exagon regulat.

VII. 9. — Un încălzitor electric are o rezistenţă de nichelină cu secţiunea de 0,6 mm^2, rezistivitatea = 0,4 ohmi şi cu lungimea de 3,6 metri. Curentul la priză este de 120 volţi. Curentul electric consumat de acest încălzitor s-a plătit cu 6,50 lei socotindu-se, 0,75 lei kilowatul-oră.

Să se afle intensitatea curentului folosit şi timpul de folosire al încălzitorului.

VII. 10. — Dintr-un patrat se scoate o fîşie dreptunghiulară reprezentînd 15% din aria patratului şi rămîne un dreptunghi. Din acesta se scoate o altă fîşie dreptunghiulară, astfel că suprafaţa rămasă este un alt patrat. Care sînt ariile celor două patrate ştiind că diferenţa ariilor celor două fîşii scoase este de 81 mm^2. Se va executa desenul exact.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENŢIAŢI

Pînă la 1 iulie 1957 s-au mai evidenţiat următorii rezolvitori de probleme:

Bulucea D. Constantin (cl. 10 R. Vîlcea), *Chiriac D. Dumitru* (cl. 8 s. m. 1 Bacău) *Başturescu Gh. Mugurel* (cl. 9 s. m. 1 Caracal), *Popescu Paul* (student Electronică Bucureşti), *Enescu Cornelia* (cl. 10 s. m. 15 Bucureşti) *Niculescu D. Ştefan* (cl. 10 Caracal), *Tîrtan Gabriel* (cl. 10 Găieşti), *Mihalache Adrian* (cl. 10 s. m. 3 Iaşi), *Precupanu Theodor* (cl. 10 Tg. Neamţ), *Nicolescu Basarab* (cl. 8 s. m. 1 Ploeşti), *Bănică Radu* (cl. 10 Ianca Galaţi) *Creţu Mihai* (cl. 10. s. m. 3 Iaşi), *Strătescu Ion* (cl. 10 Călăraşi), *Ene P. Dumitru* (cl. 8 Ploeşti), *Stratan Gheorghe* (cl. 9 Caracal), *Ixaru Gr. L.* (cl. 9 Găieşti) *Tudorache C. Mihai*

(cl. 10 lic. marină Galaţi), *Vişinescu Mihai* (cl. 10 Giurgiu), *Baltag Vasile* (cl. 10 Ploeşti), *Velicescu T. Mircea* (cl. 8 Tg. Jiu), *Matei A. Aurel* (abs. Tg. Mureş), *Păbuşcă C. Pavel* (cl. 8 Ploeşti), *Ianuş Stere* (abs. Constanţa), *Dinuţ Tudor* (abs. Craiova), *Giovani Azola* (cl. 8 Caransebeş), *Tărîţă Ion* (abs. Craiova), *Aniţescu N. Gheorghe* (cl. 9 Tg. Jiu), *Bărbulescu Marcel* (abs. Slatina), *Berca Eugen* (cl. 8 Tg. Jiu), *Florea Dorel* (cl. 10 Slatina), *Piţigoi I. Gheorghe* (abs. R. Vîlcea), *Jilăveanu Gh.* (cl. 8 Mediaş), *Dincă I. Gheorghe* (cl. 9 Caracal), *Indoleanu Ion* (an IV s. ped. înv. nr. 2 Cluj), *Murăreci Fănică* (cl. 10 Curtea de Argeş), *Bozdog Ion* (cl. 9 Tg. Jiu), *Ploeşteanu S. Ion* (cl. 10 Alexandria), *Rădulescu Mircea* (cl. 8 s. m. 2 Constanţa), *Brînzei D.* (cl. 9 s. m. 3 Iaşi), *Panait Nicoleta* (cl. 8 s. m. 17 Bucureşti), *Mititelu M. Ştefan* (cl. 9 Calafat), *Martiş Gh. Ion* (cl. 10 s. m. 4 «A. Vlaicu») Bucureşti), *Grigoraş Vasile* (cl. 9 s. m. 1 Bacău), *Zamfirescu H.* (cl. 10 s. m. 18 Bucureşti) *Popescu Eugen* (cl. 10 Ploeşti) şi *Şufană Const.* (cl. 9 Lugoj).

Pînă la 1 iulie 1957 s-au mai primit cel puţin 10 soluţii bune la problemele propuse în numerele 2—5, februarie-mai, 1957 din «Gazeta matematică şi fizică» seria B, după cum se indică între paranteze după numele fiecărui rezolvator de probleme: N (note), A (articole) şi D (diverse).

ALBA IULIA. S. m. 2. «Mihai Viteazu» Cl. 9 Trifu Mircea (2505, 15, 17, 21, 24, 28, 29, 31, 33, 39, 67, 72, 79, 91, 610, 15).

ALEXANDRIA. Cl. 9 Beşu Georgeta (2515, 18, 28, 72, 73, 78—80, 89, 606, 10, 11, 13, 21, 20, 23—26). Cl. 10. *Ploeşteanu Ion* (2530, 33, 39, 42, 46, 49—51, 54, 58, 68, 71, 73, 77, 600, 03, 06—08, 10—12, 14—16, 19—21, 23, 24, 26, P).

ANINA (Timişoara). Cl. 9. Almăjan Iancu (2515, 17—23, 72, 78, 79, 625), Negrea Dan (2515, 17—21, 38, 72, 78, 79).

ARAD. S. m. 1. «Ion Slavici». Cl. 9. Bestea Cătălin (2507—09, 11, 15, 16, 18—21, 23, 32, 33, 36), Nadin Gheroghe (2505, 08, 18, 20, 25, 34, 50, 65, 73, 79), Savin Virgil (2554, 56, 60, 65, 67, 69, 71—73, 78, 79, 91, 611, 15, 24, 25).

S. m. 2. Cl. 9. Bogdan Florica (2505, 11, 18, 21, 39, 78, 79, 613, 20, 21, 23—25).

BĂBENI (Bistriţa, Piteşti). Pelepceac Vasile (Despre dezvoltarea radicalului în fracţie continuă).

BACĂU. S. m. 1. Cl. 8. *Chiriac Dumitru* (2539, 49, 52, 55, 67, 68, 78, 79, 81, 88, 89, 93, 600, 04, 10—13, 19—26, 28, 32—34, 49, 56, 64—66, 68, 69, 73, 74, 76, 77, E: 935—38, 41—50, 52, 55, 57, 60—64, 68, 69, 71—73). Cl. 9. *Grigoraş Vasile* (2379, 437, 39, 538—40, 45, 53, 54, 65, 67, 68, 70, 72—74, 76, 78, 79, 87—89, 607, 11—13, 19—21, 23—26, 29, P).

S. m. 2. Cl. 8. Schmelzer Greta (E: 928, 33, 41, 47, 48).

BAIA MARE, S. m. 1. Cl. 7. Vlahovici Nicolae (E: 935, 36, 41, 46—49, 51, 52, 57, 57, 60). Cl. 8. Butescu Mihai (E: 2579, 610, E:921—23, 28, 30, 32—36, 38, 41, 47, 39, 51), Costin Ecaterina (2579, 610, 11, E: 851, 921—23, 30, 32, 33, 36, 38, 46, 55), Farkaş Anton (2519, 23, 49, 79, 611, 24, 26, E: 935, 36, 40—42, 45—51), Griza Aurelia (2579, 610, 11, E: 921—23, 30, 32—36, 41, 46, 48, 49, 51, 52, 59), Mihăilescu Horia (2579, 610, 20, E: 921—23, 28, 30, 32—36, 38, 40, 41, 47—49, 51). Cl. 9. Moldovan Gheorghe (2518, 19, 23, 36, 38, 39, 49, 79, 613—15, 19, 24, 25), Vornicescu Nicolae (2472, 97, 505, 18, 19, 23, 36, 38, 39, 55, 68, 72, 79, 93, 613, 14, 20, 21, 25). Absolvent Munteanu Viorel (2608, 16, 19—26.)

BAIA DE ARIEŞ (Cîmpeni, Cluj). Cl. 7. Totolici Gabriel (2567, 68, 610, 11, 20, 21, 23—25).

BÎRLAD S. m. 1. Cl. 6. Mateescu Liliana (E: 922, 24—26, 28, 29, 33, 34, 44, 46, 47, 60). Cl. 8. Diaconu Veronica (2523, 39, 610, 11, E: 921, 23, 25, 30, 32—35, 38, 41, 47, 49, 51, 52), Ene Lucia (2524, 32, E: 921—23, 25, 30, 32—35, 38, 41, 47, 49, 51, 52), Tudor Mihaela (2523, 32, 610, 11, E: 921—23, 38, 41, 47, 49, 51, 52).

S. m. 2. Aftenie Lucia (2539, 53, 610, 15, E: 921, 23, 25, 27, 30, 32—35, 38, 41, 47, 51, 52), Alexa Magda (2504, 23, 32, 624, 25, E: 922, 23, 25, 27, 28, 30, 32—34, 47—49, 51, 52), Arghirescu Doina (2504, 23, 32, 39, 610, 11, E: 921—23, 25, 27, 30, 32—35, 38, 41, 47—49, 51, 52), Gîrneaţă Mariana (2523, 32, 624, 25, E: 922, 23, 27, 30, 32, 33, 34, 41, 47—49, 58), Guţu Sultana (2523, E: 921—23, 25, 27, 30, 32—35, 38, 47, 49), Hamza Nausica (2504, 23, 32, 39, 610, 11, E: 921—23, 25, 27, 30, 32—35, 38, 41, 47, 49, 51, 52), Hobinac Virginia (2504, 23, 32, 610, 24, 25, E: 922, 23, 25, 27, 30, 32—35, 41, 47—49, 51, 52), Iorga Georgeta (2504, 610, 11, 23—25, 32, E: 921, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 35, 41, 47—49, 51, 52), Mînăstireanu Maţiana (2623—25, 32, E: 921—23, 25, 27, 30, 32—35, 38, 41, 48, 51, 52), Pascu Adriana (2523, 32, 39, 604, 24, E: 922, 23, 27, 28, 32—35, 41, 47, 48) Răşcanu Elena (2523, 32, 610, 24, 25, E: 921—23, 25, 27, 32—35, 38, 41, 47—49, 71, 52). Cl. 9. Dorobăţ Niculina (2505, 23, 54, 79, 610, 11, 13, 20, 21, 25), Toporaş Maria (2504, 05, 19, 23, 54, 67, 79, 610, 13, 20, 21, 25).

BEIUŞ. S. m. 1. Cl. 8. Bodeanu Corneliu (2523, 79, E: 910, 22, 30, 35, 36, 38, 42, 44, 47, 48, 51, 52, 60, 61).

BISTRIŢA. Absolvent Verveagă T. (2500, 01, 39, 54—56, 61, 62, 65, 76—73, 76, 77, 79).

BOTOŞANI. S. m. 1. Cl. 10. Corneanu Constantin (2567, 68, 70, 76, 77, 79, 606, 21, 23—25).

BRĂILA S. m. 1. Cl. 8. Ştefănescu Vasile (2610, 21, 23—25, E: 935, 42, 47—52, 60). Cl. 10. Gomolea Aurelia (2354, 510, 29, 36, 38, 42, 50, 51, 54, 65, 70, 72, 76, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 91, 608, 10, 20, 23, 24).

S. m. 2. « Nicolae Bălcescu ». Cl. 8. Cosma Emilia (2610, 23, 24, E: 921—23, 32—35, 47, 49, 51, 60, 61). Cl. 9. Danciu Viorel (2521, 39, 68, 72, 78, 610, 12, 21, 23—25), Dumitriu Ion (2518, 20, 23, 33, 36, 68, 76, 78, 79, 610, 11, 21, 23—25), Gagu Victor (2518, 20, 21, 23, 33, 36, 68, 72, 78, 79, 610, 11, 20, 21, 23—25), Gheorghiu Dan (2539, 68, 72, 79, 610—12, 21, 23—25), Negulescu Ion (2520, 33, 39, 68, 72, 79, 610, 12, 21, 23—25). Cl. 10. Petru Gheorghe (2518, 23, 36, 68, 72, 78, 79, 610, 20, 21, 23—25).

BREAZA (Ploieşti). L. mil. « D. Cantemir ». Cl. 8. Bică Ioan (2549, 65, 79, E: 911, 14, 21—23, 30, 32—36, 40, 43, 46—48). Bogoi Marin (2504, 19, E: 921—23, 25, 30, 32—36 42, 43, 46—48). Cojocaru Ion (2504, 19, 49, E: 921—23, 25, 32—36, 43, 42, 46—48), Cotac Doru (2504, E: 921, 23, 25, 30, 32, 35, 36, 41—43, 46—48), Ianculescu Paul (2578, 79, E: 916, 35, 41, 42, 46—48,), Kendler Simion (2549, 78, E: 933, 34, 36, 41, 43, 46—8) Popovici Mihai (2578, E: 922, 23, 25, 32—36, 41—43, 46—48), Rădui Adalbert (E: 921, 25, 32—35, 42, 43, 47,) Răduţ Felician (2579, E: 921, 22, 23, 32—35, 43), Truşcă Florentin (E: 921, 23, 32—36, 41, 46—48), Ţugulea Petre (E: 921, 32—35, 42, 43, 46—48), Vlădoiu Emil (2579, E: 921, 35, 36, 42, 46—48). Cl. 9. Dinu Ştefan (2472, 515, 18, 23, 39, 54, 71, 78, 79), Ionescu Mircea (2500, 23, 28, 29, 39, 72, 76, 78, 79), Moldoveanu Tudor (2472, 82, 97, 515, 18, 20, 23, 28, 30, 54, 73, 78, 79), Năstase Teodor (2500, 09, 11, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 36, 54, 67, 73, 76, 78, 81), Oprică Octavian (2472, 81, 82, 97, 518, 20, 23, 54, 78, 81), Serghi Ion (2500, 09, 11, 15, 18, 21, 23, 36, 39, 54, 67, 70, 72, 76, 78, 81). Şerban Mircea (2471, 72, 99, 510—20, 23, 39, 76), Turburan Ion (2471, 72, 99, 518—20, 23, 28, 36, 67, 76, 79). Cl. 10. Chiş Alexandru (2518, 23, 35, 42, 50, 72, 79, 608, 21, 23, 25).

BUCUREŞTI. *Student*; *Popescu Paul* (Fac. Electronică) (2437, 73, 501, 38, 39, 42, 48—50, 52, 54, 56—58, 62, 64, 65, 68, 70, 72, 75, 77—79, 84, 85, 89, 90, 93, 94, 604, 07, 08, 13, 16, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 32, 33, 40, 41, 42, 47, 52, 55, P) *Absolvenţi*: Bărăitan Cristian (2517, 18, 23, 30, 34, 79, 611, 21—25, P), Buriman Adrian (2518—20, 23, 503, 50, 51, 67, 72, 75, 79, 98, 99, 600, 04, 08), Colireu Ignatz (2542, 44, 45, 4—52, 54, 57, 60, 65, 66, 68—70, 74, 79, 99), Gîrboveanu Constantin (2518, 21, 23, 36, 70, 73, 78, 81, 89, 90, 606, 10, 16), Harmata Mihai (2504, 39, 42, 49, 51, 52, 54, 65, 69—71, 75, 77, 82, 98, 600, 05, 08, 10, 11, 15), Isbăşescu Radu (2500, 01, 09, 15, 23, 30, 31, 33, 36, 38, 51, 54, 59, 65, 67, 69, 71—73, 75—79, 82).

S. m. 1. « *Nicolae Bălcescu* ». Cl. 10. Klecner Adrian (2468, 76, 81, 84, 528, 29, 38, 72, 88, 619—25, 27).

S. m. 2. Cl. 8. Teodorescu Mariana (2635, 38, 41, 45, 666, E: 935, 36, 38, 42, 48). Cl. 9. Diţă Honoriu (2468, 80, 82, 97, 507, 15, 18, 23, 33, 36, 38, 65, 67, 68, 76, 78, 79).

S. m. 4 « Aurel Vlaicu ». Cl. 9. Bădăliţă Luminiţa (2588, 89, 604, 13, 20, 21, 23—25), Dumitrescu Elisabeta (2550, 54, 58, 65, 67, 68, 72, 73, 75, 78, 79, 88, 89, 606, 11. 13—15, 19—21, 23—26, 33, 37, 41, 57, 68, 72, 74, 75). Cl. 10. *Marţiş Ioan* (2534, 39, 42, 50, 51, 53, 54, 60 62, 67—69, 73, 74, 78, 79 88, 600, 05, 06, 10, 13, 16, 20—24, 26—28, 33, 72).

S. elem. 5. Cl. 4. Florea Alexandru (E: 921, 33, 34).

S. m. 7 « Ioan L. Caragiale ». Cl. 10. Ciohodaru Lucia (2503, 05, 07, 15, 18, 20, 21, 23, 26, 28, 29, 31—33, 36, 39, 42, 49, 50, 54, 65, 67, 68, 71, 72, 77, 79).

S. m. 8. Cl. 8. Isbăşescu Mircea (2423, 33, 67, 75, 79, 80, E: 919, 26, 33, 36, 41—43, 45—48).

S. m. 10. Cl. 8. Predoiescu Marieta (2539, 54, 79, 89, 620, E: 935—38, 40, 41, 43, 46, 48). Cl. 9. Berceanu Tedi (2503, 32, 39, 49, 78, 619—21, 23—26, 64, 66, 72, 74, 77), Brînzaru Elena (2505, 17, 18, 21, 23, 30, 36, 38, 39, 43, 65, 68, 71, 79, 87, 611, 14, 15), Nicoară Ileana (2539, 54, 67, 68, 71, 79, 91, 613, 15). Cl. 10. Stanciu Loretta (2505, 31, 50, 65, 67, 79, 611, 20, 21, 23—25). Stepănescu Aurelia (2689, 97, 708, 13, 15, 20, 22, 31, 32, 59).

S. m. 11 « Dimitrie Cantemir ». Cl. 5. Pantazi Emanuel (E: 933—35, 44, 49, 51, 52, 57). Cl. 6. Giani Emanuel (E: 892—94, 909, 15, 19, 28, 29, 33, 35, 39—41, 43, 49, 50). Cl. 10. Ghinea Gheorgbe (2509, 18, 20, 21, 23, 54, 67—69, 79, 81), Schiopulescu Dan (2515, 20, 23, 28, 30, 37, 39, 49, 54, 60, 78).

S. m. 12. Cl. 8. Iovănescu Ruxandra (2505, 32, E: 921, 27, 28, 38, 41, 42, 46, 61). Cl. 9. Dragomirescu Mihai (2466, 68, 70—72, 74, 75, 77, 78, 80—85, 88—92, 95—99), Glas-

berg Vladimir (2500—03, 05, 07, 10—12, 15, 18—21, 23—25, 28—36, 38, P), Necşulea Dan (2503, 05, 18, 21, 23, 604, 15, 20, 24, 25), Savu Gabriel (2505, 18—21, 23, 28, 30, 32, 33, 36, 38).

S. m. 13. Cl. 8. Fierăscu Ştefan (E: 921—24, 26, 28—34), Georgescu Mihaela (2539, 79, E: 935, 36, 41—43, 46—48), Moga Ion (2567, 68, 79, E: 943, 47, 49, 51), Popescu Ovidiu (2480, 82, 567, 79, 610, 23, 24, E: 936, 42, 43, 48). Cl. 8. Aberbuch Vladimir (2500, 01, 03, 11, 15, 18—20, 28—30, 33, 36, 39, 49, 50, 54, 65, 67—70, 72, 73, 75—79).

S. m. 15. Cl. 9. Ionescu Sorina (2500, 01, 03, 07, 09, 28—33, 36, 38, 564, 67, 68, 79, 610, 14, 15, 19, 21, 25). Cl. 10. *Enescu Cornelia* (2503, 05, 08, 10, 11, 15, 17—21, 23, 28—31, 33, 36, 37, 39, 54, 55, 60, 62, 65, 67, 68, 70—72, 78—80, 82, 86, 89, 602, 04, 06, 07, 10, 11, 16, 19—21, 23—26, 28, 30, 32, P).

S. m. 17 « Matei Basarab ». Cl. 6. Gălăţeanu Şerban (E: 911, 13, 15, 24, 25, 29, 32, 43, 46, 61). Cl. 7. Olteanu Victor (2520, 39, 42, 55, 68, 78, 79, E: 935—37, 39, 40, 43, 46—48), Sapoşnic Mihai (2352, 578, E: 921, 23, 28, 32, 33, 35, 39, 40, 44, 45, 47). Cl. 8. *Panait Nicoleta* (2523, 35, 39, 42, 50, 88, 619—21, 23, 24, 26, E: 922, 27, 30, 32, 35—37, 41, 47, 48, 50—52, 60, 61, 63, 64). Cl. 10. Scherzer Edgar (2510—12, 15, 18, 20—23, 28, 36, 54, 65, 70, 72, 74, 613, 15, 16).

S. m. 18 « Mihail Eminescu ». Cl. 7. Pîrşan Liviu (E: 935, 36, 41, 45, 47—49, 51, 52). Cl. 8. Enişteanu Nicolae (2523, E: 927—29, 36, 37, 41, 43, 51, 61). Cl. 10. *Zamfirescu H.* (2418, 24, 27, 30—35, 38, 40, 42, 44—57, 61—64, 66, 68, 72, 76, 80, 89, 90, P).

S. m. 20. « Gh. Şincai ».

Cl. 10. Pildner Rudolf (2505, 18, 21, 36, 40, 51, 613, 20, 21, 23, 25, 26).

S. m. 22 « Gheorghe Lazăr ». Cl.8 Chirilă Rodica (2503, 11, 33, 67, E: 921, 23, 25, 27, 28, 32), Ciorănescu Ioana (2549, 54, 55, 71, 74, 91, 606, 13, 20, 23—25, P). Cl. 10. Gheorghiţă Mariana (2549, 68, 70, 85, 605, 08, 10, 11, 14, 20, 23—26, 30, 46, 63, 67—69, 72, 76, 80).

S. m. 23. Cl. 10. Cociu Mircea (2531, 42, 44, 49—51, 53, 65, 70, 73, 78—80, 84, 605, 06, 10, 11, 13, 16, 20—22, 24—26, 30).

S. m. 27. Cl. 10. Vodă Mihai (2550, 72, 77—79, 606—08, 10, 13, 22).

S. e. 115. Cl. 7. David Ileana (E: 921—23, 25, 26, 28—30, 32—36, 41, 48).

S. e. 145 Ghencea. Cl. 7. Marin Doina (E: 922, 23, 28, 34, 35, 40, 47, 49, 51, 52, 61).

BUHUŞI (Bacău). Absolvent Nicolau Gheorghe (2518, 21, 23, 31, 611, 21, 25, 67, 69—71).

BUZIAŞ (Lugoj). Cl. 8. Boldor Dorin (2610, 23, E: 933, 34, 49), Budulan Gheorghe (2610, E: 923, 25, 30, 32, 34, 35, 41, 51, 52,), Gofia Lucia (E: 902, 03, 11, 34, 35, 41, 47, 49).

BUZĂU. Văceanu Eleonora (2541, 49, 50, 65, 67, 68, 78, 79, 89, 94, 600, 06, 08, 11, 19, 20, 23, 25, 26, 30).

CALAFAT. Cl. 6. Dorobanţu Vasile (E: 921, 22, 28, 33). Cl.8. Petrescu Gheorghe (2523, 610—12, E: 913, 14, 16, 17, 21, 28, 32, 35, 36, 42, 47—49, 51, P). Cl. 9 *Militelu Ştefan* (2549, 54, 59, 62, 65, 88, 91, 600, 02, 05—07, 10—16, 19—26, 28, 30, 32, P), Stveneco Ion (2472, 89, 504, 09, 11, 18, 20, 21, 23, 28, 29, 33, 36, 38, 67, 74, 78, 79).

CĂLĂRAŞI S. m. « Nicolae Bălcescu ». Cl. 9 Alexandrescu Nicolae (2517, 21, 39, 76, 79, 88, 611, 13, 20, 21, 25). Cl. 10. Iliescu Virgil (2511, 17, 18, 21, 23, 76, 78, 79, 89, 96), *Strătescu Ion* (2546, 47, 49, 51, 52, 54, 55, 59, 64, 67—79, 81, 84, 87, 89, 94, 604, 07, 10—12, 14—16, 20—26, 28, 30).

Absolvenţi: Demciuc Anatolie (2534, 49, 50, 55, 69, 607, 08, 12, 25, 68, 69), Trandafir Mircea (2500, 01, 03—07, 09, 11, 13, 15, 18—20, 23, 28, 31, 33, 34, 36, 38).

CARANSEBEŞ (Timişoara). Cl. 8. *Giovani Azola* (2503, 09, 19, 23, 38, 39, 52, 61, 67, 68, 78, 79, 610, 12, 21, 23-25, 27, 30, E: 920, 22, 28, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 43, 45, 47—49, 51).

CARACAL (Craiova). S. m. 1. Amzu Dumitru (2521, 72, 73, 78, 79, 607, 10, 11, 13, 18, 20, 21, 23, 27), *Baştirescu Mugurel* (2539—43, 45, 48, 49, 52, 54—56, 58, 60, 64, 65, 67, 68, 70—74, 76, 78, 79, 81, 84, 87—91, 93, 94, 98, 600, 03, 04, 06, 07, 10—16, 19—29, 32, P), Blebea Şerban (2503, 09, 18, 21, 23, 55, 72—74, 78—80), *Dincă Gheorghe* (2439, 72, 502, 05, 08, 11, 15, 17, 18, 23, 28, 30, 39, 49, 54, 60, 65, 72, 73, 76, 78, 79, 88, 98, 606, 07, 11, 13, 15, 19—21, 23—26, 32, P), Leoveanu Constantin (2518, 23, 36, 72, 73, 79, 80, 88, 606, 10, 20, 21, 23—25), Madan Constantin (2505, 11, 20, 29, 33, 42, 49, 70, 72, 74, 79, 611—15, 25), Stratan *Gheorghe* (2504, 18, 21, 23, 28, 30, 36, 39, 49 53, 59, 65, 68, 72, 74, 78—81, 88, 91, 98, 99, 606, 10—16, 19—26, P). Cl. 10. *Niculescu Ştefan* (2480, 82, 539, 42, 49, 50, 52—54, 60, 62, 65, 67, 68, 70, 72—74, 77—79, 85, 87—91, 98, 604, 06, 08—30, 32).

CÎMPINA. S. m. « Nicolae Grigorescu ». Nicolescu Furtună (2509, 42, 49, 51, 54, 69, 87, 89, 90, 93, 98—601, 06, 07, 10, 11, 13, 24, 27, 32).

CÎMPULUNG MUŞCEL. Cl. 7. Savin Alexandru (E: 910, 23, 25, 31, 35, 36, 49—52, 62—65, 68, 71—73). Cl. 8. Bănică Constantin (2512, 23, 28, 29, 39, 49, 611, 19, 20, 23, E: 936, 41, 42, 46—49, 51, 52), Bascacov Georgeta (2503, 23, E: 921—23, 26, 30, 32—34). Cl. 9. Băluţă Mihai (2504, 05, 11, 15, 18, 21, 23, 29, 30, 36, 79).

CLUJ. S. m. 4. Cl. 8. Lungu Şerban (2503, 04, 12, 38, 55, 67, 610, 11, E: 924, 27, 28, 30, 38, 42, 43), Micu Radu (2504, 09, 12, 33,E: 924, 25, 27, 28, 30, 32—34). Cl. 10. Bîrzan Romanel (2587, 89, 91, 2602, 07, 11—13, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 26, 28—45, 66).

S. m. 5. Lelijok Ambrozie (2507, 09, 13, 19, 20, 24, 28, 38, 39, 50, 58, 60, 66—68, 70—72, 75, 78, 79).

S. ped. 2. Anul IV. *Indoleanu Ion* (2530, 36, 38, 39, 49, 54, 57, 67, 74, 76, 89, 91, 606, 09, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 24, 25, 27, 30, E: 929, 35, 38, 47, 48, P).

CONSTANŢA. S. m. 1. Cl. 8. Stavrositu Vasile (2455, 99, 504, 49, E: 913—15, 17—19, 21, 33, 34). Cl. 10. Anghel Constantin (2418, 20, 27, 29, 33—35, 50, 58, 60, 64, 74, 75, 78, 84, 500, 01, 12—14, 32, 42, 49, 50, 54, 64, 65, 68, 69, 72, 74, 75, 77—79, P), Dineţ Ioan (2470, 72, 78, 80, 90, 95, 97, 515, 18, 20, 23, 33, 34, 36, 39, 50, 78, 79). Absolvenţi: Dimciu Mihale (2518, 23, 28, 29, 32, 33, 36), *Lanuş Stere* (2494, 95, 512, 16, 25, 32, 35, 40, 42, 48, 50, 51, 65, 68, 74, 75, 77, 87, 94, 607, 08, 10, 13, 15, 16, 19—21, 23—25, 28, 30, 32, P).

S. m. 2. Cl. 8. *Rădulescu Mircea* (2523, 28, 38, 39, 45, 79, 81, 600, 07, 10—12, 19, 21, 23—25, E: 922, 26, 28, 37, 41, 43, 44, 49, 51, 52, 54, 55, 58, 60, 61, P).

CORABIA. Cl. 8. Văleanu Constantin (2549, 55, 78, 610, 23, E: 922, 33, 49, 51, 61, P). Cl. 9. Truică Marin (2552, 70, 79, 91, 610, 11, 21, 23, 25,). Cl. 10. Tănase Ion (2518, 23, 39, 50, 65, 67—79, 621, 22, 24, 25, 30, 64, 68, 69, 72, 74).

CRAIOVA. S. m. 1. « Nicolae Bălcescu ». Cl. 8. Nicolescu Alexandru (2554, E: 921—23, 25—28, 30—36, 42, 47). Cl. 9. Duţu Corneliu (2515, 18, 20, 21, 23, 30, 36, 39, 52, 65. 68, 72, 79, 76, 600, 06, 21—23). Cl. 10. Săseanu Vasile (2584, 88, 611, 12, 14, 19—26, 30),

S. m. 2 « Fraţii Buzeşti ». Cl. 8. Grama Nicolae (E: 920—24, 29, 32—34), Vlad Viorel (E: 923, 25, 26, 32, 34, 35, 49, 51, 54). Cl. 10. Piscati Sorin (2518, 23, 30, 36, 58, 67, 70, 78, 79, 624).

S. m. 3. Cl. 8. Cetăţeanu Rodica (2567, E: 921—23, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 46, 48). Absolvenţi: Bratcovici Marin (2567, 70, 79, 610, 21, 24, 25, 46, 59, 67—69, 75), *Dinuţ Teodor* (2502, 43, 52, 54, 56, 58, 59, 62, 68, 75, 76, 81, 87—89, 91, 98, 604—06, 08, 10—13, 15, 16, 19—26, 28, 30), Nicolaescu Constantin (2507, 26, 42, 49, 51, 52, 67, 68, 606, 08), *Tărîţă Ion* (2448, 81, 90, 91, 503, 25, 26, 29, 34, 35, 49—51, 54, 64, 65, 67—74, 77—79, 88, 91, 604, 06—08, 10. 11, P).

CURTEA DE ARGEŞ, Cl. 10. *Murăreci Fănică* (2539, 42, 49, 50, 52, 54, 61, 65, 67, 68, 70—72, 74, 79, 82, 88, 94, 99, 608, 10, 11, 13, 15, 16, 19—21, 23—27, 29).

DEVA. S. n. 2. Cl. 10. Ionescu Adrian (2250, 418, 89, 528, 29, 33, 65, 67, 87, 606, 08).

DOROHOI. S. m. 1. Cl. 8. Stoica Maria (2523, 33, 38, 79, E: 920, 23, 25, 32, 33, 36). Cl. 10. Ciucureanu Aurel (2472, 76, 88, 90, 91, 92, 97, 99, 505, 28, 72).

FOCŞANI. S. m. 1. « Unirea ». Cl. 8. Popa Nicolae (2509, 21, 23, 25, 28, 34—36, 38, 39, 42, 49, 65, 67, 68, 79, E: 926, 30, 36, 42, 47, 48). Cl. 9. Alexandrescu Ana (2589, 607, 11, 13), Ghiuş Viorel (2554, 55, 59, 69, 72—74, 76, 78—81).

GĂEŞTI. Cl. 9. *Ixaru Gr. L.* (2383, 90, 92, 94, 95, 98, 99, 404—07, 09—11, 13—16, 30, 32, 38, 41, 46—50, 52—59, 61-64, 72, 77, 78, 89), Cl.10. *Tîrtan Gabriel* (2379, 84, 90, 94, 99, 415, 16, 30, 44, 50, 65, 86, 95, 509, 10, 13, 17, 18, 20, 23, 28, 29, 31, 36, 39, 41—44, 49—54, 56, 65-79).

GALAŢI. Absolvenţi: Oprea Mircea (2523, 28, 36, 67, 76, 79, 608, 25), Pleşa Chiosi (2510, 17, 18, 20, 21, 23, 28, 30, 32—34, 36, 39, 56, 67—70, 72, 76, 78, 79, P).

Lic. de marină. Cl. 10. Nicolae Ion (2539, 42, 50, 51, 68, 72, 78, 79, 88, 608, 10, 11, 20—22, 25, 26, 28, 30), *Tudorache Mihai* (2522, 26, 29, 35, 38, 39, 42, 49—51, 53-55, 57, 60, 65, 67—70, 72, 73, 75, 77, 79, 88, 600, 08, 10, 11, 13—16, 19—26, 28, 30).

GHELAR (HUNEDOARA) Abs. Lăscuţoiu Virgil (2556, 70, 71, 73, 88, 89, 605, 10, 11, 13, 19—25, 27, P).

GIURGIU. S. m. 1. Cl. 8. Popescu Cristian (2505, 38, 78, 79, E: 940, 42, 49—51, 54, 60). Cl. 9. Profirescu Marcel (2502-05, 10, 15, 18, 19, 21—23, 28, 30, 33, 36). Cl. 10. Brişcă Virgil (2500, 02, 03, 05, 07—15, 18-23, 28—31, 33, 36, 53, 54, 67, 71, 79, 80), Drăgan Petru (2511, 28, 38, 39, 49, 67, 74, 78, 79, E: 920, 35, 36, 38—43, 45—48), *Vişinescu Mihai* (2381, 500, 01, 12, 38, 67, 70, 75, 78, 84, 87, 89—91, 98, 99, 604, 06, 07, 10—16, 19-21, 23-28, 30, P). Abs. Bătineţu Dumitru (2471, 72, 77, 78, 81—83, 85, 88—92, 97, 98, 500, 01, 03, 05—07, 09, 12, 13, 15, 18, 23, 38, P).

S. m. 2. Videanu Marioara (E: 921—23, 25, 28, 30, 32—36, 41—43, 47, 48, 503, 78, 79). Cl. 10. Serban Aurel (2483, 526, 31, 38, 39, 42, 50, 51, 53, 54, 65, 68, 70—73, 77—79, P).

HOREZU (Piteşti). Cl. 9. Ispas Mihai (2518, 39, 79, 80, 610, 11, 13, 15, 19, 23, 25). Cl. 10. Mateescu Gheorghe (2523, 32, 34, 36, 78, 79, 88, 619, 20, 23, 25, 26).

HUNEDOARA. Tehnician Doboli Daniel (2504, 05, 18—24, 29-33, 36, 38, 42, 49, 606, 08, 10, 23—27). Cl. 9. Demidov Mihai (2518, 21, 23, 24, 36, 79, 620), Hănzulea Nicolae (2515, 18, 21, 23, 36, 38, 72, 79, 624), Lazariu Victor (2518, 38, 611, 15, 20—24, 26), Oberländer Horst (2504, 05, 07, 09, 11, 15, 18, 19, 21, 23, 28, 32, 33, 36, 38), Plămădcală Valentina (2518, 23, 72, 79, 615, 20, 21, 24, 25). Cl. 10. Moţ Mircea (2530, 49, 50, 65, 7, 68, 78, 769).

IANCA (Galaţi). Cl. 10. *Bănică Radu* (2538—42, 46, 50, 54, 56, 65, 67—70, 72—76, 78, 7—, 87, 89, 91, 606—08, 10—17, 19—30), Caracoti Stere (2539, 50, 51 54, 65, 67—70, 76—79, 81).

IAŞI. Student Prodea Traian (2505, 07, 09, 10, 12, 13, 15, 17—20, 23, 30, 36, 54, 65, 70, 71).

S. m. 1 «Mihail Sadoveanu». Cl. 8. Cojocaru Mihai (2610, E: 935, 46, 47, 49—52, 58, 60, 61), Iancu Zisu (2523, 33, 49, 67, 610, 23—25, E: 935, 36, 46—48, 51, 58, 60, 61), Simovici Dan (2610, 11, 24, 25, 52, E: 938, 47, 49—52, 60, 61, P), Weisbuch Samuil (2532, 49, E: 931—23, 30, 33—35, 46, 52). Cl. 10. Sor Liber (2481, 89, 519, 30, 33, 36, 63, 509, 34, 79, 606, 07, 11).

S. m. 2. Cl. 9. Anghel Mariana (2503, 05, 11, 15, 18, 20, 21, 23, 28, 32, 33, 36, 39, 55, 68, 72, 78, 79, 610, 13, 20, 21). Absolvent Pavlovschi Nicolae (2505, 15, 18, 23, 29, 31, 34, 36, 49, 50, 54, 65, 68, 69, 78, 97, 604, 10, 11, 13, 16, 20—25, 30).

S. m. 3 «Costache Negruzzi». Cl. 8. Enache Mircea (2512, 624, 25, E: 923, 25, 28, 30, 32, 33, 51). C. 9. *Brînzei D.* (2540, 60, 64, 65, 67, 68, 70—72, 74, 78, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 94, 600, 04, 07, 10—15, 17, 25, 27, 28, 30, 32). Cl. 10. *Creţu Mihai* (2465, 66, 71, 72, 76—78, 80—82, 84, 85, 87, 89, 90, 95, 97, 500, 01, 03, 07—09, 11, 13, 15, 18—21, 23, 28—34, 36, 38—40, 42, 48, 50, 51, 54, 55, 57, 60, 65, 67—70, 72, 77—79, P), Dîţu Emil (2476—80, 84, 87, 89, 507, 15, 18, 19, 23, 29, 31), *Mihalache Adrian* (2500, 01, 03, 05, 08—13, 15, 16, 18—23, 28—33, 36, 39—41, 48, 50, 54,—57, 59, 60, 64, 65, 67—71, 73—75, 77—80), Stîrcea Adrian (2567, 68, 73, 78, 79, 610, 14, 20, 21, 23—25, 27).

S. m. 5. Cl. 8. Ciubotaru Corneliu (2539, 89, 610. E: 941, 47, 49—51, 53, 54, 61).

S. e. 7. Cl. 8. Weisbuch Ezra (E: 921, 22, 28, 39, 33—35, 40, 41, 44, 46, 49).

LUGOJ. S. m. 1. Cl. 9. *Şufană Constantin* (2505, 08, 15, 18, 19, 23, 28—30, 36, 70, 72, 78, 79, 88, 89, 606, 10, 11, 13, 15, 16, 20—25).

MEDIAŞ. Cl. 8. *Jilăveanu Gheorghe* (2439, 539, 42, 49, 50, 65, 67, 68, 71, 73, 79, 80, 88, 608, 10, 20, 21, 23—26, E: 935, 38, 46—52, 54—57, 60, 66—68, 72, 79). Absolvenţi Albu Traian (2505, 29, 33, 66, 70, 72, 77, 89, 608, 21), Olteanu Constantin (2505, 07, 19, 21, 24, 34, 36, 39, 42, 49, 50, 55, 65, 66, 68, 70, 77—79, 88, 89, 608, 11, 21—26).

MORENI (Cîmpina, Ploeşti). Cl. 8. Tudor Gheorghe (E: 905, 21—23, 25, 28, 29, 32—34).

MOINEŞTI (Bacău). Cl. 9. Munteanu Ion (2567, 70—72, 75, 78, 87, 613, 15, 24).

ORADEA. S. ped. Anul II. Hălmăgiu Maria (2477, 503, 05, 21, 23, 32, 35, E: 928, 29, 33), absolvent Taraş Bujor (2550, 55, 65, 67, 68, 78, 79, 625).

S. e. 10. Cl. 7. Uţu Dunas (E: 935, 42, 46, 48, 49, 56, 60, 63—65, 67, 68).

S. e. Săcădat. Cl. 7. Negruţ Ilie (E: 921—23, 25, 28, 29, 32—34, 49, 51, 52, 54, 57, 60, 61).

ORAŞUL STALIN. S. m. 1. Cl. 8. Climescu Mihai (2623, 24, 26, E: 922, 28, 32—35, 42, 47—49, 51, 60). C. 9. Vlădăreanu Cornel (2518, 23, 30, 39, 54, 68, 620, 21, 23, 25, 72, 78, 79).

S. m. 3. Cl. 8. Cioacă Maria (2523, 39, 49, 54, 79, E: 926, 33, 34, 36, 40, 42, 45—48).

S. m. 4. Istok Albert (2515, 74, 600, 06, 08, 11, 16, 19—21, 23—25, 30).

S. m. 5. Cl. 8. Florea Felicia (2578, 79, 89, 610, 11, 23, 24, 33, 49, E: 935, 36, 38, 46, 49, 51). Cl. 10. Cristofor Lucia (2503, 11, 15, 18, 21, 23, 29, 33, 36, 38).

PETREŞTI (Bacău). Cl. V. Puiu Alexandru (2509, 14, 15, 18, 26).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). S. m. 1. Cl. 7. Saifer Izu (E: 923, 28, 40, 42, 45, 46, 48, 49, 51, 52, 55, 56, 60, 61), Sburlea Aurel (E: 918, 24, 35, 40, 42, 44, 47, 48, 86), Tifescu Laurenţiu (E: 935—38).

S. m. 2. Reghiac Cornelia (2587, 90, 91, 602, 04, 06, 07, 10, 11, 13, 15, 18, 26, 28, 29, 32).

PETROŞANI (Hunedoara). S. m. 1. Cl. 8. Grozavu M. (2539, 49, 55, 60, 65, 67, 68, 78—80, E: 935, 36, 40, 42, 43, 45, 47, 48), Lepădatu Ilie (2579, 610, 23, 24, E: 921,

35, 36, 46, 49, 51, 52, 60), Popescu Gheorghe (2515, 610, 24, E: 923, 25, 32, 36, 42, 43, 48). C. 8. Crutarciuc Cornelia (2509, 11, 15, 18, 21—23, 30—32, 33, 36). Secția seral. Ionescu N. C. (2700, 26, 31, 42, 98, E: 976, 87, 90, 1009, 13).

PITEȘTI. S. m. 3. Cl. 8. Scarlat Nicolae (2539, 49, 67, E: 935, 36, 40—42, 44, 46—48). Abs. Sîrbulescu Paula (2500, 01, 03, 10, 12, 15—17, 20, 32, 33, 38, 40, 41, 69, 70, 82, 89, 611, 16, 19—26).

PLOEȘTI. Cl. 7. Babalia Florea (2624, E: 921, 28, 33—35, 47, 49—52), Gheorghiu Florin (E: 935, 44, 48, 51, 53—57), Gheorghiu Nicolae (E: 904, 15, 16, 18, 30, 32, 35, 36, 44, 45), Nicolaescu Mihaela (2620, 24, E: 921—23, 26—28, 31—35, 42, 44, 47—49, 51, 54—56), Patron Alexandru (E: 913, 19, 21, 22, 25, 28, 32—36).

S. m. 1. *« Ion L. Caragiale »*. Cl. 8. Baraș B. A. (2500, 01, 03, 11, 38, 49, 55, 89, E: 920, 52, 53, 57, 61), Coșoianu Traian (E: 940, 41, 44, 50, 51, 60), Dimoviceanu Paul (2445, 56, 57, 61—63, 519, 20, 23), Dumitrescu Vladimir (E: 935, 36, 41—49, 47—49, 51, 52, 61), Dumitriu Constantin (2523, 33, 49, 50, 78, 79, E: 924, 33, 35, 36, 40, 45—47), *Ene Dumitru* (2500' 01, 08, 22, 23, 39, 54, 60, 79, 91, 602, 10, 11, 20, 23, 24, 27, E: 931—23, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 40—43, 45—52, 54, 55, 58, 60), Fezi Adrian (2509, 23, 33, 39, 67, 78, E: 921—23, 25, 28, 30, 32—36, 38, 40, 41, 43, 46—49), Iacomi Mircea (2523, E: 920—23, 28, 32—35), Mușat Paul (2503, 09, 23, 910—19, 21—23, 25, 28, 30, 32—34), *Nicolescu Basarab* (2473, 84, 531, 39, 54, 60, 67, 85, 91, 602, 10, 11, 16, 24, 25, 27, E: 910, 13, 25, 26, 35—39, 41—43, 45—51, 54, 55, 58, 60), *Păbușcă Pavel* (2500, 01, 09, 11, 19, 23, 28, 31—33, 38, 39, 54, 60, 65, 67, 78, 79, 89, 91, 600, 02, 07, 10, 16, 19—21, 23, 24, 26, 27, E: 921—25, 28—30, 32—36, 40—47, 49, 51, 54—56, 58, 61), Radu Ioana (2560, 68, 79, 88, 89, 91, 602, 10—12, 16, 20, 23, 24, 27, E: 935, 36, 42—44, 47—52, 54, 55, 57, 60, 61), Ștefănescu Rodica (2468, 70, 99, 509, 23, E: 910—12, 14—19, 21—23, 26—34), Teodorescu Luiza (2470, 509, 79, 80, 91, 604, 10, 16). Cl. 9. Costineanu Mihai (2517—19, 39, 52, 54, 68, 71, 72, 78, 79, 613, 19, 20—26). Cl. 10. Angelescu Nicolae (2505, 15, 28, 30, 32, 39, 68, 70, 79, 91, 621), *Baltag Vasile* (2511, 13, 41, 46, 50, 52, 75, 83—85, 87, 89—91, 94, 603—08, 10—13, 15, 17, 18, 20, 21, 23—25, 27, 28, 32, P), Ciobanu Romeo (2510, 12, 18—23, 33, 36, 69, 79), Georgescu Adrian (2471, 73, 77, 97, 99, 503, 15, 17, 18, 20—23, 30, 31, 33, 34, 36, 38, 72, 79), Păncescu Florin (2406, 08, 18, 19, 23, 26, 30, 60, 61, 78, 80, 82, 89, 565, 72), Pinză Radu (2500, 05, 07, 09, 15, 18, 19, 21—23, 33, 36, 54, 60, 75, 84, 85, 87, 90, 95, 610, 11, 20—21, 27), Pop Ștefan (2505, 10, 11, 15, 18, 20, 21, 23, 28, 34, 36, 49, 54, 55, 67, 70—72), *Popescu Eugen* (2539—42, 49—51, 53, 54, 66—68, 70, 71, 73, 75, 78—80, 82, 84, 606—08, 10, 11, 19—27), Vulpescu Romulus (2448, 52, 57, 61, 62, 69, 72, 518). *Absolvenți:* Burlacu Gheorghe (2505, 07, 09, 12, 15, 18, 20, 21, 23, 28, 29, 39, 68), Cucu Ștefania (2588, 89, 611, 20, 21, 23—25, 33, 41, 49, 59, 68, 72, 75).

S. m. 3. Cl. 10. Marin Matia (2460, 68, 83, 89, 91, 526, 28, 29, 31, 36, 78, P).

PUCIOASA (Ploești). Cl. 9. Bănescu Steliana (2512—15, 17, 18, 21—23, 36), Banu Cornel (2518, 21, 23, 30, 31, 54, 62, 73, 75, 80, 610, 15, 20, 21, 24, 25, 76, 79), Oproiu Vasile (2502, 04, 05, 18, 21, 23, 30, 32, 36, 39, 62, 68, 78, 79), Pătrulescu Cornelia (2512, 15, 17, 18, 20—24, 36), Petrescu Dionisie (2515, 18, 23, 38, 39, 72, 79, 610, 13, 15, 20, 21, 24, 25), Absolvenți: Dumitru Petre (2518, 19, 23, 24, 25, 36, 42, 49—51, 60, 65), Leotescu Petre (2504, 05, 15, 18, 20, 21, 23, 36, 39, 72, 78, 79).

RĂDĂUȚI. S. m. 1. Cl. 9. Ionescu Gheorghe (2539, 49, 54, 58, 65, 68, 69, 71, 72, 78, 79). Cl. 10. Juravale Ilie (2530, 31, 35, 36, 42, 49, 51, 65, 67, 73, 78).

S. m. 2. Cl. 8. Weinstein Marcel (2499, 503, 23, 32, 33, E: 912—23, 25, 27—29, 31—34). Cl. 9. Rusu Ilie (2505, 12, 15, 18—21, 23, 35, 36, 38, 78). Cl. 10. Todosi Traian (2472, 78, 97, 500, 09, 10, 15, 18—23, 30, 31, 33, 36).

RÎMNICU VÎLCEA. S. m. 1. Cl. 8. Marinescu Dan (E: 921—23, 26, 28, 30, 32—34, 503, 11, 23). Cl. 9. Nicolau Constantin (2497, 518, 39, 68, 78). Cl. 10. *Bulucea Constantin* (2437, 500—03, 05, 10—13, 19, 24—26, 28—42, 46, 48—54, 56—60, 62, 75, 77—79, 81—85, 87—91, 94, 95, 98, 600, 03, 05—08, 10—30, 32, P, N), Urea Ion (2503, 05, 18, 30, 32, 34, 36—38, 54, 67, 77, 84, 610, 20—22, 24, 25, 27). Absolvent *Pițigoi Gheorghe* 2379, 500—02, 05, 06, 09, 11, 14, 15, 17—24, 26, 29, 30, 34—36, 38, 42, 49—52, 65, 70, 72, 79, 80).

ROMAN. S. teh. maiștri. Anul II. Vasia Niculăiasa (2539, 49, 68, 78, 79, 611, 13, 20, 21, 23—26, 72).

ROȘIORII DE VEDE (București). Cl. 8. Ciobanu Gheorghe (2509, 21—23, 25, 32—34). Cl. 10. Bozdog Marin (2517, 20, 24, 39, 42, 50, 60, 65, 66—68, 70, 76, 79, 87, 621, 24, 25), Rizescu Ilie (2474, 92, 502, 42, 52, 98, 600, 06—08, 16, 21, 25).

SARMAȘAG (Oradea). Maistru minier Ghelan Vasile (2500, 01, 03, 05, 07, 08, 10—13, 15—25, 28—34, 36, 38).

SÎNICULAUL MARE (Timișoara). Cl. 9. Peternell Oskar (2515, 18—20, 23, 33, 71, 74, 79).

SATU MARE. Cl. 9. Pop Gheorghe (2477, 88, 97, 510, 30, 32, 35, 36, 38, 39, 42, 49, 52, 54, 65, 67, 68, 70, 78).

SIBIU. S. e. 1. Cl. 5. Carp Cristian (E: 921, 28, 31, 33—35, 41, 44, 46, 47, 51). Absolvent Tulai Gheorghe (2502, 09, 24, 49, 41, 65, 72, 78, 627), Golescu Alexandru (2584—87, 89, 94, 604, 06, 07, 10—12), Salanți Anton (2503, 11, 14, 18, 23—25, 27, 35, 39, 42, 49—52, 66, 68, 70, 608).

SIGHET (Baia Mare). Cl. 8. Tomoiagă Dorin (2554, 79, 610, E: 935 40, 42, 46—51, P).

SIGHIȘOARA. S. m. 1. Cl. 8. Mola Victoria (2504, 32, 39, 49, 52, 61, 68, 79, 82, 88, 98).

SLĂNIC (Prahova). Ionescu Dumitru (P). Cl. 10. Soare Andrei (2589, 608, 10, 11, 14, 15, 20, 21, 23—27, 30).

SLATINA. S. m. 1. Cl. 10. *Florea Dorel* (2515, 25, 26, 28, 29, 35, 39, 42, 49, 50, 54, 61, 65, 67, 68, 70—72, 78, 84, 79, 87, 88, 606, 07, 10, 13, 15, 19—21, 23—27, 30), Osinceanu Dan (2509, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 30, 35, 39, 42, 49—51, P). Absolvenți: *Bărbulescu Marcel* (2540, 41, 46—50, 53—58, 60, 67, 68, 70—72, 75—77—79, 81, 84, 85, 87, 91, 94, 95, 97, 98, 604, 06, 07, 10, 15), Dorobanțu Valeriu (2584, 85, 87—89, 91, 98, 600, 04, 06, 08, 10, 11, 13, 15, 16, 19—27, 29, 30, 55, P).

SUCEAVA. S. e. Vlădeni-Botoșani. Cl. 7. Grosu Virgil (2501, 39, E: 921—24, 26, 28, 30, 32, 35, 41, 46, 47). Cl. 9. Marchitan Gheorghe (2502, 03, 12, 18, 19, 21, 23, 28, 33, 34, 36, 73, 79).

Lic. mil. «Ștefan cel Mare». Cl. 8. Socoliuc Gheorgbe (2579, 89, 607, 10, 12, 23, 24, E: 949—51, 57, 58, 61, P).

TECUCI. S. m. 1. Cl. 6. Marin Lucia (E: 923, 28, 34, 36, 38, 62). Cl. 8. Gavrilă Tudorica (E: 891, 901, 09, 11, 21, 23, 32—34, 47). Cl. 10. Sulugiuc Silvia (2505, 12, 18, 28, 29, 40, 60, 79, 89, 607).

S. m. 2. Cl. 6. Paiu Marioara (E: 922, 23, 28, 32—34, 36, 38), Cl. 8. Bradea Ion (2549, 600, E: 935, 36, 40, 45, 47—51, 61, 62), Sandu Eugen (2610, 20, E: 926, 31, 34—36, 40, 47—49, 52). Cl. 9. Druță Ioan 2504, 07, 12, 17, 18, 23, 74, 79, 618, 21, 25), Ignatovici Victoria (2549, 52, 60, 78, 81, E: 935, 40, 47, 49—52, 64, 72). Cl. 10. Mnnteanu Romeo (2515, 38, 39, 49, 67, 68, 72, 78—80, 88, 619—26, 29), Tătaru Ștefan (2505, 18, 21, 50, 72, 79, 84, 610, 16, 21, 25), Tudose Traian (2542, 65, 69, 78, 80, 84, 606, 16, 18, 19 26). Absolvent Hulea Ionel (2515, 18, 21, 23—25, 28, 34, 35, 50, 66, 68, 77—79).

TIMIȘOARA. S. m. 1. Cl. 9. Toma Corneliu (2482, 97, 505, 09, 15, 17—23 28—31). Absolvent Nica Constantin (2568, 70, 72, 78, 79, 99, 608, 15, 20—25, 30, P).

S. m. 3. Cl. 6. Netedu Violeta (E: 921, 22, 28, 29, 31, 33—35, 41, 46).

S. m. 5. Cl. 9. Rița Teofil (2503, 21, 28, 32, 55, 65, 73, 79). Cl. 10. Grăjdeanu Ștefan (2514, 18, 21, 22, 26, 30, 33, 38, 66, 70, 80, 81), Sîrbu Teofil (2504, 21, 38, 39, 42, 50, 65, 67, 70, 78—80, 606, 10, 11, 21, 23—25, 30).

TÎRGOVIȘTE. S. m. 3. Cl. 8. Dumitrescu Horia (2588, 607, 10, 11, 19, 21, 23—26), Ploscaru Mihail (2565, 67, 79, 607, 10, 11, 24, 27, E: 935, 36, 42, 43, 45, 47—49, 51, 52, 60). Cl. 9. Cănuță Vasile (2478, 99, 515, 36, 38, 39, 67, 77, 78, 611, 13, 20, 21, 23—56). Cl. 10. Popescu Mircea (2482, 97, 505, 19, 20, 54, 62, 70, 72, 74, 78, 606, 14, 20, 21, 23, 24, 26).

TÎRGU-JIU (Craiova). S. m. 2. Cl. 8. Băjmătară Gheorghe (2539, 54, 79, 80, E: 920, 25, 34, 35, 42—48), *Berca Eugen* (2509, 17, 30, 33, 39, 49, 52, 54, 55, 65, 67, 68, 77—80, 610, 11, 21—24, 26, E: 935, 36, 38, 42—49, 52, 60), Ciuhu Vasile (2579, E: 911, 21, 23, 27—29, 32—34, 36, 43, 45—48), Dănidoiu Gheorghe (2509, 21, 39, 42, 54, 65, 67, 78, 79, E: 927, 30, 35, 36, 42, 43, 45—48), Vasii Marcel (2455, 523, 39, 54, 79, E: 900, 11, 12, 14, 17, 20, 22, 23, 25, 32, 34, 35, 42, 44—48, 86), *Velicescu Mircea* (2470, 71, 79, 84, 88, 500, 01, 03—05, 07, 09, 15, 21, 23, 28, 31—33, 38, 39, 79). Cl. 9. *Anițescu Gheorghe* (2520, 22, 28, 29, 38, 49, 52—55, 65, 67—70, 72, 73, 79, 80, 89, 91, 606, 07, 15, 20, 21, 23—27. *Bozdog Ion* (2509, 12, 13, 20, 28, 29, 38, 39, 49, 52, 54, 65, 67, 68, 70, 72, 73, 75, 76, 78—80, 88, 615, 19—21, 23—27), Munteanu Barbu (2509, 18, 20, 21, 29, 39, 49, 52, 54, 65, 67, 70, 72, 73, 78—80), Popescu Alexandru Ionași (2471, 72, 74, 78, 80, 82, 84, 97, 509, 15, 18, 19, 23, 36, 39, 49, 52, 65, 67, 68), Pupăzan Gheorghe (2520, 29, 32, 39, 49, 52—55, 65, 67, 68, 70, 72, 73, 78—80), Sulea Dan (2515, 18—20, 23, 28, 33, 36, 38, 39, 49, 52, 67, 70, 72, 78—80, 615, 20—24, 27). Cl. 10. Calistrate Ștefan (2515, 18, 21, 23, 25, 29, 30, 39, 42, 49, 50, 54, 66—68, 70, 72, 73, 78, 79, 611), Comănescu Ion (2500, 15, 18, 25, 29, 39, 42, 49, 66—68, 70, 72, 73, 78, 79, 82). Absolvenți: Adam Gheorghe (2520, 22, 23, 34, 54, 65, 67, 72, 74, 602, 10, 20, 21, 23, 24, 26, 27), Burghiu Victor (2538, 40, 49, 51, 54, 88, 89, 608, 12, 20, 21, 24, 25, 30), Mărgineanu Const. (2500, 01, 05, 15, 18, 20—24, 28—30, 34).

S. m. 3. Hoară Horațiu (2539, 42, 50, 54, 65, 68, 70, 74, 77—79, 82, 606, 08, 10, 13, 16, 17, 19—26, 29, 30).

S. e. Teleşti-Birnici. Cl. 7. Gheorghe I. A. (E: 933, 35, 36, 39, 41, 44—52, 54, 58, 60, 61, 93).

TÎRGU MUREŞ. S. m. 1. Cl. 8. Antoniuc Bogdan (2480, 523, 621, 23—25, E: 910, 20, 26, 27, 29, 31, 35, 41, 42, 47—55, 58), Elekeş Bela (E: 911, 17, 21—23, 25, 28, 30—36), Ioan Corneliu (E: 923, 25, 35, 36, 42, 46, 47, 49, 51, 61), Vodă Alexandru (2480, 82, E: 910, 11, 17, 20, 23, 32—34). Absolvent *Matei Aurel* (2500—03, 05, 07, 09—11, 15, 17—19, 21—23, 25, 26, 28—31, 33—36, 38—51, 67—71, 74, 75, 78, 79).

S. m. 3. Cl. 9. Matei Didina (2509, 15, 17—19, 23, 25, 30, 35, 36, 39, 67, 68, 70, 74).

TÎRGU NEAMŢ (Bacău). *Precupeanu Theodor* (2500, 01, 05, 09—11, 14—23, 26, 28—34, 36, 49—52, 54, 55, 65, 68, 71—74, 77—79, 81, 84, 85, 88, 90, 91, 610, 11, 15, 16, 20, 21, 24, 27), Stîngu Nicolae (2505, 06, 09, 14, 18, 19, 21—26, 29—31, 34, 35, 42, 49, 50, 53, 56, 66, 72, 73, 77, 79).

TURNU MĂGURELE. Cl. 8. Carmaliga Iulian (2504, E: —21—25, 28, 30, 32—34), Panaitescu Aureliu (2504, 23, E: 921—25, 27, 28, 32—34). Cl. 10. Cojocaru Napoleon (2505, 07, 09, 14, 15, 24, 30, 49, 50, 54, 65, 66, 71, 72, 77, 78), Grecu Eftimie (2524, 26, 49, 52, 66, 88, 91, 98, 608, 10, 11, 13, 15, 16, 19—21, 23—25).

TURNU SEVERIN. S. prof. ucenici. An. I Hotăranu Dumitru (2539, 67, 610, E: 921—23, 28, 30, 32—35, 49, 51—53, 60, 61), Marica St. (P, Reguli noi pentru divizibilitatea cu 7 şi 11).

S. m. 1. Cl. 8. Iliescu Cleopatra (2523, 33, 610, E: 922, 33—35, 49, 51, 52), Oprică Verona (2579, 610, E: 935, 47—52, 54—56, 60, 61, 63, 65). Cl. 9. Alexe Alexandru (2536, 606, 10, 11, 13, 15, 20, 21, 24, 25, P), Lăzăroniu Gheorghe (2518, 21, 23, 36, 72, 79, 611, 13, 15, 25), Popii Virgil (2518, 21, 23, 36, 39, 79, 610, 24, 25), Suici Gheorghe (2615, 19—21, 23—25, 58, 64, 66, 72, 75,) Tănase Mihai (2539, 67, 68, 78, 79, 84, 615, 19, 21, 23—25). Cl. 10. Caragioiu Mircea (2519, 39, 50, 51, 67, 69, 73, 74, 610, 11, 15, 16, 20, 21, 24, 25, 30).

S. m. 2. Cl. 7. Niţulescu Lucian (E: 933, 34, 45, 47, 49—52, 54, 58).

VASLUI. Cl. 9. Lupu Ioan (2518, 22, 23, 28, 56, 75, 78—80, 607, 10, 11, 13, 15, 16, 20, 24, 32).

ZALĂU. S. m. 1. Cl. 10. Moroti Cornel (2502, 09, 14, 18, 21, 23, 25, 26, 30, 34, 35, 38, 42, 50, 54, 65, 67, 70, 78, 79, 610, 11, 20, 21, 23—25).

ŞCOLI DE 7 ANI.

GALAŢI. S. m. 2. Cl. 6. Moscolesco Eugen (E: 928, 33—35).

GIURGIU. S. m. 2. Cl. 7. Popescu Adina (E: 885—91, 92—905, 07, 09, 10—19. **Rezolvările nu sînt scrise de aceiaşi mînă !**).

IANCA (Galaţi). Cl. 7. Vlad Gabriel (E: 921, 23, 25).

IAŞI. S. m. 3 « Iacob Negruzzi ». Cl. 7. Homutescu Virgil (E: 911, 13, 15, 17, 21—25, 28, 32—34).

ORADEA. Cl. 7. Sereş Gh. (E: 875, 77, 83, 86, 88, 89, 92, 94, 911).

OLTENIŢA. Cl. 6. Dincă Mioara (E: 909, 11, 14, 17, 22, 23, 25, 32, 34, 42, 48).

ORAŞUL STALIN. S. e. 6. Cl. 7. Brad Doina (E: 910—19).

PIATRA NEAMŢ. S. m. 1 « P. Rareş ». Cl. 7. Fridman Sergiu (E: 917, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 32—34), Sburlea Aurel (E: 911, 17, 19, 21—23, 28, 32, 34, 38), Trifescu Laurenţiu (E: 910, 11, 13—15, 17, 18, 25, 28, 32).

PLOEŞTI. S. m. 1. Cl. 7. Gălăţeanu Adrian (E: 904, 05, 07—09, 11, 15, 23, 26, 28, 33), Gheorghiu Florin (E: 886, 88—91, 93, 905, 11, 14—16, 23, 32, 30), Gologan Radu (E: 911—15, 17, 19, 21—23, 25, 28—34), Marinescu Alex (2503, E: 885, 99, 900, 02—09, 11—19, 21—23, 26, 28, 30, 32—34), Nicolaescu Mihaela (E: 910—19), Pîrlianu Radu (E: 900, 02, 05, 09, 11, 16, 17, 21, 32, 33), Piticu Mihai (E: 893, 94, 97, 900, 02, 06, 08, 09, 11, 12).

S. m. 3. Cl. 7. Borcescu Lucica (E: 921, 23—25, 28, 30—35, 47, 48), Mandache Daniela (E: 911, 15—17, 19, 21, 23, 25, 28, 33—35, 47), Oniga Sanda (E: 899, 900, 02, 06—09, 13), Pampu Virginia (E: 886, 900—02, 05, 08, 11, 14, 16), Popescu Dan (E: 921, 23—26, 32—35, 47, 48), Stan Laurenţia (E: 901, 02, 21, 25, 32—34), Tomescu Alexandru (E: 885, 88, 89, 93, 94, 900—02, 07—09, 21, 34).

S. e. 14. Cl. 7. Gheorghiu Nic. (E: 891, 903, 07, 13, 15, 19, 21—23, 28, 31, 33, 34).

REDEA (Caracal). S. e. 1. Cl. 7. Mihăilescu Stelian (E: 911, 12, 14, 17, 18, 23, 32, 34, 38, 41, 44, 46, 48, P).

REŞIŢA. S. e. 1. Cl. 6. Brettner Mariana (E: 900, 02, 06, 08, 09, 18 22, 28, 29, 33, 34).

SIBIU. S. m. 3. Cl. 6. Scurtu Ionel (E: 912, 32—34, 41, 47). Cl. 7. Creja Viorica (E: 923, 25—27, 30, 32, 33), Dordea Dorina (E: 921, 23, 33, 34).

Orszá... Könyvtár

TELEȘTI (Tg. Jiu). S. e. Birnici. Cl. 7. Adam Gh. (2440, 45, 62, 79, 509, E: 899—903, 06, 08, 09, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 21—24, 26—34).

TIMIȘOARA. S. m. 3. Cl. 6. Netedu Violeta (E: 887, 92, 93, 97, 901, 02, 09).

Tg. Jiu. S. m. 2. Cl. 6. Ojoga Mircea (E: 886, 97, 901, 02, 11, 23, 28, 32—34). Cl. 7. Petrescu Ștefan (E: 900, 02, 03, 05—09, 11—15, 17, 19).

TURNU SEVERIN. S. m. 2. Cl. 7. Nițulescu Lucian (E: 921—24, 26, 28, 31—37, 40, 44, 48, 49, 50, 52).

STUDENȚI.

BUCUREȘTI. Calihman George (2395, 405—07, 09—11, 15, 17, 26, 29, 31, 33, 34, 38, 45, 46, 48, 50, 52, 55—58, 62—64), Dobre Ion (el. tehn.) (2419, 31, 32, 34, 67, 71, 75, 77, 88, 89, 507, 09, 11, 15, 18, 21—25, 28—31, 33, 36, P), Dobrescu Alex. (2515, 18—23, 36, 54, 67, 71, 73, 79, 87), *Landman Alexandru* (El. energ.) (2500, 01, 14, 17, 21, 25, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 42, 49, 50, 52, 54, 64—67, 71—73, 75, 79, 84, 98, 608, 10, 16, 25, 27), Petrovici Valeriu (« Asupra progresiilor aritmetice și geometrice »), *Virgolici Virgil* (Instal. și utilaj) (2470—72, 78, 80—85, 87, 95, 97—501, 03, 05, 07, 11, 15, 18—21, 23, 28—31, 33, 36, 39, 40, 49, 50, 54, 55, 57, 58, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 75, 77—79, 84, 85, 88—91, 94, 602, 04, 06—08, 10, 11, 13, 14, 19, 21, 23—25, 27, 29, 30, 32, P).

GALAȚI. Andrei Dan (2499, 504, 18, 23, 49, 52, 54, 57, 62, 65, 67, 68, 71—74, 77—80, 82), Căpran Petre (2489, 503—05, 09, 12, 17—19, 21—23, 25, 28, 32, 34—37, 39, 42, 4—51).

IAȘI. Mucileanu Vasile (Inst. pedag.) (2352, 466, 68, 70, 503—05, 21, 23, 32, 39, 54, 67, 68, 73, 78—80), Ogescu Valentin (Mat. Fiz.) (2392, 94, 95, 400, 04—10, 49—51, 54—57).

— Soluțiile primite pînă la 1 octombrie 1957 se vor anunța în numărul următor.

ERATĂ

— La problema 2811 în loc de *yx* se va scrie *yz*.

— La problema 2814 în loc de „din *C*" se va scrie „din *D*", iar în loc de „*CM* și *AM*" se va scrie „*DM* și *AN*".

— La problema 2321 se va adăoga la finele enunțului „ascuțitunghi".

— La problema E: 1030 se va șterge rîndul al doilea după punct.

★

Corespondenții G.M.F-B, sînt rugați să se aboneze din vreme pe anul 1958, individual prin oficiile poștale, pentru a nu risca să rămînă fără primele numere ale G.M.F-B.

„OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ" 1958

În atenţia tineretului din şcoli

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează «*Olimpiadele de matematică şi fizică* 1958» la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice, profesionale şi tehnice de maiştri.

Olimpiadele se vor desfăşura în trei etape:

— *etapa locală* (raională în Bucureşti), va avea loc pentru matematică la 2 martie, pentru fizică la 9 martie 1958;

— *etapa regională* va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 30—31 martie 1958;

— *etapa finală* va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta la matematică şi la fizică. Probele scrise (eliminatorii) şi orale au loc între 3 şi 6 mai 1958.

Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

„OLIMPIADA MICILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1957 — 1958"

La «Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni» (OMMF) pot participa elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a ale învăţământului elementar.

Olimpiada se va desfăşura în trei etape:

— *Etapa pregătitoare* (prin corespondenţă) are loc în primul şi al doilea trimestru al anului şcolar. În acest timp participanţii la OMMF vor răspunde la întrebările puse şi vor rezolva problemele publicate în «Gazeta matematică şi fizică» seria B sau în «Matematikai és fizikai lapók».

— *Etapa locală* se va desfăşura duminică 23 martie 1958 între orele 9 — 12, în fiecare oraş regional, raion sau pe centre de comune.

— *Etapa reigonală* se va desfăşura la 11 mai, în fiecare reşedinţă de regiune.

Elevii evidenţiaţi în ultima etapă vor primi diplome şi premii.

C. 1032 — Intreprinderea Poligrafică nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

L 1726 a

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Te
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CS
VYMENA - WY
TAUSCH - CME
Országos Műszaki
Könyvtár
TULAJDON

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII — decembrie 1957

12

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VIII, Nr. 12 — decembrie 1957

SUMARUL

		Pag.
1.	*A zecea aniversare a proclamării R.P.R.*	617
2.	*Asupra unor cazuri de egalitate şi de asemănare a triunghiurilor oarecare de Eugen Vişa*	619
3.	*Rachetele şi sateliţii artificiali ai Pământului în cercetările atmosferei superioare de E. K. Fedorov şi G. A. Skuridin*	625
4.	*Cîteva calcule elementare privitoare la satelitul artificial de Al. Stoenescu*	637
5.	*Note matematice*	641
6.	*Asupra activităţii extraşcolare la matematică la şcoala medie Nr. 1 din R. Vîlcea de C. Bulucea*	643
7.	*Regulamentul olimpiadelor de matematică şi fizică*	644
8.	*Olimpiadele de matematică şi fizică pe 1958 (programa analitică pe etape)*	648
9.	*Probleme rezolvate (2426, 2427; E: 915, E: 916)*	651
10.	*Probleme propuse (2883—2906)*	653
11.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 1052—E: 1066)*	656
12.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	658
13.	*Tabla de materii pe anul 1957*	667

ANUL VIII 12 DECEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; Bolangiu A., asistentă univ., Ionescu Bujor C., prof. univ.; Ionescu-Ţiu C., profesor, redactor pentru matematică; Muşat I., profesor; Neguleseu A., profesoară; Petrovanu A., profesor; Rădulescu N., profesor; Sacter O., conf. univ., redactor responsabil; Simionescu D. Gh., conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

OSZÁGOS·MÚSZAKI·KÖNYVTÁR·OR
1883

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VIII Nr. 12 decembrie 1957

A 10-a ANIVERSARE A PROCLAMĂRII R.P.R.

S-AU împlinit zece ani de viaţă ai Republicii noastre. Au fost ani de sforţări deosebite, adeseori dramatice, ani de fapte mari: înlăturarea monarhiei, naţionalizarea întreprinderilor industriale, miniere, bancare, de asigurări şi de transport, colectivizarea unei părţi însemnate din agricultură, lichidarea analfabetismului, reforma culturală, sînt greutăţi doborîte, sînt eforturi — dar mai ales izbînzi.

Marile înfăptuiri ale regimului nostru democrat popular au făcut ca prestigiul internaţional al Republicii Populare Romîne să crească necontenit. Cuvîntul ţării noastre răsună cu putere şi eficacitate în cadrul diferitelor foruri internaţionale.

În cei zece ani care au trecut de la proclamarea Republicii, poporul nostru, sub conducerea înţeleaptă a partidului a obţinut succese hotărîtoare în construirea bazei economice a socialismului. La sfîrşitul primului plan cincinal producţia industrială a depăşit de trei ori nivelul din 1938. În anii puterii populare au fost create noi ramuri de producţie industrială printre care se numără producţia de utilaj minier, de utilaj petrolifer, producţia de tractoare şi maşini agricole, de utilaj energetic, extracţia de minereu de uraniu etc. Putem spune că industria noastră socialistă produce astăzi cea mai mare parte a maşinilor şi utilajelor necesare economiei naţionale.

Este semnificativ faptul că faţă de anul 1938 producţia socotită pe cap de locuitor a crescut în 1956 la fontă, de la 8,5 la peste 33 kg; la oţel de la cca 18 la 44 kg.; la energia electrică de la 72,4 la 280,3 kWh; la gaz metan de la 19 la 248 m³; la ciment de la 32,7 la 124,3 kg.

Au fost obţinute de asemenea succese însemnate în domeniul dezvoltării agriculturii şi al transformării ei socialiste; sectorul socialist cuprinde astăzi, peste 42,8 % din totalul suprafeţei agricole a ţării şi peste 37 % din suprafaţa arabilă.

Dezvoltarea industriei şi a întregii economii naţionale este pusă în slujba ridicării continue a nivelului de trai al celor ce muncesc.

Venitul naţional al R.P.R. este astăzi de două ori mai mare decît în 1938, peste 70 % provenind din sistemul socialist al economiei naţionale. Aproape 3/4 din acest venit se alocă fondului de consum pentru satisfacerea nevoilor materiale şi culturale ale oamenilor muncii.

Experimentarea măsurilor privind îmbunătăţirea sistemului de salarizare şi normare a muncii dovedeşte că sîntem pe drumul cel bun în ce priveşte soluţionarea acestei probleme.

Avîntul culturii constituie unul dintre aspectele cele mai impresionante ale ridicării poporului nostru la o nouă viață. Regimul democrat popular a acordat o mare atenție dezvoltării învățămîntului, științei și culturii. Sub conducerea și îndrumarea partidului se formează o nouă intelectualitate provenită din rîndurile muncitorimii și ale țărănimii muncitoare.

În Republica Populară Romînă tineretului îi sînt larg deschise porțile către însușirea științei. Numărul școlilor elementare s-a mărit de peste șase ori în comparație cu anul 1939. Pentru minoritățile naționale a fost creată o vastă rețea de instituții în limba maternă cuprinzînd peste 3 400 școli de toate gradele.

În țara noastră unde s-a realizat egalitatea în drepturi a celor ce muncesc, de toate naționalitățile, se dezvoltă cu sprijinul moral și material al statului democrat popular, cultura naționalităților conlocuitoare. Maghiarii, germanii, sîrbii etc au revistele lor, școli și cărți în limba maternă, deplină posibilitate de manifestare în toate ramurile artei.

În anul școlar 1938—39 existau 16 institute de învățămînt superior care cuprindeau 29 facultăți cu 29 000 studenți. Astăzi în R.P.R. numărul facultăților și institutelor de învățămînt superior a crescut de aproape trei ori și jumătate, numărul studenților s-a triplat — azi avem cadre culturale și tehnice proprii în toate domeniile. Am avut două posturi de radioemisie, azi avem 16. Numărul teatrelor a crescut de două ori și jumătate, al cinematografelor de patru ori, al abonamentelor la radio de cinci ori.

În anii celui de-al II-lea plan cincinal, învățămîntul de toate gradele va cunoaște o dezvoltare deosebită. Învățămîntul de 7 ani se va lărgi astfel, încît să cuprindă cca 90 % din absolvenții școlilor elementare și se vor pregăti condițiile pentru trecerea în decursul cincinalului viitor la învățămîntul de 7 ani general și obligatoriu.

O excepțională însemnătate pentru progresul școlii romînești are Hotărîrea partidului și guvernului cu privire la îmbunătățirea învățămîntului de cultură generală. În anul școlar 1960—61, în învățămîntul de toate gradele vor fi cuprinși peste 2 700 000 elevi și studenți, cu aproape 600 000 mai mulți decît în anul școlar 1955—56.

Sărbătorind cea de-a 10-a aniversare a proclamării Republicii Populare Romîne, poporul nostru își îndreaptă cu dragoste și recunoștință gîndul către marea noastră prietenă Uniunea Sovietică. Intrarea în funcțiune a primului reactor nuclear experimental (iulie 1957) de 2 000 kW și terminarea lucrărilor de construcție și montaj a ciclotronului de 12,5 MeV (noiembrie 1957) livrat de către întreprinderile sovietice, sînt noi mărturii de felul cum se traduce în fapt această prietenie.

Oamenii muncii din țara noastră dau o înaltă prețuire prieteniei de nezdruncinat dintre patria noastră și țara care construiește comunismul. Poporul nostru este hotărît să apere și să dezvolte neîncetat această cucerire de mare preț. Totodată poporul nostru întărește prietenia cu Republica Populară Chineză și cu celelalte țări ale lagărului socialist.

Prietenia strînsă și colaborarea cu Uniunea Sovietică și cu toate țările lagărului socialist constituie chezășia de nădejde a independenței noastre naționale și a securității noastre de stat, chezășia victoriei depline a socialismului în patria noastră.

ASUPRA UNOR CAZURI DE EGALITATE ŞI DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR OARECARE

EUGEN VIŞA, Timişoara

ÎN manualele şcolare sînt expuse în mod obişnuit, trei cazuri principale numite şi cazuri clasice, de egalitate a triunghiurilor oarecare, precum şi unele aşa zise, cazuri speciale de egalitate a triunghiurilor dreptunghice.

De asemenea, şi tot în mod obişnuit, sînt expuse apoi, la timpul şi locul său, o teoremă fundamentală privitoare la asemănarea triunghiurilor oarecare, cele trei cazuri de asemănare a lor, ce corespund respectiv celor trei cazuri principale de egalitate a lor şi un caz special de asemănare a triunghiurilor dreptunghice, care — la rîndul său — corespunde unuia din cazurile speciale privitoare la egalitatea acestor triunghiuri particulare.

În cele ce urmează, ne propunem să facem cunoscute cititorilor acestei reviste, încă două cazuri de egalitate a triunghiurilor oarecare şi unul de asemănare, la fel de importante şi avînd tot caracterul unor cazuri principale, fiind chiar generalizări ale amintitelor cazuri speciale de egalitate şi asemănare a triunghiurilor dreptunghice, dar care, cel puţin în geometria elementară, sau nu sînt expuse deloc, sau sînt luate în considerare doar parţial şi de cele mai multe ori, prea tîrziu şi chiar şi atunci, numai incidental.

Potrivit denumirilor ce convenim a le da, cazurile respective de care vrem să ne ocupăm aici, sînt anume, cazurile IV şi V de egalitate şi cazul IV de asemănare a triunghiurilor oarecare.

Vom prezenta aceste cazuri pe rînd, iar ulterior şi drept încheere vom face apoi şi cîteva observaţii simple, dar nu mai puţin importante, asupra lor.

Cazul IV de egalitate a triunghiurilor oarecare: *Teoremă. Două triunghiuri oarecare sînt egale dacă o latură a unuia este egală cu o latură a celuilalt şi dacă două unghiuri ale celui dintîi, dintre care unul este opus laturii considerate, sînt egale respectiv cu unghiurile corespunzătoare ale celui de-al doilea triunghi*

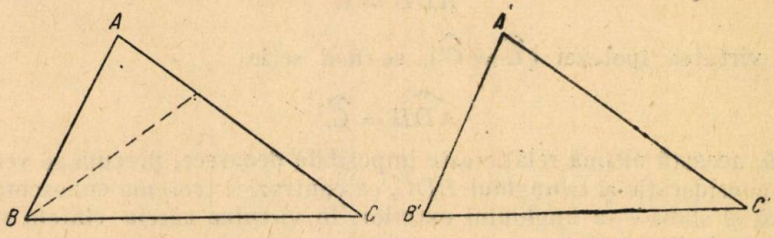


Fig. 1

Demonstrare. Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$. (fig. 1). Potrivit enunţului, va trebui să arătăm că, dacă între elementele acestor triunghiuri avem de pildă, relaţiile

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \qquad (1)$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$

$$\widehat{C} = \widehat{C'}$$

atunci ele sînt egale, adică

$$\Delta(ABC) = \Delta(A'B'C'). \qquad (2)$$

Ori pentru aceasta, după cum ne putem da imediat seama, va fi suficient să arătăm în particular, că

$$\overline{AC} = \overline{A'C'},$$

deoarece triunghiurile considerate avînd atunci

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad , \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{şi} \quad \hat{A} = \hat{A'},$$

vor fi egale, potrivit cazului I de egalitate *).

În adevăr, să presupunem contrarul, deci, că $\overline{AC} \neq \overline{A'C'}$, iar pentru fixarea ideelor, să mai presupunem că am dispus de notaţia elementelor triunghiurilor considerate, astfel încît să avem anume

$$\overline{AC} > \overline{A'C'}.$$

Luînd atunci, pe latura $\overline{AC}$ a triunghiului $\overline{ABC}$ punctul $\overline{D}$ astfel, încît segmentul $\overline{AD}$ să fie egal cu latura $\overline{A'C'}$ a celui de-al doilea triunghi în aşa fel ca să avem

$$\overline{AD} = \overline{A'C'},$$

obţinem un nou triunghi ABD, care tot potrivit cazului I de egalitate, ar trebui să fie egal cu triunghiul $A'B'C'$, pentru aceste două triunghiuri avînd anume

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad , \quad \overline{AD} = \overline{A'C'} \quad \text{şi} \quad \hat{A} = \hat{A'}.$$

Urmează atunci că în această situaţie ar trebui în particular să mai avem şi relaţia.

$$\widehat{ADB} = \hat{C'}$$

care în virtutea ipotezei ($\hat{C} = \hat{C'}$), se mai scrie

$$\widehat{ADB} = \hat{C}.$$

Însă, această ultimă relaţie este imposibilă deoarece, precum se vede uşor, luînd în consideraţie şi triunghiul BDC, ea contrazice teorema cunoscută — numită încă şi slabă — a unghiului exterior, în virtutea căreia sîntem siguri că avem tocmai dimpotrivă,

$$\widehat{ADB} > \hat{C}.$$

Urmează deci, că nu putem avea decît exclusiv $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ şi ca atare, triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ considerate sînt cu adevărat egale, teorema cazului IV de egalitate a triunghiurilor oarecare fiind astfel, demonstrată.

---

*) În dezvoltarea geometriei, bazată strict pe axiomatica lui *Hilbert*, cazul I de egalitate a triunghiurilor oarecare este acela în care triunghiurile respective au cîte un unghi egal cuprins între laturi respectiv egale; iar cazul II, acela în care ele au cîte o latură egală şi unghiurile alăturate respectiv egale.

Cazul V de egalitate a triunghiurilor oarecare. Teoremă. Două triunghiuri oarecare sînt egale dacă două din laturile unuia sînt respectiv egale, cu două laturi ale celuilalt și dacă unghiul primului care se opune celeia dintre cele două laturi alese considerate ale sale care nu este mai mică decît cealaltă, este egal cu unghiul corespunzător al celui de al doilea triunghi.

Demonstrare. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ (fig. 1). Spre deosebire de cazul precedent, va trebui să arătăm de astă dată, că dacă între elementele acestor triunghiuri avem de pildă, relațiile

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \overline{BC} &= \overline{B'C'} \\ \overline{AB} &> \overline{BC} \\ \hat{C} &= \hat{C}', \end{aligned} \tag{3}$$

atunci ele sînt egale, adică

$$\Delta(ABC) = \Delta(A'B'C'). \tag{4}$$

Ori, după cum ne putem da iarăși seama imediat, pentru aceasta va fi și acum suficient să arătăm în particular, că

$$\overline{AC} = \overline{A'C'},$$

deoarece triunghiurile considerate, avînd atunci

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \quad , \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{și} \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

vor fi egale tot potrivit, cazului întîi de egalitate.

Într-adevăr, să presupunem contrarul, deci că $\overline{AC} \neq \overline{A'C'}$ și chiar că $\overline{AC} > \overline{A'C'}$, ceea ce este iarăși posibil, pe baza unei alegeri convenabile privitoare la notarea elementelor celor două triunghiuri considerate.

Luînd atunci pe latura $\overline{AC}$ a triunghiului ABC, punctul D astfel, încît să avem de astă dată

$$\overline{DC} = \overline{A'C'},$$

obținem triunghiul BDC, care — potrivit aceluiași caz de egalitate — ar urma să fie egal cu triunghiul $A'B'C'$, pentru aceste două triunghiuri avînd relațiile

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \quad , \quad \overline{CD} = \overline{A'C'} \quad \text{și} \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

Însă, din egalitatea triunghiurilor BDC și $A'B'C'$ ar mai urma să avem în particular

$$\overline{DB} = \overline{A'B'},$$

adică, ținînd seama de ipoteză,

$$\overline{DB} = \overline{AB}.$$

Pe de altă parte, luînd în considerație și unghiul ADB, pe baza teoremei unghiului exterior (cea slabă), avem

$$\widehat{ADB} > \hat{C}$$

şi cum, în triunghiul ABD, isoscel, precum arată relaţia precedentă, $\overline{DB} = \overline{AB}$ avem încă, drept urmare, $\hat{A} = \widehat{ADB}$, rezultă apoi

$$\hat{A} > \hat{C}.$$

De aici, pe baza uneia din teoremele privitoare la dependenţa dintre laturile şi unghiurile unui triunghi, ar urma în sfîrşit, să avem relaţia

$$\overline{BC} > \overline{AB},$$

care este însă în contradicţie cu ipoteza ($\overline{AB} \leqslant \overline{BC}$).

Rezultă prin urmare, că neapărat $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ şi deci, potrivit celor ce preced, triunghiurile considerate ABC şi $A'B'C'$ sînt în adevăr egale, teorema cazului V de egalitate a triunghiurilor oarecare fiind astfel şi ea, demonstrată.

Cazul IV de asemănare a triunghiurilor oarecare. Teoremă. Două triunghiuri oarecare sînt asemenea dacă două laturi ale unuia sînt proporţionale cu două laturi ale celuilalt şi dacă unghiul primului triunghi, care se opune aceleia dintre cele două laturi considerate ale sale, care nu este mai mică decît cealaltă, este egal cu unghiul corespunzător al celui de-al doilea triunghi.

Demonstrare. Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ (fig. 2). Presupunînd, potrivit ipotezei, că între elementele lor avem de pildă, relaţiile

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}\ ; \qquad (5)$$

$$\overline{AB} > \overline{BC}$$

$$\hat{C} = \hat{C'}$$

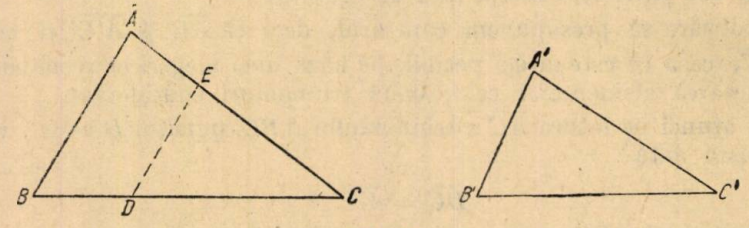


Fig. 2

trebuie să arătăm că în acest caz, respectivele triunghiuri sînt asemenea, adică,

$$\Delta\,(ABC) \sim \Delta\,(A'B'C').$$

Pentru aceasta, luăm pe semidreapta cu origina în C, şi care serveşte ca suport al laturii $\overline{BC}$, punctul D astfel, încît să avem

$$\overline{DC} = \overline{B'C'},$$

iar prin acest punct D ducem paralela $\overline{DE}$ la latura $\overline{AB}$ pînă la intersecţia ei în E cu semidreapta suport corespunzătoare a laturei $\overline{AC}$.

Potrivit teoremei fundamentale privitoare la asemănarea triunghiurilor oarecare, triunghiul ABC va fi asemenea cu noul triunghi EDC astfel obţinut, adică

$$\Delta\,(ABC) \sim \Delta\,(EDC).$$

Scriind atunci proporționalitatea laturilor omoloage ale acestor triunghiuri asemenea, avem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

de unde, avînd în vedere că $\overline{DC} = \overline{B'C'}$ și ținînd în același timp seama de prima relație din ipoteză, rezultă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}.$$

Deci, precum se vede acum,

$$\overline{ED} = \overline{A'B'}.$$

Pe de altă parte, a doua relație din ipoteză, în virtutea celei dintîi, ne dă

$$\overline{A'B'} \geqslant \overline{B'C'}$$

încît, avînd în vedere prima construcție făcută ($\overline{DC} = \overline{B'C'}$) și relația precedent găsită ($\overline{ED} = \overline{A'B'}$), deducem

$$\overline{ED} \geqslant \overline{DC}.$$

În felul acesta constatăm că între elementele triunghiurilor EDC și $A'B'C'$ avem în definitiv, relațiile

$$\overline{ED} = \overline{A'B'}$$
$$\overline{DC} = \overline{B'C'}$$
$$\overline{ED} \geqslant \overline{DC}$$
$$\widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Deci, potrivit cazului V de egalitate a triunghiurilor oarecare, aceste triunghiuri sînt egale, adică

$$\Delta\,(EDC) = \Delta\,(A'B'C').$$

Acum, din faptul că

$$\Delta\,(ABC) \sim \Delta\,(EDC) \quad \text{și} \quad \Delta\,(EDC) = \Delta\,(A'B'C')$$

rezultă în sfîrșit, la fel ca în alte cazuri similare, că

$$\Delta\,(ABC) \sim \Delta\,(A'B'C')$$

și astfel, teorema cazului IV de asemănare a triunghiurilor oarecare este ea însăși demonstrată.

Observații. 1° În demonstrațiile teoremelor privitoare la cazurile IV și V de egalitate a triunghiurilor oarecare, nu ne-am raportat la teorema «tare» a unghiului exterior, adică la aceea în virtutea căreia un astfel de unghi al unui triunghi este egal cu suma unghiurilor interioare ale acelui triunghi, nealăturate respectivului unghi exterior considerat, pentru a pune în evidență că întocmai ca și celelalte teoreme privitoare la primele trei cazuri principale de egalitate a triunghiurilor oarecare acestea sînt și ele, cum se zice, niște teoreme

de geometrie absolută, adică independente de axioma paralelelor (postulatul lui *Euclid*).

Cît privește la rîndul său, teoremele privitoare la diferitele cazuri de asemănare a triunghiurilor oarecare, inclusiv aceea de acum privitoare la cazul IV de asemănare, este evident că ele nu mai sînt nicidecum teoreme de geometrie absolută, ci exclusiv teoreme de geometrie euclidiană.

2° Cu toată deosebirea esențială mai sus relevată, care există între grupa teoremelor privitoare la cazurile de egalitate a triunghiurilor și grupa teoremelor privitoare la cazurile de asemănare a lor, este în schimb demn de remarcat faptul că, exceptînd cazul IV de egalitate, fiecăruia dintre celelalte cazuri de egalitate îi corespunde cîte unul de asemănare și că teorema privitoare la fiecare din aceste cazuri de asemănare se demonstrează cu ajutorul unei aceleiași teoreme fundamentale și a teoremei cazului de egalitate respectiv corespunzător.

3° Cît privește lipsa unui caz de asemănare corespunzător cazului IV de egalitate, aceasta se explică la rîndul său prin faptul că respectivul caz mai mult formal inexistent, este absorbit de acela potrivit căruia două triunghiuri sînt asemenea dacă pur și simplu două unghiuri ale unuia sînt egale cu două unghiuri ale celuilalt.

4° Dacă particularizăm convenabil una sau alta din teoremele cazurilor IV și V de egalitate, cît și teorema cazului IV de asemănare și, dacă la momentele oportune ținem în același timp seama de faptul că în orice triunghi dreptunghic ipotenuza este cea mai mare dintre laturi, deducem foarte ușor toate teoremele privitoare la diferitele cazuri « speciale » de egalitate sau de asemănare a triunghiurilor dreptunghice.

Așa de exemplu, prin particularizările teoremei generale privitoare la cazul IV de egalitate, se deduc două dintre cele care privesc cazurile speciale de egalitate a numitelor triunghiuri dreptunghice și anume:

a) *Două triunghiuri dreptunghice sînt egale, dacă ipotenuza și un unghi ascuțit al unuia sînt egale respectiv cu ipotenuza și un unghi al celuilalt.*

b) *Două triunghiuri dreptunghice sînt egale, dacă o catetă a unuia și unghiul ascuțit opus ei sînt egale respectiv cu o catetă a celuilalt și unghiul ascuțit opus acestei de-a doua catete.*

Particularizînd apoi, în mod convenabil teorema cazului V de egalitate a triunghiurilor oarecare, deducem foarte simplu și ultima din totalul de trei teoreme cunoscute cu privire la diferitele cazuri speciale de egalitate a triunghiurilor dreptunghice care este:

c) *Două triunghiuri dreptunghice sînt egale, dacă ipotenuza și o catetă oarecare a unuia sînt egale respectiv, cu ipotenuza și una, oarecare, din catetele celuilalt.*

În sfîrșit, dacă mai particularizăm în modul potrivit și teorema cazului IV de asemănare a triunghiurilor oarecare, tot la fel de ușor putem regăsi pe aceea privitoare la unicul caz special de asemănare a triunghiurilor dreptunghice care este la rîndul său, următoarea:

d) *Două triunghiuri dreptunghice sînt asemenea dacă ipotenuza și una din catetele unuia sînt proporționale respectiv cu ipotenuza și una din catetele celuilalt.*

RACHETELE ŞI SATELIŢII ARTIFICIALI AI PĂMÎNTULUI ÎN CERCETĂRILE ATMOSFEREI SUPERIOARE

E. K. FEDOROV
membru corespondent al Academiei de Ştiinţe U.R.S.S şi
G. A. SKURIDIN
candidat în ştiinţe fizico-matematice

PARTICULARITATEA remarcabilă a studierii straturilor superioare ale atmosferei în cursul anului geofizic internaţional, o constituie larga folosire în acest scop a rachetelor şi întrebuinţarea pentru prima dată a sateliţilor artificiali ai pămîntului ca instrumente geofizice.

Prin straturile superioare se subînţelege de obicei domeniul care se întinde de la o înălţime de 10—15 km pînă la graniţa atmosferei (700—1 000 km). Straturile superioare constituie în total doar 8—10% din întreaga masă a atmosferei şi tocmai aici se desfăşoară o serie de fenomene excepţional de interesante.

Clarificarea schimbării intensităţii cîmpului magnetic al pămîntului a diferitelor sisteme de curenţi în atmosferă, a naturii radiaţiei corpusculare a soarelui, rolul razelor ultraviolete şi Röntgen în formarea ionosferei, influenţei razelor cosmice asupra proceselor din atmosfera superioară, studierea structurii chimice a ionosferei, a gradului de recombinare a atomilor şi moleculelor în diferite straturi, frecvenţele ciocnirii electronilor liberi — constituie o enumerare, care este departe de a fi completă a problemelor ştiinţifice care urmează să fie cercetate sistematic.

Pentru atmosfera superioară este caracteristică prezenţa unor atomi şi molecule puţin stabile, chimic active, lungimi mari ale parcursului liber al moleculelor şi numărul lor relativ mic într-o unitate de volum, starea deosebit de ionizată a straturilor întregi ale atmosferei, manifestarea unor procese complexe de disociere şi recombinare a atomilor şi moleculelor etc. De aceea era necesară o nouă metodică pentru efectuarea măsurărilor respective în scopul cercetării straturilor superioare ale atmosferei, care există doar în arsenalul experienţei fizice. Au fost aplicate în primul rînd cele mai noi realizări ale fizicii vidului înaintat, ale descărcării în gaze, a plasmei electrice.

Varietatea proceselor fizice şi chimice legate între ele pledează în favoarea caracterului extrem de complex al tabloului fizic al atmosferei superioare şi pentru înţelegerea şi explicarea legilor ei este importantă nu numai acumularea unor noi date experimentale, ci studierea teoretică mai profundă a proceselor ce au loc în mediile de tipul plasmei, în special în baza unui nou capitol al fizicii teoretice şi anume magnetohidrodinamica. Totodată materialele obţinute prin observaţii terestre sînt insuficiente în acest scop. Din cauza absenţei unei serii de date, teoria existentă asupra provenienţei aurorii polare, a ionosferei şi a fluctuaţiei cîmpului magnetic terestru se găseşte în stare nefinită. Nu există o teorie care să explice în mod satisfăcător spectrul energetic al particulelor care sînt aruncate din soare, trec distanţa dintre soare şi pămînt, intră în atmosferă şi provoacă aureole polare. Rolul relativ al razelor ultraviolete şi Röntgen în formarea ionosferei nu este încă stabilit. Nu exista o certitudine deplină în justeţea interpretării măsurătorilor ionosferei efectuate de pe suprafaţa pămîntului. Pentru înţelegerea totală a bilanţului energetic şi a circulaţiei generale din straturile superioare ale atmosferei, trebuie să cunoaştem la ce înălţimi, în ce cantităţi şi în ce fel de domenii spectrale se absoarbe sau se

iradiază energia. Nu este clarificată legătura dintre fenomenele care au loc la o înălțime mare și la o înălțime mică.

Evident că pentru rezolvarea tuturor acestor probleme este necesar să efectuăm experiențe de o factură nouă și în primul rînd cu folosirea rachetelor cu rază mare de acțiune.

Rachetele au început să fie folosite în anul 1946 ca un instrument pentru efectuarea cercetărilor geofizice, fizice și astrofizice; astfel, de exemplu, s-au folosit la început în SUA rachetele V-2 capturate de la germani.

Din aprilie 1946 pînă în decembrie anul 1952 s-au efectuat la poligonul american White Sands, 47 lansări de rachete tip V-2; dintre ele 26 au atins înălțimea de 120 km, iar 2 au atins înălțimea de 160 km. Pe același poligon s-au lansat 91 rachete de tipul « Aerobe »; 49 din aceste rachete au atins înălțimea de 80 km, iar racheta « Aerobe-He » a atins înălțimea de 288 km. Mai tîrziu rachetele grele « Veking » au atins înălțimea de 253 km.

Un eveniment important în tehnica rachetelor a fost lansarea rachetei în două trepte « Bumper », care se compunea din rachetele V-2 și Vak — Korporal ». Această rachetă a atins la 24 februarie anul 1949 înălțimea de 400 km. Recent a fost stabilit un nou record. La baza VVS, SUA în Statul Florida, a fost lansată o rachetă în trei trepte care a atins o înălțime de 1 120 km.

Programul cercetărilor cu rachete cuprindea numeroase probleme ale fizicii straturilor superioare ale atmosferei. În cursul primelor lansări a rachetelor au fost măsurate presiunea aerului cu ajutorul manometrelor cu vid de tip diferit, intensitatea razelor cosmice, au fost cercetate spectrele radiației solare în domeniul ultraviolet și au fost identificate pentru prima oară razele Röntgen în spectrul soarelui. Au fost obținute fotografii interesante ale suprafeței pămîntului, luate de la o înălțime mare.

Sondarea cu rachetă a atmosferei se dezvoltă rapid în diferite țări. Și în URSS s-a efectuat un număr mare de lansări de rachete pentru cercetări.

Unul din scopurile principale ale sondării cu racheta este obținerea unor date despre parametrii fizici ai straturilor superioare ale atmosferei, cum sînt densitatea aerului, compoziția chimică, temperatura, caracteristicile electrice ale straturilor ionizate și altele. Aceste date se obțin în urma măsurării directe pe loc sau captarea unei cantități oarecare de aer pentru analiza ulterioară.

Cercetătorii americani și englezi instalează aparatele de măsurare în partea frontală a rachetei. Savanții sovietici au elaborat, alături de folosirea părții frontale, containere speciale cu aparatură, care se separă de rachetă în scopul înlăturării influenței corpului rachetei care denaturează indicațiile aparatului.

Containerul cu aparatura este o construcție cilindrică împărțită în trei secțiuni. În secțiunea inferioară — etanșeizată — se plasează sursele de alimentare, aparatele de măsură și un aparat fotografic special, pentru fotografierea indicațiilor lor, un mecanism de programare care dirijează acțiunile tuturor aparatelor, contoare și motoare. Secțiunea medie a containerului este ajurată; în ea sînt așezate tuburi pentru luarea probelor de aer, manometre și alte aparate care necesită comunicare cu mediul exterior. Secțiunea superioară reprezintă un vas ermetic în care se găsește parașuta. Întregul container se plasează într-o mortieră fixată pe suprafața laterală a corpului rachetei și acoperită în partea frontală cu un capac aerodinamic. La o înălțime dată, după ce motorul rachetei a încetat să funcționeze și racheta se mișcă conform inerției, containerele se aruncă cu încărcăturile speciale din mortieră. Obținînd o viteză suplimentară mică (față de rachetă) ele merg înainte, deviind puțin lateral, și se găsesc tot

timpul într-un aer neimpurificat de gazele rachetei. Mecanismul de programare pune în funcţiune la timp util diferite aparate a căror indicaţii sînt înregistrate continuu pe pelicula fotografică. După ce containerul a atins înălţimea limită el cade. La o înălţime de 10—12 km se deschide automat vasul cu paraşuta şi paraşuta care se deschide asigură o aterizare în bune condiţii pe pămînt a întregului container.

Compoziţia chimică a aerului care se găseşte în bușoane se determină prin analiza spectrală. În urma unor numeroase măsurători s-a stabilit că pînă la înălţimile de 95 km nu se observă deosebiri în raportul oxigenului şi azotului în comparaţie cu nivelul suprafeţei terestre. În acelaşi timp procentul gazului cel mai greu—argonul— este ceva mai mic, decît la suprafaţa pămîntului. Putem deci presupune că la această înălţime începe schimbarea compoziţiei pe gaze adică «stratefierea» atmosferei.

Rezultatele măsurătorilor directe a presiunii la înălţimi de la 80 pînă la 100 km efectuate de cercetătorii sovietici şi americani coincid bine între ele şi cu valorile calculate.

S-au obţinut rezultate interesante în cazul măsurătorii pe rachete a intensităţii razelor cosmice şi a părţii ultraviolete a spectrului solar. Pentru astfel de măsurători nu este atît de importantă «puritatea» mediului inconjurător, astfel că aparatele de măsură se instalează de obicei pe racheta propriu-zisă, adică în secţiunea din faţă a părţii frontale. Fotografiile spectrului solar luate în domeniul ultraviolet se păstrează în casete bilndate în racheta care s-a sfărîmat la cădere. Datele referitoare la razele cosmice cît şi rezultatele multor alte măsurători se transmit în timpul zborului de pe rachetă prin radio şi se înregistrează la staţia de recepţie.

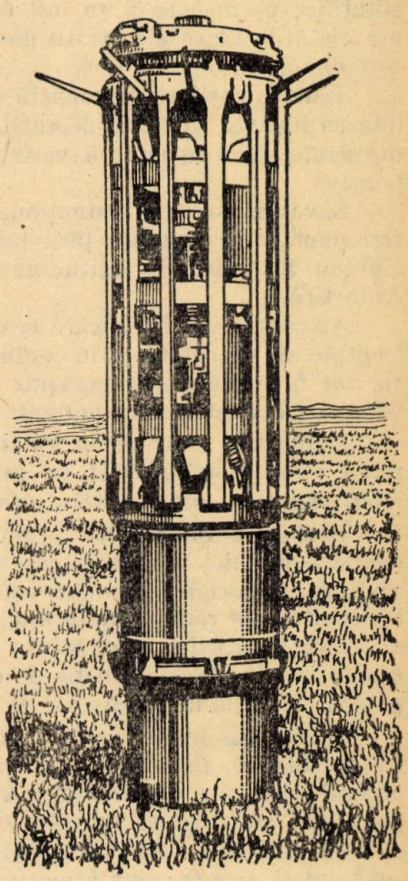


Fig. 1. Containerul după aterizare

Alături de folosirea rachetelor grele s-au întrebuinţat cîteva sisteme de rachete speciale mai uşoare destinate numai pentru cercetări meteorologice.

Rachetele meteorologice reprezintă proiectile mai simple şi ieftine cu ajutorul cărora se poate ridica un număr mic de aparate la o înălţime de cîteva zeci de kilometri. Cel mai des partea frontală a unei astfel de rachete se salvează cu paraşuta.

Biologii sovietici au efectuat cercetări foarte interesante în privinţa comportării unui organism viu în condiţiile originale ale unui zbor pe rachete. În felul acesta s-a obţinut un material extrem de important pentru proiectarea proiectilelor cu reacţie destinate pentru zborul cu oameni.

Studierea minuțioasă a indicațiilor tuturor aparatelor și observațiile ulterioare efectuate asupra cîinilor care au zburat în rachete de mai multe ori la o înălțime de 100 km, au arătat că zborurile nu au exercitat nici o acțiune dăunătoare asupra animalelor. Sistemele de scafandru și mecanismele de catapultare au funcționat perfect. Toate acestea permit să tragem concluzia că este pe deplin posibil zborul cu oameni pe rachetă în straturile înalte ale atmosferii.

Astfel s-au introdus în prezent diferite metode de efectuarea cercetărilor științifice pe rachete și au fost obținute pentru prima oară date referitoare la proprietățile fizice ale straturilor superioare ale atmosferii bazate pe măsurători directe.

Tehnica sondării cu rachetă se dezvoltă continuu. În cursul anului geofizic internațional se vor face deosebit de multe lansări de rachete pentru cercetări, înzestrate cu o aparatură variată și lansate din diferite puncte ale globului terestru.

Savanții sovietici intenționează să efectueze peste o sută de lansări în trei puncte: în regiunea țării lui Frantz Iosif, pe teritoriul părții europene a Uniunii Sovietice la latitudinile medii și în regiunea stațiunii Mirnîi în Antarctică.

Aparatele vor fi ridicate la o înălțime de la 80 pînă la 200 km în părțile frontale ale rachetelor și în containere de tip diferit, care se separă; unele din ele vor fi înzestrate cu parașute de salvare, altele vor fi prevăzute cu sisteme telemetrice pentru transmiterea indicațiilor aparatelor prin radio pe pămînt.

Amploarea cercetărilor va fi de asemenea mult lărgită. Se prevede realizarea unui program vast de măsurători optice pentru obținerea unor date referitoare la natura straturilor luminiscente așezate la diferite înălțimi.

Rezultate interesante promit să dea măsurarea numărului și energiei particulelor mici de meteor care intră în zbor în atmosfera terestră; plăci piezoelectrice speciale — donori, așezate în diferite puncte ale containerului, vor transmite prin radio, pămîntului, impulsurile electrice, care permit determinarea caracteristicilor particulelor care lovesc aceste plăci. Obținerea datelor despre bombardarea rachetei de către micrometeori are o importanță esențială pentru calculele ulterioare ale zborurilor interplanetare.

Un interes mare prezintă difuziunea în straturile superioare a unor substanțe diferite, în scopul provocării unor schimbări vizibile ale proprietăților aerului. Deoarece densitatea gazelor atmosferice este foarte mică la o înălțime mare este suficient să difuzăm o cantitate comparativ mică (10—100 kg) de reactiv propice ca să schimbăm în mod fundamental raportul natural între substanțele care compun atmosfera într-un volum de sute și mii de km ^{3}. Astfel difuzarea la o înălțime de aproximativ 100 km a cîtorva kilograme de oxid de azot duce la reacția substanței cu oxigenul atomic care se găsește acolo, în urma cărui fapt se degajă o cantitate mare de energie termică și se formează un nor de foc cu un profil transversal de cca. 10 km, care se menține cîteva zeci de minute (după experiența efectuată în S.U.A.). Un astfel de nor poate fi folosit de exemplu, pentru observarea vitezei și direcției aerului la această înălțime.

Difuzarea la o înălțime de 100 km a cîtorva kilograme de sodiu mărește de 1 000 ori concentrația lui naturală în volumul secțiunii transversale pe o întindere de zeci de kilometri, ceea ce duce la schimbarea vizibilă a luminiscenței caracteristice a cerului. Accesibilitatea unei astfel de «acțiuni active»

asupra stării straturilor înalte ale atmosferii deschide posibilităţi extrem de interesante pentru cercetări geofizice.

Cercetarea straturilor superioare ale atmosferii cu ajutorul rachetelor, a constituit prima etapă a măsurătorilor directe a înălţimilor mari. Neajunsurile principale ale unor astfel de cercetări constituie scurta lor durată şi limita regiunii de observaţie.

In felul acesta, cu toate succesele cercetărilor cu rachete, nu poate fi rezolvată cu ajutorul lor problema studierii complexe a straturilor superioare ale atmosferii. Posibilităţi mai vaste deschide în această direcţie crearea a aşa numiţilor sateliţi artificiali ai pămîntului a căror lansare va fi realizată în anul geofizic internaţional de către o serie de ţări *).

Înainte de a trece la caracterizarea importanţei sateliţilor artificiali ai pămîntului pentru rezolvarea problemelor ştiinţifice ne vom opri asupra aspectelor tehnice ale lansării lor.

Printre numeroasele proiecte de sateliţi artificiali ai pămîntului expuse în literatură, cel mai mare interes prezintă proiectul american « Vanguard ».

Conform acestui proiect se foloseşte ca purtător al satelitului o racheta compusă din trei trepte; primele două trepte ale acesteia sînt limitate, iar a treia nedirijabilă, stabilizată prin rotire.

Lungimea întregei rachete este de 21,9 m, diametrul maxim este de 1,14 m, greutatea maximă în combustibil este de 11 tone. Stabilizarea rachetei este asigurată de instalarea motoarelor pe o articulaţie cardanică. Satelitul propriu-zis şi cea de a treia treaptă sînt închise în extremitatea frontală a rachetei.

Pentru ca să iasă pe orbită, proiectilul trebuie să aibă după încetarea funcţionării motorului o viteză de minimum 7,9 km/s. Ea trebuie să fie creată de motoarele tuturor celor trei trepte.

Trebuie să menţionăm, că alegerea rachetei compuse din trei trepte nu este ocazională, ci este condiţionată de faptul că mărirea ulterioară a numărului treptelor nu dă un avans mai mare în viteza de zbor. O analiză teoretică arată că în comparaţie cu racheta într-o singură treaptă (tip « Viking ») la aceiaşi greutate racheta în două trepte dă o mărire a vitezei de 30%, cea în trei trepte dă o mărire de 45%, iar creşterea numărului treptelor pînă la infinit dă o mărire numai de 70%.

Prima treaptă a rachetei « Vanguard » ridică proiectilul la o înălţime de 58 km pînă în momentul arderii

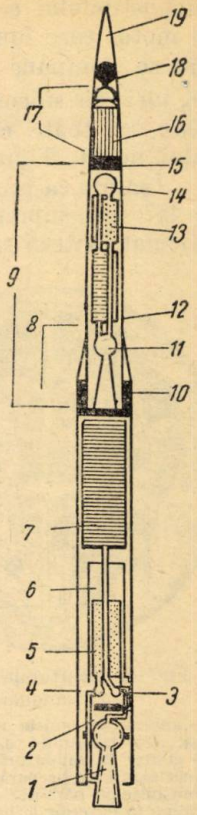


Fig. 2. Racheta în trei trepte cu satelitul (proiect « Vanguard »)

1.—motorul rachetei de la prima treaptă: 2. — agregat de turbo-pompă; 3.— pompă de oxigen; 4. — pompă de combustibil; 5. — rezervor cu combustibil; 6. — rezervor cu apă oxigenată; 7. — rezervor cu oxidant (cu oxigen lichid); 8. — prima treaptă a rachetei; 9. — a doua treaptă a rachetei; 10. — bateria cu sistem de aprindere; 11.— motorul rachetei de la a doua treaptă; 12. — rezervor cu acid azotic; 13.—rezervor cu combustibil pentru a doua treaptă; 14. — rezervor cu heliu; 15. — aparate de comandă; 16. — combustibil solid; 17. — a treia treaptă a rachetei; 18. — satelitul artificial; 19. — partea frontală (capul rachetei).

Nota redacţiei:

*) La 4 octombrie 1957 a fost lansat de către U.R.S.S. primul satelit artificial al pămîntului, iar la 3 noiembrie 1957 cel de-al doilea satelit.

combustibilului ei. Pentru această treaptă firma « General Electric » crează un motor care funcţionează pe bază de combustibil de hidrocarbură lichidă, care se compune din 95% benzină cu cifră octanică înaltă, 4% alcool şi 1% ulei de silicon. În calitate de oxidant se va folosi în prealabil oxigenul lichid, cu toate că s-a examinat totodată posibilitatea întrebuinţării ozonului lichid. Timpul proiectat al arderii este de 141 secunde.

Înainte ca prima treaptă să se separe, proiectilul se va înclina sub un unghi de 45° spre suprafaţa pămîntului, pe seama deplasării motoarelor suspendate articulat. Viteza rachetei în momentul separării primei trepte (la înălţimea de 58 km), va fi de 1680 m/s. Apoi prima treaptă se va separa de restul rachetei, iar locul de cădere a acesteia se va găsi la o distanţă de 440 km de locul lansării.

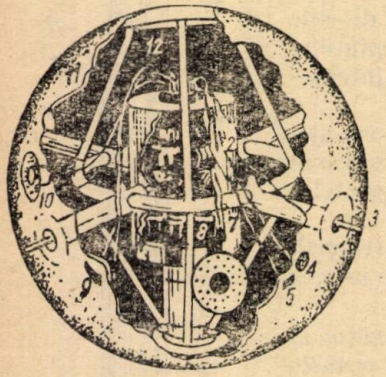


Fig. 3. Anatomia satelitului (« Vanguard »)

1. — aparat de emisie radiofonică «Mintrex», care transmite datele pe pămînt; 2. — contor în miniatură şi ansanblul de memorizare care prepară datele pentru a fi transmise pe pămînt; 3. — antene care se ridică în exterior la ieşirea pe orbită; 4. — microfon supersensibil care înregistrează loviturile pulberii meteorilor pe suprafaţa satelitului; 5. — donorii care măsoară temperatura de la 140—150°; 6. — element fotoelectric pentru recordarea ansamblului de memorie în cazul apariţiei satelitului pe partea iluminată; 7. — cilindru de aluminiu aurit pentru izolaţie; 8. — baterii de oxid de mercur care aprovizionează satelitul cu energie timp de 2 săptămîni; 9. — banda metalică care înregistrează eroziunea suprafeţei satelitului de pe urma pulberii de meteor; 10. — camera ionică pentru măsurarea intensităţii radiaţiei ultraviolete; 11. — suprafaţa metalică strălucitoare pentru cea mai bună reflexie; 12. — măsurători ale presiunii care semnalează apropierea meteorului de suprafaţa satelitului.

În momentul separării primei trepte intră în acţiune motoarele celei de a doua trepte. Drept combustibil pentru ele va servi dimetilhidrazina cu acid azotic fumans alb ca oxidant.

Motorul celei de a doua trepte încercat de firma « Aerojet » este de o construcţie tubulară, camera lui este compusă din tuburi de aluminiu profilate longitudinale legate între ele prin sudură sau lipire. Prin aceste tuburi trece acidul azotic care răceşte camera. Pentru consolidare camera se prinde din exterior cu sîrmă de oţel sau cu o manta din textolit cu umplutură de sticlă. Se presupune că arderea combustibilului în cea de a doua treaptă va avea loc la o înălţime de 225 km, la o viteză de zbor de 4 090 m/s, după care racheta se ridică conform inerţiei, pe orbită, adică la o înălţime de cca. 480 km. Pe acest sector al traiectoriei stabilizarea rachetei se va realiza de către dispozitivul de pilotare automat care dirijează jeturi mici de reacţie de gaze din rezervoarele de combustibil ale celei de a doua trepte.

La începutul funcţionării celei de a doua trepte carenajul frontal al celei de a treia trepte, încălzit puternic, şi în care se găseşte satelitul va fi aruncat, pentru ca să fie preîntîmpinată încălzirea satelitului de la carenaj şi pentru îmbunătăţirea caracteristicii greutăţii lui. În stmosfera rarefiată unde pătrunde în acel timp racheta, încălzirea satelitului de pe urma frecării de atmosferă va fi neînsemnată. Cu ajutorul motorului cu explozie al celei de a treia trepte, care lucrează pe bază de combustibil solid, viteza va fi adusă pînă la 7 600 m/s, după care şi această treaptă se va desprinde de satelit (după 10 minute de la start). Satelitul se va roti în jurul pămîntului pe o orbită eliptică a cărei înălţime va varia de la 480—1 280 km. Satelitul va face rotaţia în jurul pămîntului în decurs de 90 minute.

Greutatea sarcinii utile a proiectilului « Vanguard » este de 10 kg, ceea ce constitue cca. 0,1% din greutatea lui totală.

Programul « Vanguard » prevede după cum a comunicat adjunctul ministrului apărării pentru problemele de lucrări experimentale — de proiectare şi de cercetări ştiinţifice — S. Fernes, lansarea a şase rachete pentru scopuri experimentale, după care vor urma şase rachete active care poartă satelitul. După părerea lui S. Fernes este puţin probabil ca toate cele şase lansări să fie încununate de succes, totuşi probabilitatea punerii pe orbită a cel puţin a unui satelit este pe deplin asigurată.

Sferele pentru sateliţi sînt produse de firma « Brooks şi Perkins ». Sferele se construiesc dintr-un aliaj moale care se compune din 95% magneziu, 3—3,5% aluminiu şi 1% zinc. Fiecare jumătate a sferii se va matriţa dintr-o foaie întreagă de aliaj. Grosimea mantalei acestor sfere va fi de aproximativ 0,50 mm. Ea nu este identică pretutindeni: la baza celor 4 antene, precum şi în alte locuri ea va fi diferită. Diametrul sferelor va fi de 50 cm, greutatea — 1,82 kg. Carcasa interioară a satelitului se compune din tuburi de magneziu cu folosirea parţială a unei mase plastice termostabile, care posedă o temperatură joasă. Există cîteva procedee pentru ca sfera să fie făcută ermetică prin îmbinare, prin sudură sau mecanic. Suprafaţa exterioară a satelitului se confecţionează cu o toleranţă de 0,0001 mm şi se polizează pînă la o netezime de oglindă.

Pe fiecare satelit, în afară de un sistem simplu de radioemisie « Minitrek » destinat pentru urmărire, va fi instalat un utilaj electronic necesar pentru transmiterea pe pămînt a rezultatului măsurătorilor, care include un mecanism de semnalizare, un modulator, aparat de radioemisie, sistem de comutare, bateriile surselor de alimentare.

Schema electrică pentru semnalizarea telemetrică şi transmiterea măsurătorilor pe pămînt este proiectată sub formă de complet de discuri rotunde de module. Modulele electronice de imprimare se montează în straturi într-un cilindru aurit şi au transistorii şi alte piese radiofonice presate direct în materialul tabloului. Amplasarea contactelor punctiforme pe tablouri contribuie la conexiunea comodă a acestora între ele. Cilindrul aurit se fixează în centrul satelitului.

Cele patru antene dipoli de cîte 1/4 lungime de undă, ale satelitului, vor fi strînse în timpul zborului pînă la înălţimea orbitei. După desprinderea celei de a treia trepte dipolii se deschid cu ajutorul unei articulaţii cu arc care se găseşte la baza fiecărui dipol şi sectoarele telescopice ale antenei se ridică. Sistemul de aruncare interioară a satelitului serveşte ca suport pentru cilindrul cu modulele antenelor precum şi altui utilaj. Majoritatea acestor piese se fabrică din magneziu, unele din ele vor fi aurite, o parte se face din masă plastică uşoară, termoizolantă.

Pe satelitul artificial al pămîntului proiectat în URSS s-a prevăzut instalarea a două aparate de radioemisie cu frecvenţă de aproximativ 20 MHz şi 40 M Hz şi cu o putere radiantă de 1 W. Semnalele care vin de la emiţătoare vor reprezenta emisii telegrafice cu o durată de la 0,05 pînă la 0,7 secunde. Emisiunile unuia din emiţătoare corespund cu pauzele celui de al doilea emiţător. Schimbarea condiţiilor fizice în care se va găsi aparatura de pe satelitul artificial al pămîntului vor provoca schimbarea felului semnalelor emiţătoare, iar aceste schimbări se vor distinge uşor chiar în cazul recepţiei în cască a semnalelor oricărui din emiţătoare.

Cu ajutorul unor instalaţii speciale se va putea goniometra un timp îndelungat satelitul. În felul acesta observarea schimbării nivelurilor semnalelor recepţionate va da date preţioase referitoare la propagarea undelor radiofonice în ionosferă.

Posibilităţi de cercetare principial noi deschide folosirea satelitului artificial al pămîntului pentru studierea razelor cosmice.

În prezent există date referitoare la fluxul de protoni primari şi particule α şi totodată a nucleelor C, N, O în radiaţia cosmică primară. Datele despre cantitatea relativă a nucleelor de Li, Be, B şi totodată a nucleelor cu Z foarte mare sînt incomplete şi contradictorii. Observările în stratosferă nu dau un rezultat satisfăcător, întrucît o cantitate oarecare de nuclee de Li, Be, B se formează în stratul atmosferei deasupra balonului sondă. Corecţia asupra acestui efect nu poate fi făcută cu o certitudine suficientă, de aceea este de dorit efectuarea măsurătorilor dincolo de graniţa atmosferei. Măsurătorile obişnuite cu rachete nu sînt utile în acest scop datorită faptului că rachetele se află un timp scurt dincolo de limitele atmosferei.

Obţinerea datelor referitoare la cantitatea relativă a nucleelor de Li, Be, B prezintă un interes esenţial în legătura cu problema provenienţei razelor cosmice, deoarece identificarea unui număr apreciabil de astfel de nuclee în radiaţia cosmică va da posibilitatea să estimăm timpul de vagabondare a particulelor cosmice în spaţiul interstelar, unde aceste nuclee pot să se formeze pe seama ciocnirii nucleelor mai grele cu atomii substanţei interstelare.

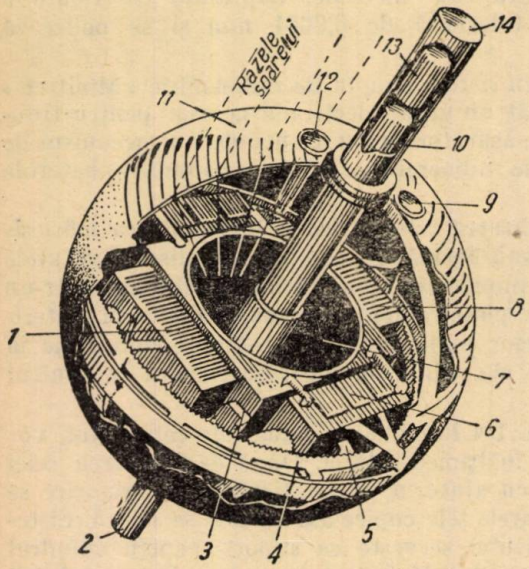


Fig. 4. Proiectul satelitului propus de Singer în SUA (varianta I)

1. — aparatul de transmisie şi radiofar; 2. — contor pentru razele cosmice; 3. — motor şi reductor; 4. — tambur rotativ şi de înregistrare; 5.— dispozitiv de înregistrare; 6. — baterie de acumulatori; 7. — sursa solară de energie; 8. — magnetometrul; 9. — contor pentru razele x; 10. — contor pentru electroni; 11. — lentile transparente; 12. — contor pentru razele solare ultraviolete; 13.— contor pentru razele gama; 14. — antenă.

La aceiaşi serie de probleme se referă cercetările asupra variaţiei razelor cosmice, studierea lor la nivelul mării fiind îngreuiată de grosul atmosferei care se găseşte sub aparatură. Atmosfera micşorează mult amplitudinea variaţiei datorită cărui fapt unele din ele nu pot fi în genere înregistrate. În afară de aceasta atmosfera însăşi este sursa variaţiilor suplimentare, care denaturează efectul real, iar excluderea lor prezintă dificultăţi mari.

În felul acesta satelitul artificial al pămîntului va oferi posibilitatea excepţională pentru studierea variaţiei radiaţiei cosmice şi va permite să obţinem date valoroase atît despre natura variaţiei, cît şi despre legătura lor cu diferite fenomene geofizice şi cu activitatea solară.

În urma prelucrării şi analizei datelor obţinute prin folosirea satelitului artificial al pămîntului vor fi scoase în evidenţă variaţiile zilnice, în decurs

de 12 ore şi în decurs de 27 zile ale radiaţiei primare. Compararea acestor date cu schimbările cîmpului magnetic al pămîntului şi activitatea solară va permite să clarificăm influenţa furtunilor magnetice şi a impulsurilor solare asupra variaţiei razelor cosmice, ceea ce va da la rîndul său posibilitatea să verificăm teoretic traiectoriile anticipate ale particulelor încărcate ale radiaţiei cosmice în cîmpul dipolului magnetic. În afară de aceasta se va reuşi, după cît se pare, să obţinem date necesare referitoare la efectul de lărgime a radiaţiei cosmice primare, care a fost determinat pînă în prezent doar după date limitate.

Extrem de importante sînt totodată problemele legate de studierea radiaţiei ultraviolete şi Röntgen; spectrul energetic al acestor radiaţii pentru diferite lungimi de undă este reprezentat prin următoarele valori:

Domeniul spectrului	*Fluxul radiaţiei în erg-cm².* s *Limita inferioară*	*Limita superioară*
0—10 Å	10^{-4}	
10—40 Å	5. 10^{-3}	De 100 ori mai mare
40—100 Å	6. 10^{-2}	
1 215 Å (linia principală a lui Leiman	1. 10^{-1}	De 5 ori mai mare

Se ştie că radiaţia soarelui într-un domeniu al spectrului mai scurt decît $\lambda \sim 2\,900$ Å este complet absorbită de atmosferă şi nu ajunge pînă la ovbservatorii tereştrii.

Cu ajutorul satelitului artificial al pămîntului se vor putea studia fluctuaţiile radiaţiei solare în decursul unor perioade îndelungate de timp la diferite lungimi de undă. Aceste fluctuaţii sînt legate de activitatea solară şi exercită o influenţă esenţială asupra stării atmosferei pămîntului. Conform concepţiilor moderne radiaţia solară mai scurtă decît $\lambda \sim 1\,000$ Å constituie agentul principal care provoacă ionizarea straturilor superioare ale atmosferii şi formarea ionosferii. Măsurarea intensităţii absolute a acestei radiaţii, a intensităţilor relative ale sectoarelor spectrale separate ale acesteia şi în special a variaţiei acestor mărimi va permite să obţinem date importante referitoare la cauzele care provoacă formarea ionosferei. În afară de aceasta, întrucît această radiaţie aparţine coroanei, care înconjoară soarele, experienţele menţionate vor da posibilitatea să obţinem date noi despre natura acestei formaţii, să clarificăm compoziţia coroanei care se formează din atomii elementelor lipsite în mare parte de electronii lor exteriori şi totodată starea materiei în coroană, în special temperatura ei.

Alături de radiaţia cu lungimi de undă scurtă a soarelui un rol uriaş în bilanţul energetic al straturilor superioare ale atmosferei îl are radiaţia lui corpusculară, cunoaşterea căreia are o importanţă principală pentru înţelegerea multor fenomene geofizice. Teoriile existente (ale lui Chapman-Ferraro-Martin, Alfven şi altele) se bazează pe caracterul neutru al fluxului de particule iradiate de soare. Totuşi problema referitoare la natura radiaţiei corpusculare a soarelui nu a fost încă rezolvată experimental. Iniţial s-a presupus că electronii sînt particulele care există. În prezent pe baza unor date putem presupune că la formarea aurorelor polare participă fie numai protonii sau protonii şi electronii. În ultimul caz electronii trebuie să aibă aceiaşi viteză ca şi protonii. În legătură cu acest fapt apar dificultăţi în explicarea surselor de energie a protonilor care provoacă aurora polară. Ca să pătrundem pînă la acele înălţimi

unde se observă de obicei acest fenomen, particulele trebuie să posede o energie inițială de aproximativ 5—10 M eV.

Efectuarea experiențelor referitoare la studierea naturii radiației corpusculare a soarelui și totodată referitoare la clarificarea direcției fluxurilor corpusculare în timpul aurorelor polare, va permite să rezolvăm pînă la o măsură oarecare, dacă această radiație are acel rol important în formarea aurorelor polare și a perturbărilor magnetice pe care i-le atribuie teoriile moderene.

Influența meteorilor și în special a micrometeorilor asupra atmosferei terestre nu este încă studiată. Se presupune că micrometeorii exercită o influență

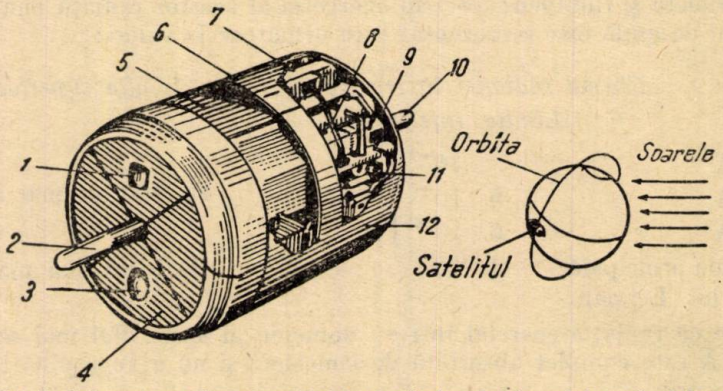


Fig. 5. Schema satelitului artificial al pămîntului în miniatură elaborat de Singer (varianta II-a).

1.— contor pentru raze solare ultraviolete; 2. — antena laterală îndreptată spre soare cu contoare pentru electroni și particule grele; 3. — contor pentru razele solare Röntgen; 4. — bateria solară; 5.— colectorul pulberii cosmice; 6. — utilajul radiofonic; 7. — măsurătorul albedo pămîntului; 8. — colector pentru pulberea cosmică; 9. — magnetometru; 10.— antena pe partea umbrită cu contoare pentru razele cosmice și aurora polară; 11. — aparat de radioemisie care lucrează pe unde ultra scurte; 12. — far de radiolocație.

asupra multor procese din straturile superioare ale atmosferii. În afară de aceasta meteoriții prezintă un pericol pentru rachete și sateliții artificiali ai pămîntului, deoarece pot distruge suprafața lor. De aceia studierea substanței meteorului prezintă un interes deosebit. Este extrem de important să obținem date despre numărul microparticulelor care intersectează unitatea de suprafață a satelitului într-o unitate de timp (fluxul particulelor) și energia lor cinetică. Actualmente nu există materiale satisfăcătoare referitoare la această problemă.

Analiza matematică a unui număr uriaș de observații efectuate asupra intensității cîmpului magnetic al pămîntului realizate pe întreaga suprafață a globului pămîntesc într-un timp diferit, a permis prezentarea cîmpului magnetic terestru complet ca un total a cîtorva cîmpuri: cîmpurile sferei uniform magnetizate (H_0), cîmpurile anomaliilor continentale (H_m), cîmpurile anomaliilor regionale și locale (H_a), cîmpul magnetic variabil (H_p).

Cu toate acestea analiza matematică nu permite să rezolvăm univoc problema despre localizarea cauzelor care provoacă aceste cîmpuri și natura lor. Măsurătorile magnetice de pe satelitul artificial al pămîntului deasupra stratului ionizat al atmosferei superioare, dau posibilitatea să realizăm o verificare experimentală directă asupra unei serii de concluzii trase pe baza diferitelor ipoteze. În primul rînd se va putea clarifica faptul, dacă schimbările cîmpului pămîntului în timpul furtunilor magnetice sînt condiționate de curenții electriei

similari cu curenţii circulari în interiorul pămîntului, enunţate de Steurmer şi alţii, sau de curenţii ionosferici.

După cît se pare această experienţă este astăzi un fel de experimentum crucis, deoarece toate încercările teoretice de a explica aurorele polare şi perturbările magnetice duc la ipoteza existenţei curentului inelar.

Alături de o astfel de experienţă principală un rol tot atît de important vor avea şi alte observări magnetice de pe satelitul artificial, în special măsurarea variaţiilor rapide ale cîmpului magnetic al pămîntului. Măsurătorile efectuate deasupra ionosferii vor completa într-o măsură însemnată cunoştinţele noastre despre natura unor astfel de variaţii şi de asemenea despre poziţiile curenţilor care le provoacă. Totodată aceasta va permite să precizăm influenţa atmosferei şi a domeniilor din afara atmosferii asupra cîmpului magnetic terestru. Deoarece odată cu înălţimea viteza de descreştere a diferitelor componente ale cîmpului este diferită la fel ca şi schimbarea gradienţilor lor după latitudine şi longitudine se va reuşi probabil cu ajutorul satelitului artificial să se stabilească adîncimea poziţiei anomaliilor magnetice continentale şi regionale.

În afară de aceasta măsurătorile magnetometrice ale mărimii scalare a vectorului intensităţii cîmpului magnetic al pămîntului vor permite determinarea orientării satelitului şi viteza lui de rotire faţă de axa proprie. Aceasta are o importanţă esenţială pentru studierea dinamicii satelitului.

Pentru interpretarea corectă a măsurătorilor ştiinţifice efectuate pe satelitul artificial al pămîntului este necesară cunoaşterea sarcinii proprii a satelitului, pe care el o primeşte în timpul mişcării sale în straturile ionizate ale atmosferii. Astfel la una din lansări potenţialul rachetei atingea la o înălţime de 140 km o valoare de-25 V. Semnul sarcinii este important în cazul dat, de exemplu, pentru măsurarea presiunii cu ajutorul manometrelor, deoarece în funcţie de aceasta se vor schimba fluxurile de ioni şi electroni care pătrund în manometru.

Măsurarea sarcinii proprii a satelitului are şi o importanţă ştiinţifică independentă: în primul rînd se va lămuri dacă există un cîmp. electrostatic dincolo de limitile atmosferei terestre. Măsurarea mărimii acestui cîmp orientarea lui, va ajuta să scoatem în evidenţă cauzele sarcinii negative a pămîntului şi va promova mult înţelegerea mecanismului accelerării particulelor cosmice. Acest cîmp electrostatic este complet ecranat de ionosferă şi este inaccesibil pentru măsurători terestre. Apoi, pe baza datelor referitoare la mărimea sarcinii electrice a satelitului şi concentraţiei ionilor se va putea determina temperatura gazului electronic în inosferă la diferite niveluri şi mărimea potenţialului căpătată de satelitul artificial al pămîntului, a cărui cunoaştere este necesară la măsurarea concentraţiei ionilor pozitivi şi a spectrului lor de masă.

În prezent datele despre evoluţia concentraţiei electronilor şi ionilor în ionosferă la o înălţime mare sînt cu totul nedeterminate şi contradictorii în special la înălţimi de 250—300 km, unde sondarea ionosferii cu metode radiofonice nu poate da informaţii suficiente.

Măsurarea ionizării cu ajutorul sateliţilor artificiali ai pămîntului (spre deosebire de lansările verticale ale rachetelor) va permite să determinăm în afară de concentraţia ionică locală şi gradienţii orizontali ai concentraţiei pînă la orbita satelitului, distribuirea ei geografică etc., ceea ce prezintă un însemnat interes ştiinţific. În acelaşi timp aceste măsurători trebuie să dea, după cît se pare, mărimile concentraţiei electronilor (dacă este justă reprezentarea modernă despre faptul că la înălţimi de 200 km sînt absenţi ionii negativi).

Rezolvarea problemei despre compoziţia straturilor superioare ale atmosferii va ajuta în mod esenţial pentru determinarea înălţimii nivelului echilibrului de difuziune a gazelor în atmosferă. Experienţa măsurătorilor cu spectrometre de masă referitoare la studierea compoziţiei atmosferei cu ajutorul rachetelor capătă o importanţă excepţională pentru efectuarea unor măsurători analoage pe satelit.

Îmbinarea celor trei experienţe efectuate concomitent şi anume: măsurarea sarcinii proprii a satelitului, clarificarea concentraţiei ionilor pozitivi, determi-

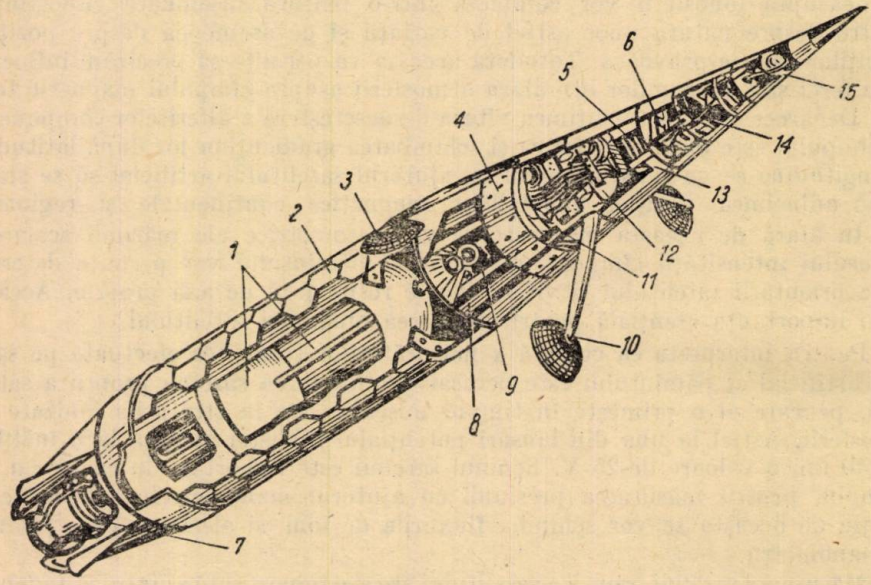


Fig. 6. Schema satelitului artificial al pămîntului după un proiect englez.
1. — rezervor cu combustibil; 2. — bateria solară; 3. — antenă (strînsă); 4. — detectoarele micro-meteoriţilor; 5. — contoare Geiger; 6. — acumulatoare şi redresoare; 7. — motor; 8. — butelie cu aer; 9. — stabilizatoare hidroscopice; 10. — antena (ridicată); 11. — aparate de comandă; 12. — aparatura pentru cercetarea razelor cosmice; 13. — măsurătoare ale temperaturii mantalei; 14. — aparate de radioemise; 15.—măsurătoare ale cîmpului magnetic.

narea naturii lor, va permite să promovăm într-o măsură însemnată multe probleme ale fizicii straturilor superioare ale atmosferii. La aceste cercetări trebuie adăugate măsurătorile referitoare la densitatea, presiunea şi temperatura acelor straturi ale atmosferii în care va zbura satelitul.

În prezent s-au propus cîteva modele de atmosferă, iar pentru înălţimile care depăşesc 100 km, datele referitoare la densitate, presiune şi temperatură s-au obţinut pe baza diferitelor extrapolări. Experienţele propuse pentru măsurarea densităţii şi presiunii prin folosirea unor manometre de tip diferit vor aprofunda nu numai cunoştinţele noastre despre structura atmosferii superioare, dar vor avea şi o importanţă mare pentru rezolvarea unor serii de probleme practice: studierea propagării undelor radiofonice, determinarea timpului de existenţă a sateliţilor pămîntului şi altele.

În prezent au fost elaborate metode de determinare a densităţii atmosferii superioare pe baza observării evoluţiei elementelor orbitei satelitului, în cazul trecerii lui în straturile mai dense ale atmosferii. În acest scop este necesar să determinăm din timp în timp cu o precizie suficientă poziţia lui.

În ceea ce privește problema determinării temperaturii, după cum se știe acest parametru al atmosferii nu poate fi măsurat direct la înălțimi mari, deoarece viteza sateliților pămîntului (~ 8 km/s) depășesc mult vitezele termice ale moleculelor gazoase și totodată datorită capacității calorifice neglijabile a mediului gazos în care zboară satelitul. De aceea temperatura straturilor superioare ale atmosferii se determină (în cazul cunoașterii densității sau presiunii) prin recalculare după formule teoretice sau pe baza legilor stabilite experimental.

De pe acum putem prevedea timpul cînd sateliții artificiali ai pămîntului vor avea un rol hotărîtor în perfecționarea tuturor cazurilor de cercetări geofizice și astrofizice și în sfîrșit cînd omul va putea el însăși să cerceteze direct spațiul care înconjoară planeta noastră.

CÎTEVA CALCULE ELEMENTARE PRIVITOARE LA SATELITUL ARTIFICIAL

ALEXANDRU STOENESCU

EVENIMENTUL științific epocal din 4 octombrie 1957, cînd a fost lansat în URSS, cu succes, primul satelit artificial al Pămîntului, a produs un val de entuziasm care a cuprins întreg globul.

Cu această ocazie s-au publicat în toate ziarele și revistele articole privitoare la satelit, în care s-au dat și unele date numerice.

În cele de mai jos, vom arăta în mod elementar, explicarea teoretică a acestor date.

Satelitul zburînd la o înălțime de circa 900 km deasupra Pămîntului, vom presupune printr-o primă aproximație, că străbate un cerc de rază $R_1 = R + 900 \simeq 7300$ km, în care $R = 6400$ km, reprezintă raza Pămîntului (fig. 1).

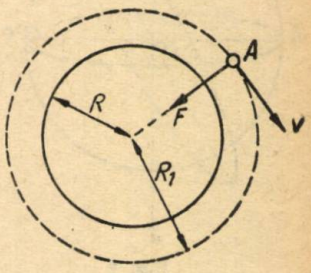


Fig. 1

În această mișcare circulară, satelitul situat spre exemplu, în A, are o accelerație centrifugă

$$a = \frac{v^2}{R_1}$$

și o forță centrifugă F corespunzătoare

$$F = ma = m\frac{v^2}{R_1}$$

m fiind masa satelitului.

Această forță însă, nu este alta decît forța de atracție a satelitului de către Pămînt, dată de legea de atracție a lui *Newton*

$$F = K\frac{mM}{R_1^2}$$

unde K este coeficientul legii de atracție, M — masa Pămîntului. Deci

$$\frac{Km\,M}{R_1^2} = m\frac{v^2}{R_1}\,; \quad v = \sqrt{\frac{KM}{R_1}}\,.$$

Dar, la suprafaţa Pămîntului forţa de atracţie este chiar greutatea, adică

$$G = mg = \frac{KmM}{R^2}$$

unde g este acceleraţia gravităţii. Rezultă

$$KM = gR^2,$$

de unde

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R_1}}.$$

Înlocuind

$$v = 6\,400\,000\sqrt{\frac{9{,}81}{7\,300\,000}} = 7\,500 \text{ m/s}.$$

Prin urmare, pentru ca satelitul să se învîrtească pe un cerc de rază $R_1 = 7\,300$ km este necesară o viteză de

$$v = 7{,}5\frac{km}{s}.$$

Pentru o viteză de 8 km/s pe cercul de rază R_1, timpul necesar înconjurării Pămîntului va fi

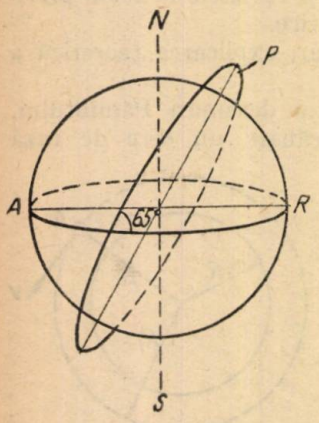


Fig. 2

$$t = \frac{2\pi R_1}{v} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 7\,300}{8 \times 60} = 96 \text{ minute}$$

sau

$$t = 1 \text{ oră } 36 \text{ minute}.$$

Aceasta înseamnă că într-o zi, adică în timpul

$$T = 24 \cdot 60 = 1\,440 \text{ minute},$$

Pămîntul va fi înconjurat de

$$n = \frac{T}{t} = \frac{1\,440}{96} \simeq 15 \text{ ori}.$$

Remarcăm în plus, un fapt deosebit de important şi care constă în invariabilitatea planului P care cuprinde satelitul, în raport cu Soarele, plan înclinat pe planul ecuatorului cu un unghi de 65°; Pămîntul deci, defilează în faţa satelitului astfel încît acest satelit poate fi văzut şi studiat cu aparate speciale aproape pe tot globul (fig. 2).

Pentru fiecare rotire completă a satelitului corespunde o variaţie a longitudinii locului prin care trece satelitul cu

$$\frac{360}{15} = 24°.$$

Înainte de a merge mai departe, observăm că explicaţia dată în unele reviste, că satelitul este menţinut pe cerc prin echilibrul dintre forţa de

atracție pe care Pămîntul o exercită asupra satelitului și forța centrifugă, este greșită; singura forță ce acționează satelitul este numai forța de atracție a Pămîntului, arătată în fig. 1, iar satelitul nu se află în echilibru ci în mișcare sub acțiunea acestei forțe.

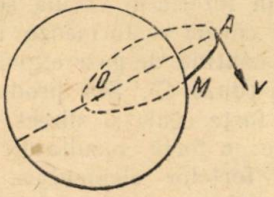


Fig. 3

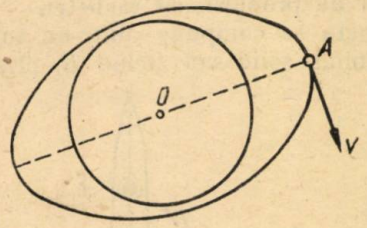


Fig. 4

O explicație corectă a acestei interpretări este dată în interesantul articol despre satelit, scris de tov. profesor *V. Vîlcovici* în revista Contemporanul 11 octombrie 1957, pe care-l recomandăm cu toată căldura cititorilor noștri, pentru studiu.

Se mergem acum mai departe și să considerăm punctul A, locul în care satelitul artificial adus de rachetă este lăsat liber în spațiu; dacă în acest punct satelitul are o viteză perpendiculară pe *OA* dar de valoare mai mică decît 7,5 km/s, el descrie arcul de elipsă *AM* arătat pe fig. 3 și cade la Pămînt fără a-și putea îndeplini deci, misiunea de satelit.

Dacă în *A* satelitul are o viteză perpendiculară pe *OA* dar de valoare mai mare decît 7,5 km/s, el descrie elipsa întreagă dată de fig. 4 și devine efectiv un satelit al Pămîntului.

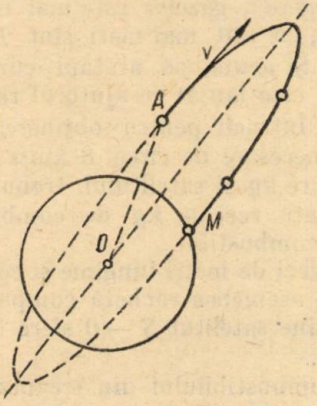


Fig. 5

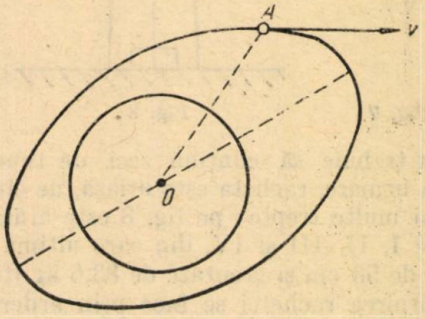


Fig. 6

În fig. 5 este dat cazul cînd satelitul lăsat liber în A ar avea viteza de 7,5 km/s, dar cu o viteză făcînd cu *OA* un unghi prea mic; în această ipoteză el nu poate deveni satelit, ci descrie doar arcul de elipsă *AM*.

Fig. 6 ne arată cazul în care unghiul dintre viteză și rază, fără a fi de 90° este însă convenabil, iar satelitul își poate îndeplini misiunea sa.

Am studiat toate aceste posibilităţi pentru a arăta importanţa deosebită pe care o are mărimea şi direcţia vitezei satelitului în momentul în care este lăsat liber; de aici rezultă grija mare ce trebuie avută în timpul scurt al lansării.

Pentru aducerea satelitului în A pe orbita sa liberă (lansarea) este utilizată racheta. Înainte de a arăta cum se face lansarea, arătăm în ce constă principiul de propulsie al rachetei.

Racheta se compune dintr-un înveliş A în interiorul căruia se găseşte combustibilul solid sau lichid B, prin arderea căruia se formează un jet (o vînă) continu de gaze expulzate prin ajutaj (duza C). S-a produs astfel, două forţe egale şi direct opuse şi anume: o forţă rezultantă R a tuturor forţelor elementare aplicate particulelor ce compun jetul de gaze şi o altă forţă F egală şi direct opusă, ce acţionează asupra rachetei (fig. 7).

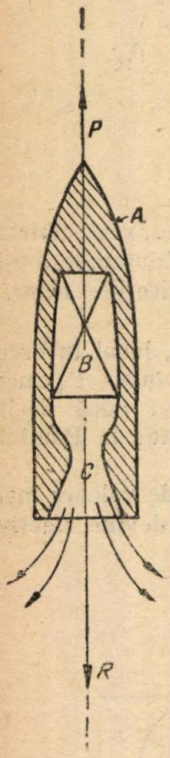


Fig. 7

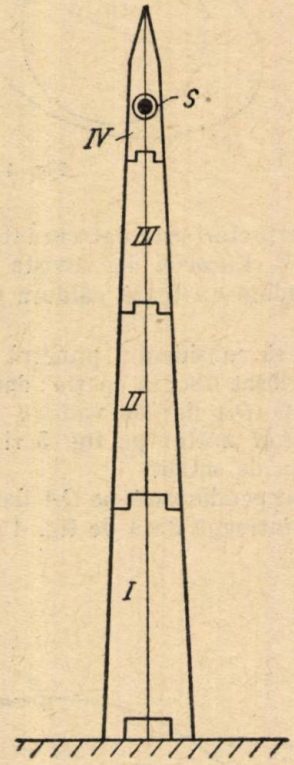


Fig. 8

Forţa F este forţa reactivă care învingînd greutatea rachetei şi rezistenţa mediului, produce propulsia rachetei.

Aici este cazul să menţionăm faptul important că spre deosebire de elice, pentru care este necesar mediul material, racheta funcţionează mai bine în vid decît în mediile materiale, deoarece cu cît mediul este mai rarefiat cu atît viteza de scurgere a gazelor este mai mare şi deci, cu atît mai mari sînt R şi F.

Şi acum, să arătăm cum satelitul este lansat cu ajutorul rachetei.

Întrucît pentru obţinerea vitezei necesare de circa 8 km/s pentru fiecare kg al satelitului, trebuie consumate zeci de kg de combustibil, racheta trebuie să conţină zeci de tone de combustibil.

Ca urmare, racheta este uriaşă, de cîteva zeci de metri lungime şi compusă din mai multe trepte; pe fig. 8 este arătată o asemenea rachetă compusă din treptele I, II, III şi IV, din care ultima conţine satelitul S — 0 sferă de diametrul de 58 cm şi greutate de 83,6 kg (fig. 8).

Pornirea rachetei se face prin arderea combustibilului din treapta I; în clipa cînd acest combustibil este complet consumat, tubul corespunzător cade şi automat intră în funcţiune treapta II.

În mod analog, după consumarea combustibilului din treapta a II-a tubul ce-l conţine cade şi intră în funcţiune treapta a III-a; aceasta la rîndul său cade punînd în funcţiune treapta a IV-a.

Combustibilul din treapta a IV-a aduce întregii acestei trepte viteza dorită de 8 km/s; în clipa cînd combustibilul din această ultimă treaptă este consumat, cele trei părţi care compun treapta, şi anume: tubul, satelitul şi căciula

de protecție a satelitului, sînt separate automat dar nu mai pot cădea, tubul și căciula devenind și ei acompaniatorii satelitului artificial.

În fig. 9 este dată lansarea rachetei, cu traiectoriile tuburilor, I, II și III în căderea lor pe Pămînt, în punctul A în care treapta IV terminînd combustibilul, liberează satelitul pe care-l lasă să circule pe traiectoria sa proprie, care este o elipsă apropiată de un cerc.

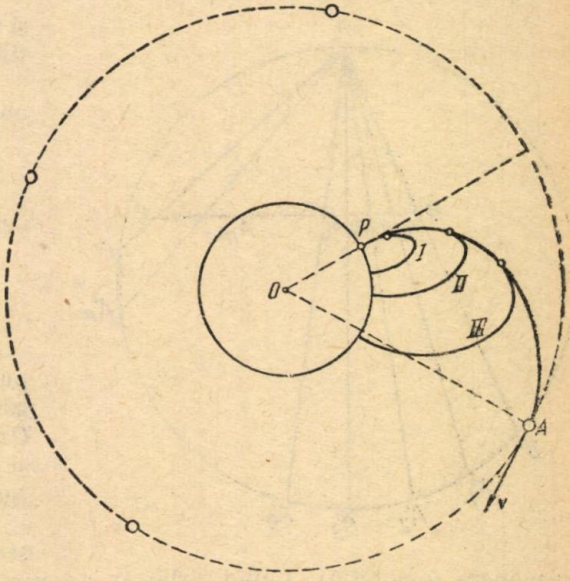


Fig. 9

Desigur, partea grea a obținerii satelitului este lansarea sa; în cele cîteva minute în care străbate traiectoria PA, conducerea și precizia mișcării trebuie să fie extremă pentru ca în A viteza v să fie pe cît posibil, perpendiculară pe OA și de mărime corespunzătoare unei traiectorii circulare de rază OA.

Aceste realizări sînt obținute cu un automatism integral de conducere și cu comenzi electronice executate după un program studiat în cele mai mici detalii.

Încheiem această notă elementară, cu gîndul că satelitul artificial lansat la 4 octombrie 1957, va aduce lumii pacea și fericirea dorită și va însemna pe lîngă o dată epocală în știință și o dată însemnată în istoria evoluției societății omenești.

NOTE MATEMATICE

O generalizare a teoremei bisectoarei

Într-un triunghi ABC în care unghiul A este împărțit în n părți egale prin dreptele AA_1, AA_2, ... AA_{n-1} (punctele A_i fiind pe BC) există relația

$$\frac{BA_1}{AB \cdot AA_1} = \frac{A_1A_2}{AA_1 \cdot AA_2} = \frac{A_2A_3}{AA_2 \cdot AA_3} = \ldots = \frac{A_iA_{i+1}}{AA_i \cdot AA_{i+1}} = \ldots = \frac{A_{n-1}C}{AA_{n-1} \cdot AC}.$$

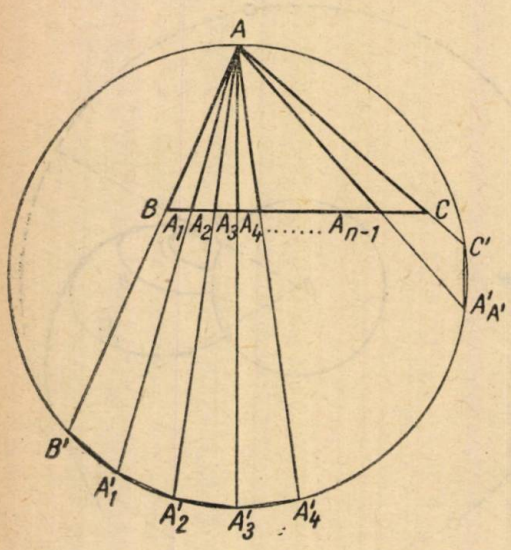
Transformăm prin inversiune figura, alegînd ca pol vîrful A și o putere de inversiune arbitrară k.

Dreptele AB, AA_i, AC se vor păstra, iar BC se va transforma într-un cerc ce trece prin A, B', A_i', C' inversele punctelor B, A_i, C se găsesc la intersecția dreptelor AB, AA_i, AC cu cercul.

Deoarece $\sphericalangle B'AA_1' = \sphericalangle A_1'AA_2' = \ldots = \sphericalangle A_1'AA_{i+1}' \ldots = \sphericalangle A_{n-1}'AC'$ (din ipoteză) rezultă că și arcele corespunzătoare sînt egale, deci și coardele

subîntinse, adică $B'A'_1 = A'_1A'_2 = \ldots = A'_i\,A'_{i+1} \ldots A'_{n-1}\,C'$ Folosind formulele de transformare, apoi de egalitatea coardelor obţinem

$$B'A'_1 = \frac{k \cdot BA_1}{AB \cdot AA_1}\,;\quad \ldots\quad A'_i\,A'_{i+1} = \frac{h \cdot A_i\,A_{i+1}}{AA_i \cdot A_{i+1}}\,;\quad A'_{n+1}\,C' = \frac{k \cdot A_{n-1}\,C}{AA_{n-1} \cdot AC}$$



şi simplificînd cu k, obţinem relaţiile cerute în enunţ.

În cazul particular $n = 2$ obţinem

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC},$$

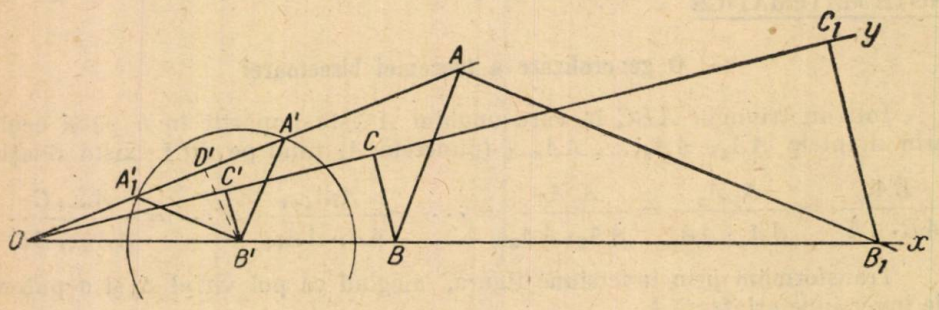
adică teorema bisectoarei.

Generalizarea problemei 2470

Se dă un unghi xOy şi un punct A în acelaşi plan. Să se găsească un punct B pe dreapta Ox astfel ca raportul dintre AB şi distanţa dela B la Oy să fie egal cu o valoare dată k.

Pentru a face această construcţie folosim transformarea prin asemănare (omotetia). Luînd arbitrar un punct B' pe OX găsim mai întîi un punct A' pe OA, astfel ca $\frac{A'B}{B'C'} = k$, unde C' este proiecţia ortogonală a lui B' pe Oy (cu centrul în B' descriem un cerc de rază k. $B'C' = R'$ care taie pe OD în A' şi A'_1).

Ducînd din A o paralelă la $A'B'$ găsim punctul B căutat (transformatul lui B' prin omotetia de centru O şi raport $\frac{OA}{OA'}$).



Într-adevăr, B este cel căutat deoarece $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = k$ unde C este proiecţia lui B pe Oy.

Analog, ducînd prin A o paralelă la $A'_1\,B'$ obţinem punctul B_1, a doua soluţie a problemei.

Din procedeul de construcție deducem și condiția de posibilitate a problemei: din cercul B' trebuie să taie dreapta OA adică $R' \geqslant B'D'$ unde $B'D'$ este distanța de la B' la OA. Dar $R' = k..B'C' \geqslant B'D'$, de unde

$$k \geqslant \frac{A'D'}{B'C'} \text{ sau } k \geqslant \frac{\sin(xOA)}{\sin(xoy)}$$

În cazul particular $k = 1$ problema se reduce al problema 2470.

Constantin Bulucea, elev, R. Vîlcea

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA ACTIVITĂȚII EXTRAȘCOLARE LA MATEMATICĂ LA ȘCOALA MEDIE Nr. 1 RÎMNICU VÎLCEA

1° Urmînd tradiția anilor precedenți și încurajat de succesele înregistrate în anul școlar 1956—57, cînd școala noastră a obținut premiul al III-lea la concursul cercurilor de matematici organizat de « G.M.F. » — seria B, colectivul de profesori și elevi ai școlii au căutat ca și în anul școlar 1957—58 să continue și să îmbunătățească activitatea matematică extrașcolară.

În acest scop, urmărind indicațiile prețioase date în « G.M.F. — B » cu privire la activitatea cercurilor de elevi din școli, s-a înmulțit numărul de cercuri existente prin înființarea de cercuri pe clase paralele, după cum urmează:

— un cerc pentru elevii claselor a VIII-a, condus de tov. prof. *Lucian Mănescu*,.

— 2 cercuri pentru clasele IX — X conduse de tov. profesori *Mihai Vișinescu* și *N. Păun*.

La acestè cercuri s-au prezentat referate atît de către tov. profesori conducători, cît și de către 2 elevi, în scopul încurajării elementelor sîrguincioase. În pregătirea referatelor, elevii pe lîngă ajutorul tov. profesori au avut ca ghid articolele apărute în « G.M.F. —B ». Astfel, elevul *Ancuțoiu Gh.* a prelucrat la ședință articolul « *Cîteva teoreme de maxime și minime* » din « G.M.F.-B » nr. 5/1956 și elevul *Bulucea Const.* a prelucrat în două ședințe, articolele « *Inversiunea* » și « *Aplicații ale transformărilor prin inversiune* », din « R.M.F. ».

Cu toată această activitate s-au întîmpinat greutăți considerabile în special în antrenarea elevilor de clasa a IX-a și a VIII-a.

2° În scopul antrenării a cît mai mulți elevi în studiul matematicii și trezirii interesului pentru acest studiu, tov. profesor *Mihai Vișinescu* a luat inițiativa înființării unei gazete de perete « Matematica » care a dat rezultate din ce în ce mai bune în realizarea scopurilor propuse.

Astfel, după ce în primul număr s-au publicat 6 probleme propuse de elevi cu activitate la « G.M.F.—B » s-au primit de către redactorul gazetei, 13 soluții date de 5 elevi, apoi în numărul următor 32 soluții, în numărul 4 să se primească 50 soluții de la elevii care pînă atunci nu activaseră nici la cercurile de matematică.

În cele 5 luni de apariție, gazeta a publicat 50 probleme propuse dintre care 44 au fost propuse de elevi.

În afară de rubricile « Probleme propuse » şi « probleme rezolvate » gazeta a avut tot timpul, rubrica « Articole » în care elevii, absolvenţi ai şcolii şi profesorii, au publicat diferite articole pe teme matematice.

Astfel, tov. prof. N. Păun a semnat în primul număr, articolul « *Leonhard Euler* », apoi absolventul Dan Păulescu a avut articolul « *Asupra interpolării* » şi elevul Bulucea Const. a publicat în ultimul număr, articolul « *Metoda inducţiei matematice* ». În afară de acestea, gazeta « Matematica » a publicat diferite anunţuri privind olimpiadele de matematică şi fizică etc.

La sfîrşitul anului, la serbarea de fine de an, cei mai buni elevi colaboratori au primit *premii din partea direcţii şcolii.*

3° Din activitatea matematică extraşcolară, colectivul de organizare al acestei activităţi a tras următoarele concluzii:

a) Este necesară îmbunătăţirea activităţii cercurilor de matematică la clasele a VIII-a şi a IX-a, prin unificarea într-un singur cerc, în scopul realizării legăturii între elevii acestor clase.

b) Gazeta de perete « Matematica » a avut cea mai mare importanţă în trezirea interesului pentru studiul matematicii şi activitatea ei trebuie continuată.

c) Pentru viitor va trebui să se strîngă legătura dintre activitatea cercurilor şi gazetă, prin rezolvarea şi completarea unor probleme, articole, de către elevi în şedinţele cercurilor.

d) Munca tov. profesor Vişinescu Mihai, care a condus cu succes activitatea la această gazetă, va trebui pe viitor să fie sprijinită şi de ceilalţi tov. profesori, prin îndrumarea elevilor spre citirea articolelor şi rezolvarea problemelor.

C. Bulucea, absolvent, R. Vîlcea

REGULAMENTUL «OLIMPIADELOR DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ»

Art. 1 — Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează OLIMPIADE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ pentru elevii claselor a VIII-a — a XI-a ale învăţămîntului de cultură generală şi pentru elevii unor categorii de şcoli profesionale şi şcoli tehnice, cu limba de predare romînă sau a minorităţilor naţionale.

Art. 2 — Olimpiadele de matematică şi fizică contribuie la dezvoltarea interesului elevilor şi la antrenarea lor la o pregătire mai temeinică atît la matematică cît şi la fizică, la stimularea în muncă atît a elevilor cît şi a profesorilor, precum şi la popularizarea facultăţilor de matematică şi de fizică şi a institutelor tehnice care cer o pregătire de specialitate.

Art. 3 — *Organizarea olimpiadelor. Etape, Grupe.*

Olimpiadele de matematică şi fizică se desfăşoară în 3 etape:

a) etapa locală (în Bucureşti raională),

b) etapa regională.

c) etapa finală.

La matematică grupele de participanţi sînt:

grupa I m cl. VIII-a şi anul I şcoli pedagogice de 6 ani;

grupa II m cl. IX-a şi anul II şcoli pedagogice de 6 ani;

grupa III m cl. X-a grupa IV m cl. XI-a

grupa V m anul I şcoli profesionale

grupa VI m anul II şcoli profesionale cu caracter tehnic, industrial

grupa VII m anul II şcoli profesionale ale industriei de larg consum
grupa VIII m anul II şcoli tehnice de maiştri anul I
grupa IX m anul II şcoli tehnice de maiştri an III
grupa X m şcoli pedagogice anii 3 şi 4
La fizică grupele de participanţi sînt:
grupa I f: clasa VIII-a
grupa II f: clasa IX-a
grupa III f: clasa X-a
grupa IV f: clasa XI-a
grupa V f: anul I şcoli profesionale cu programă de fizică de 2 ani
grupa VI f: anul II şcoli profesionale cu programă de fizică de 2 ani
grupa VII f: anul I şcoli profesionale cu programă de fizică de 1 an
grupa VIII f: anul I şcoli tehnice maiştri
grupa IX f: anul I şcoli pedagogice de 6 ani
grupa X f: anul II şcoli pedagogice de 6 ani
grupa XI f: anul III şcoli pedagogice de 6 ani
grupa XII f: anul IV şcoli pedagogice de 6 ani
grupa XIII f: anul V şcoli pedagogice de 6 ani

Art. 4 — *Participarea la olimpiadă şi antrenarea elevilor.*

Pot participa la olimpiadă (etapa locală) elevii care în cursul trimestrelor I şi II au obţinut la matematică sau la fizică medii de la 8 în sus.

În cazul cînd elevul a obţinut asemenea medii la matematică şi la fizică poate participa la ambele olimpiade.

Pot participa la această etapă şi elevii care au obţinut media 7 la aceste discipline, numai cu recomandarea profesorului de specialitate.

Antrenarea elevilor la olimpiadă se face de către colectivele de profesori de specialitate din fiecare şcoală, chiar de la începutul anului şcolar. Ea se va manifesta prin:

— organizarea de cercuri de elevi pe şcoală,
— concursuri pe şcoli, organizate de colectivele de profesori de specialitate din şcoală,
— antrenarea elevilor la rezolvarea problemelor propuse în G.M.F. — B şi M.F.L.,
— organizarea de serate matematice şi fizice,
— gazeta de perete a cercului matematicienilor şi fizicienilor din şcoală.

Art. 5 — *Organizarea şi desfăşurarea etapei locale (în Bucureşti raională).*

Etapa se va desfăşura în prima duminică din luna martie — la matematică, în a doua duminică din martie — la fizică. (Anul acesta la 2 martie la matematică şi la 9 martie la fizică).

În fiecare localitate cu şcoli care participă la olimpiadă va funcţiona o comisie locală a olimpiadei.

Comisia locală va fi alcătuită de către filialele regionale ale S.S.M.F. în colaborare cu secţiile de învăţămînt regionale, şi comitetele regionale U.T.M. ţinînd seamă şi de propunerile subfilialelor S.S.M.F. pentru localităţile unde acestea activează.

Comisia va fi alcătuită din: 1 preşedinte (profesor de matematică sau de fizică) şi 2 membri (un profesor de matematică şi unul de fizică) şi un delegat al comitetului orăşenesc (raional) U.T.M.

Sarcinile comisiei locale sînt:

a) de a populariza olimpiada şi de a urmări felul în care se pregăteşte această acţiune în localitate;

b) de a antrena profesorii de specialitate la compunerea de probleme pentru diferite etape şi a le trimite comisiei centrale;

c) de a lua legătura cu şcolile din localitate şi de a întocmi listele elevilor care au dreptul de a participa la etapa locală;

d) de a mobiliza, cu sprijinul secției de învățămînt raionale sau orășenești, profesori supraveghetori și profesori corectori cunoscători ai limbilor în care se desfășoară olimpiada;

e) de a lua măsuri organizatorice pentru a asigura deplina obiectivitate:

— numele elevului va fi scris în colțul din dreapta sus al hîrtiei, iar colțul va fi lipit și sigilat,

— elevii participanți vor fi așezați în clase pe grupe, cîte unul în bancă, așa ca în părți, în față și în spate nici unul să nu aibă un coleg din aceiași grupă,

— hîrtia pentru lucrările scrise ale elevilor fiecărei grupe va fi de același fel,

— elevii nu vor fi supravegheați de profesori ai clasei respective și, în limita posibilului, lucrările vor fi corectate de profesori de specialitate ai altor clase,

— lucrările scrise se numerotează și se repartizează spre corectare la comisii de cîte doi profesori. Aceștia corectează separat și după ce cad de acord asupra punctajului acordat, notează lucrările și le semnează citeț,

— deschiderea lucrărilor și a sigiliului se face în fața comisiei locale;

f) În interval de 5 zile după desfășurarea olimpiadei de fizică comisia locală comunică comisiei regionale rezultatele, întocmind raportul asupra olimpiadei locale la ambele specialități. Raportul cuprinde:

— numărul elevilor participanți, pe clase, școli,

— lista elevilor admiși pentru etapa regională, pe clase, școli, cu punctajul acordat, anexînd și lucrările scrise ale acestor elevi,

— aprecieri critice asupra subiectelor propuse, asupra desfășurării etapei locale, asupra nivelului de pregătire al elevilor, comparativ între clase paralele și școli, asupra greutăților și lipsurilor semnalate;

g) Președintele comisiei locale primește subiectele în plic sigilat de la S.S.M.F. și deschide plicul în fața comisiei în ziua concursului.

Art. 6 — Elevii școlilor cu altă limbă de predare decît limba romînă pot redacta lucrările tuturor etapelor în limba de predare a școlii pe care o urmează.

Art. 7 — Pentru subiectele propuse se acordă fiecărui elev de la 1 la 20 puncte. Sînt declarați reușiți la etapa locală, elevii care au obținut cel puțin 14 puncte; aceștia sînt propuși să participe la etapa regională.

Art. 8 — *Organizarea și desfășurarea etapei regionale.*

Etapa regională se va desfășura în ultima duminică a lunii martie și ziua următoare. În acest an la 30 și 31 martie 1958.

În fiecare regiune va funcționa o comisie regională a olimpiadei. Comisia va fi alcătuită de către filialele regionale ale S.S.M.F. în colaborare cu secția de învățămînt regională.

Comisia regională va fi formată din: 2 profesori de matematică 2 profesori de fizică un de legat al comitetului regional U.T.M. și un președinte, de asemenea profesor de specialitate.

În această comisie pot fi cooptați la nevoie, și membri supleanți.

Sarcinile comisiei regionale sînt:

a) numește comisiile locale (v. art. 5) și le încunoștiințează pînă la data de 15 ianuarie; comunică numele președinților acestor comisii, adresa, grupele respective și limbile de predare pînă la 25 ianuarie comisiei centrale a olimpiadei; urmărește popularizarea olimpiadelor în întreaga regiune, pe toată durata desfășurării lor, folosind cercurile pedagogice, consfătuirile raionale, ședințele cu directorii, presa etc;

b) primește rapoartele comisiilor locale și întocmește lista participanților la etapa regională, după trierea lucrărilor primite;

c) primește subiectele etapei regionale de la comisia centrală a olimpiadei în plicuri sigilate, prin delegați ai S.S.M.F. sau prin poștă;

d) pentru asigurarea bunei desfășurări a etapei regionale are aceleași sarcini ca și comisiile locale (v. art. 5, pct. d, e);

e) asigură desfășurarea programului olimpiadei: prima zi dimineața — lucrarea scrisă la matematică, după amiaza — la fizică; a doua zi dimineața program educativ (vizitarea de întreprinderi, muzee, expoziții etc), corectarea lucrărilor și difinitivarea rezultatelor, iar după amiaza, serbarea de încheere a olimpiadei regionale, cu participarea reprezentanților autorităților locale urmată de un program artistic;

f) comisia regională centralizează rezultatele etapelor locală și regională și întocmește raportul olimpiadei pe întreaga regiune. Raportul trebuie să cuprindă:

— numărul participanților pe clase, școli, localități (separat la etapa locală și la cea regională),

— lista elevilor reușiți la etapa regională cu punctajul acordat, pe clase, școli, localități (sînt declarați reușiți la etapa regională toți participanții care au întrunit cel puțin 15 puncte din 20),

— lista elevilor reușiți, propuși să participe la etapa finală, anexînd lucrările lor scrise și scurte caracterizări ale elevilor întocmite de profesorul diriginte respectiv,

— aprecieri critice asupra olimpiadei (nivelul de cunoștințe al elevilor, interesul profesorilor, școlilor și organelor locale, subiectele, greutățile întîmpinate etc), atît pentru etapa locală cît și pentru cea regională.

Aceste rapoarte sînt inaintate comisiei centrale prin delegații S.S.M.F. care au fost prezenți la etapa regională sau — în lipsă — prin poștă, în termen de trei zile.

Art. 9 — *Organizarea și desfășurarea etapei finale.*

Etapa finală are loc în București între 1 și 10 mai, la o dată care se va fixa de comisia centrală a olimpiadei (anul acesta între 3 și 6 mai 1958)

Elevii participanți vor da:

— la matematică — lucrare scrisă și probă orală,

— la fizică — lucrare scrisă și lucrări de laborator, cu care ocazie vor avea loc discuții științifice cu profesorii conducători ai lucrărilor.

Lucrările scrise sînt eliminatorii.

Desfășurarea etapei finale este asigurată de comisia centrală a olimpiadei. Comisia centrală a olimpiadei este formată din:

— 5—8 profesori de matematică, 5—8 profesori de fizică, un delegat al M.I.C., Dir. g-lă a învăț. de cultură generală, un delegat al C.C. U.T.M. și 1 președinte desemnat de biroul de conducere al S.S.M.F.

Sarcinile comisiei centrale sînt:

a) de a propune subiectele pentru etapa locală, regională și finală.

b) de a primi și studia rapoartele comisiilor regionale și a definitiva lista elevilor admiși să participe la etapa finală.

c) de a asigura desfășurarea etapei finale în cele mai bune condiții, astfel:

— în prima zi: între orele 8—12 lucrarea scrisă la matematică, iar între orele 14—20 corectarea acestor lucrări scrise;

— a doua zi: între orele 8—12 lucrarea scrisă la fizică, iar între 14—20 corectarea lucrărilor scrise la fizică; în aceiași zi între orele 8—20 examinarea orală la matematică;

— a treia zi: continuarea examinării orale la matematică și lucrările de laborator la fizică;

— a patra zi: festivitatea de încheere a olimpiadei și înmînarea premiilor cîștigătorilor olimpiadei;

d) de a asigura corectarea lucrărilor scrise, executarea lucrărilor de laborator la fizică și a examenului oral la matematică, de asemenea evidențierea celor reușiți la etapa finală.

— Pentru îndeplinirea acestor sarcini comisia centrală își formează — colective de profesori de specialitate din București și provincie.

Art. 10 — *Dispoziţii finale.*

a) La toate etapele, elevii care întrunesc condiţiile acestui regulament se pot prezenta la ambele specialităţi: matematică şi fizică.

b) Subiectele la etapa locală se vor da din programa analitică a clasei respective parcursă în trimestrele I şi II şi din materia anilor precedenţi.

c) Subiectele la etapa regională se vor da din aceiaşi materie ca şi la etapa locală plus materia făcută în clasă pînă la vacanţa de primăvară.

d) Subiectele la etapa finală vor fi date în conformitate cu programa analitică a olimpiadei ce se va publica în G.M.F.—B şi în M.F.L. în numărul din decembrie al fiecărui an.

e) Elevii care au un număr mare de probleme rezolvate în G.M.F.—B. şi M.F.L. şi care au reuşit la etapa regională, vor fi preferaţi la recomandarea de a fi admişi la etapa finală.

f) Cheltuielile necesitate de transportul, cazarea, masa elevilor şi profesorilor şi premierea elevilor la etapa regională se asigură de secţiile de învăţămînt regionale, conform Instrucţiunilor nr. 522 tipărite în Buletinul Ministerului Învăţămîntului seria A, nr. 1—9 din 20 martie 1956. Comitetul fiecărei filiale regionale a S.S.M.F. răspunde de condiţiile create elevilor admişi din alte localităţi, de programul cultural oferit acestora în cursul olimpiadei regionale şi de festivitatea de înmînare a premiilor. Se va solicita şi concursul comitetului regional U.T.M.

g) Cheltuielile necesitate de transportul elevilor şi profesorilor la etapa finală se asigură de secţiile de învăţămînt regionale, conform Instrucţiunilor indicate la punctul precedent. Cazarea şi masa se asigură de Consiliul S.S.M.F. cu sprijinul sfatului popular al Capitalei. Pentru buna desfăşurare a programului cultural oferit elevilor în timpul etapei finale se va solicita concursul C.C. al U.T.M.

h) S.S.M.F. se va îngriji de acordarea diplomelor şi premiilor evidenţiaţilor la etapa finală.

S.S.M.F. va evidenţia profesorii cei mai activi care au contribuit la buna desfăşurare a diferitelor etape ale olimpiadelor şi profesorii care au prezentat elevii cei mai bine pregătiţi.

i) Presa locală şi centrală vor fi solicitate să sprijine popularizarea olimpiadei pe toată durata desfăşurării ei.

« OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1958 »

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice a R.P.R. organizează în anul şcolar 1957—1958 — ca şi în anii precedenţi — « Olimpiadele de matematică şi fizică », aşa cum s-a anunţat în G. M. F. seria B, uumerele 10, 11.

În cele ce urmează indicăm materia care trebuie însuşită, pe etape şi clase. Fiecare participant trebuie să cunoască temeinic şi materia claselor precedente.

Pentru o mai bună pregătire sfătuim pe participanţi ca, pe lîngă manualele şcolare şi culegerile de probleme, să consulte şi alte cărţi sau culegeri de probleme privind materia cerută, precum şi G. M. F. — seria B, unde se găsesc şi problemele date la olimpiadele din anii trecuţi.

Materia se repartizează astfel:

MATEMATICĂ

pentru etapa I locală (Bucureşti, raională) din 2 martie 1958
şi pentru etapa regională din 30 martie 1958

Grupa I m — cl. VIII-a de zi şi serală şi anul I şcoli pedagogice de 6 ani

Algebra — pînă la Inegalităţi, pag. 303;

Geometria — pînă la Cerc, pag. 139.

Grupa II m — cl. IX-a de zi şi serală cl. X serală şi anul II şcoli pedagogice de 6 ani

Algebra — pînă la Limite, pag. 266;
Geometria — pînă la Poligoane regulate, pag. 180.

Grupa III m — cl. X de zi şi cl. XI serală

Algebra — pînă la Numere complexe, pag. 164;
Geometria în spaţiu — pînă la Corpuri de rotaţie;
Trigonometria — pînă la Funcţii trigonometrice inverse.

Grupa IV m — cl. XI şcoli medii

va cuprinde pe elevii cl. XI ale învăţămîntului de cultură generală începînd din anul şcolar 1958—59.

Grupa V m — anul I şcoli profesionale

Aritmetica — toată materia prevăzută în programă;
Algebra — pînă la Inegalităţi şi inecuaţii de gradul I;
Geometria — pînă la Poligoane regulate.

Grupa VI m — anul II şcoli profesionale cu caracter tehnic industrial

Algebra — pînă la Reprezentarea grafică a funcţiei de gradul II;
Geometria — pînă la Corpuri rotunde;
Trigonometria — pînă la Tabele trigonometrice.

Grupa VII m — anul II şcoli profesionale ale industriei de larg consum

Algebra — pînă la Reprezentarea grafică a funcţiei de gradul II;
Geometria — pînă la Corpuri rotunde;
Trigonometria — pînă la Tabele trigonometrice.

Grupa VIII m — anul I şcoli tehnice de maiştri

Aritmetica — toată materia prevăzută în programă;
Algebra — pînă la Ecuaţii de grad superior;
Geometria — pînă la Ariile figurilor plane;
Trigonometria — pînă la Variaţia funcţiilor trigonometrice.

Grupa IX m — anul II şcoli tehnice de maiştri

Elemente de calcul diferenţial — toată materia prevăzută în programă;
Geometria în spaţiu — pînă la Trunchiul de piramidă;
Geometria analitică — pînă la Curbele de gradul II.

Grupa X m — anii III şi IV şcoli pedagogice

Aritmetica — pînă la Rapoarte, proporţii;
Geometria în spaţiu — toată materia prevăzută în programă.

Pentru etapa finală (republicană) pe ţară care va avea loc la Bucureşti între 3 şi 6 mai 1958 constînd din lucrare scrisă şi probă orală, se cere toată materia din manualele clasei respective şi a claselor precedente.

FIZICA

Pentru etapa I locală din 9 martie 1958 şi pentru etapa II regională din 30 martie 1958.

Grupa I f — clasa VIII-a de zi şi serală

Cinematica, dinamica şi energia mecanică — pînă la Statică, pagina 215 din manualul de cl. VIII-a.

Grupa II f — clasa IX-a de zi şi serală

Fizica moleculară şi Căldura. Proprietăţile corpurilor solide. Noţiuni de rezistenţa materialelor — pînă la Schimbări de stare fizică a corpurilor, pagina 212 manualul de fizică cl. IX-a.

Grupa III f — clasa X-a de zi şi serală

Electricitatea: electrostatica, legile curentului electric, curentul electric prin lichide şi gaze, cîmp magnetic, electromagnetism — pînă la Inducţia electromagnetică, pag. 45—223 din manualul de fizică pentru cl. X-a.

Grupa IV f — clasa XI-a serală

Oscilaţii şi unde. Acustica — pag. 1—45 din manualul de fizică pentru cl. X-a.

Oscilaţii şi unde electromagnetice, din manualul de fizică pentru cl. X-a.

Optica geometrică — pînă la Optica fizică din manualul de fizică pentru cl. X-a.

Grupa V f — anul I şcoli profoesionale cu predarea fizicii în 2 ani

Mecanica, cinematica, dinamica, statica — pînă la Mecanica lichidelor şi gazelor — din programa de fizică pentru şcolile profesionale de ucenici a Ministerului Învăţămîntului şi Culturii, 1957.

Grupa VI f — anul II şcoli profesionale cu predarea fizicii în 2 ani.

Căldura, motoare termice, electrostatica, legile curentului electric, electromagnetism — pînă la Curentul alternativ, din programa de fizică pentru şcolile profesionale de ucenici anul II a Min. Înv. şi Cult. 1957.

Grupa VII f — anul I şcoli profesionale cu predarea fizicii întru-un an

Mecanica şi Căldura — din programa de fizică pentru şcolile profesionale de ucenici a Min. Înv. şi Cult. 1957.

Grupa VIII f — anul I şcoli tehnice de maiştri

Mecanica şi Căldura — din programa şcolilor tehnice de maiştri a Ministerului Învăţămîntului şi Culturii, 1957.

Grupa IX f — anul I şcoli pedagogice de 6 ani

Mecanica: mişcarea rectilinie uniformă, mişcarea rectilinie uniform variată, Compunerea mişcărilor, mişcarea circulară. Dinamica: inerţie, forţa, masa (legea I şi a II-a a Mecanicii) — pînă la legea a III-a a Mecanicii din programa de fizică pentru anul I a Ministerului Învăţămîntului şi Culturii, 1957.

Pentru etapa finală (republicană) pe ţară care va avea loc la Bucureşti, între 3 şi 6 mai 1958, la lucrarea scrisă se cere toată materia prevăzută în programa şcolară a clasei respective precum şi materia parcursă în clasele precedente.

Pentru *proba de laborator* dăm mai jos temele lucrărilor care trebuie pregătite, pe grupe:

Grupa I f cl. VIII-a şi grupa IX-a anul I şcoli pedagogice

Măsurători de: lungime, grosime, diametru, timp, forţe masă şi greutate.

Grafice: întocmirea şi citirea graficelor. Studiul legilor mişcărilor uniforme, a mişcărilor uniform variate şi a mişcării de rotaţie.

Utilizare mecanismelor simple: pîrghii, scripeţi, plan înclinat

Grupa II f — cl. IX-a

Determinarea greutăţii specifice a unui corp solid sau lichid cu balanţa hidrostatică, cu picnometru şi areometru.

Determinări de călduri specifice cu calorimetrul. Determinarea temperaturii unui corp prin metoda calorimetriei. Măsurători de temperaturi şi trecerea dintr-o gradaţie într-alta.

Verificarea legii Boyle-Mariotte. Determinarea randamentului unei maşini simple.

Determinarea căldurii latente de topire a gheţii şi de vaporizare a apei.

Grupa III f — cl. X-a

Verificarea legii lui Ohm. Verificarea legii rezistenţei conductorilor. Întrebuinţarea şi mînuirea reostatelor.

Baterii de elemente şi măsurarea rezistenţei interioare a unui element sau acumulator. Măsurarea unei rezistenţe cu puntea Wheatstone. Verificarea legii Joule-Lenz. Verificarea

legilor Faraday. Măsurători electrice de intensitate și tensiune. Instalație electrică cu aprindere succesivă de becuri. Instalație de sonerie la rețea cu transformator și întrerupător. Utilizarea transformatorilor electrici, motoare electrice etc.

Grupa IV f — cl. XI seral

Determinarea accelerației gravitației cu ajutorul pendulului. Determinarea distanțelor focale la oglinzi și lentile. Determinarea indicelui de refracție (metoda acelor). Măsurarea intensității unui izvor luminos cu ajutorul fotometrului Bunsen. Instalarea și mînuirea unui aparat de radio recepție cu galenă. Emisie și recepție de unde electromagnetice.

Grupa V f — Anul I școli profesionale cu predarea fizicii în 2 ani

Măsurători de lungime, grosime, diametru, timp, forța masă și greutăți.

Grafice: întocmirea și citirea graficelor. Studiul legilor mișcărilor uniforme, uniform variate și a mișcărilor de rotație. Determinarea coeficientului de frecare. Utilizarea mecanismelor simple: pîrghii, scripeți, plan înclinat. Determinarea greutății specifice a unui corp solid sau lichid, cu balanța hidrostatică, picnometru și areometru.

Grupa VI f — Anul II școli profesionale cu predarea fizicii în 2 ani

Determinări de călduri specifice cu calorimetrul. Determinarea temperaturii unui corp prin metoda calorimetrică. Măsurători de temperaturi și trecerea dintr-o gradație în alta.

Determinarea randamentului unei mașini simple. Determinarea căldurii latente de topire a gheții și de vaporizare a apei.

Verificarea legii Ohm. Întrebuințarea și mînuirea reostatelor și a cutiilor de rezistență. Baterii de elemente și utilizarea lor. Încărcarea acumulatorilor. Aplicații ale legilor electrolizei. Măsurători electrice de intensitate, tensiune, rezistență. Instalații electrice cu aprindere succesivă de becuri. Instalație de sonerie la rețea cu transformator și întrerupător. Utilizarea transformatorilor și a motoarelor electrice.

Grupa VII f — școli profesionale cu predarea fizicii într-un an

Aceleași lucrări ca la grupele V și VI.

Grupa VIII f — școli tehnice de maiștri

Aceleași lucrări ca la grupele V și VI.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2426

Să se arate că dacă $0 < x < 10°$, *avem*:

$$\sin(50° + x)\cos(20° + x) > \sin(40° + 2x)\cos(10° + 2x).$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Neegalitatea se mai scrie:

$$\sin(70° + 2x) + \sin 30° > \sin(50° + 4x) + \sin 30'$$

sau

$$\sin(70° + 2x) - \sin(50° + 4x) > 0.$$

De unde avem mai departe:

$$2\sin(10° - x)\cos(60° + 3x) > 0.$$

Neegalitate ce este evidentă în condiția dată $0° < x < 10°$.

Soluții bune am primit de la *A. Iorgulescu* (student București), *Th. Schein* (s.m. 1 București).

Problema 2427

Să se rezolve ecuațiile:

$$5x^3 - (5a - 6)\,x^2 - 2\,(3a - 5)\,x + 12 = 0,$$

$$2x^3 - (2a + 3)\,x^2 + (3a + 4)x - 6 = 0,$$

știind că admit cel puțin o rădăcină comună, iar a este un număr real.

C. Ionescu-Țiu

O soluție. — Înmulțim prima ecuație cu -2 și a doua cu $+5$ și le adunăm:

$$-10x^3 + 2\,(5a - 6)\,x^2 + 4\,(3a - 5)\,x - 24 = 0.$$

$$+10x^3 - 5\,(2a + 3)\,x^2 + 5\,(3a + 4)\,x - 30 = 0.$$

Obținem:

(1) $$-27\,x^2 + 27\,ax - 54 = 0 \text{ sau } x^2 - ax + 2 = 0,$$

$$\frac{5x^3 - (5a - 6)\,x^2 - 2\,(3a - 5)\,x + 12}{x^2 - ax + 2} = 5x + 6.$$

Deci prima ecuație se descompune în

(2) $$(5x + 6)\,(x^2 - ax + 2) = 0,$$

$$\frac{2x^3 - (2a + 3)\,x^2 + (3a + 4)\,x - 6}{x^2 - ax + 2} = 2x - 3.$$

A doua ecuație prin urmare se descompune în

(3) $$(2x - 3)\,(x^2 - ax + 2) = 0.$$

Rădăcinile comune ale celor două ecuații sînt date de ecuația $x^2 - ax + 2 = 0$ și anume:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2};$$

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

Dacă $\sqrt{a^2 - 8} = 0$, adică $a = \pm 2\sqrt{2}$, atunci rădăcina comună este dublă etc.

Problema E: 915

Să se găsească un număr de două cifre astfel ca raportul între diferența și suma cifrelor sale să fie $\frac{4}{5}$.

Eugen Iacob

Soluție. — Să însemnăm cu z cifra zecilor și u cifra unităților; numărul căutat va fi: $N = 10\,z + u$.

Vom avea două cazuri, după cum cifra zecilor va fi mai mare sau mai mică decît cea a unităților.

Primul caz:

(1) $$\frac{z - u}{z + u} = \frac{4}{5};$$ (2) $$\frac{u - z}{u + z} = \frac{4}{5}.$$

Ecuațiile (1) și (2) dau:

(3) $$z = 9u$$ și (4) $$u = 9z,$$

z și u trebuind să fie numere de cîte o singură cifră, în ecuația (3) va trebui să avem $u = 1$ și $z = 9$, iar în (4), $z = 1$ și $u = 9$.

Deci, $N = 91$ sau $N = 19$.

Problema E: 916

Să se arate că:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{243}+\sqrt[3]{324}+\sqrt[3]{486}+\sqrt[3]{1296}}=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}.$$

T. Căsăndroiu, elev Ploeşti

O soluţie. — Expresia dacă se mai poate scrie:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{3^3\cdot 2\cdot 1^2}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3\cdot 1}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2^2\cdot 1}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2\cdot 1}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2^2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2\cdot 2}+\sqrt[3]{6^3\cdot 2\cdot 3\cdot 1}}=$$

$$=\sqrt[3]{1+2+3+3\sqrt[3]{2\cdot 1^2}+3\sqrt[3]{3\cdot 1^2}+3\sqrt[3]{2^2\cdot 1}+3\sqrt[3]{3^2\cdot 1}+3\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+3\sqrt[3]{3^2\cdot 2}+6\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 1}}$$

Ţinînd seamă de identitatea:

$$(a+b+c)^3.=a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3c^2b+3a^2c+3bc^2+3b^2c+6abc$$

şi făcînd $a=1$, $b=\sqrt[3]{2}$; $c=\sqrt[3]{3}$,
obţinem egalitatea din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

2883. — Prin aplicarea legii conservării energiei să se studieze alunecarea fără frecare a unui corp pe un plan înclinat.

Alexandru Stoenescu

2884. — Fie H ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul de rază R, şi A', B', C' inversele punctelor A, B, C faţă de polul H şi puterea R^2. Să se demonstreze că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ şi că $\frac{R}{2}$ este raza acestui cerc.

Gh. Buicliu

2885. — Să se reducă la forma cea mai simplă, expresia:

$$\frac{\frac{(a-b)(c+d)}{a+b}+\frac{(b-c)(a+d)}{b+c}+\frac{(c-d)(a+b)}{c+d}+\frac{(d-a)(b+c)}{d+a}}{\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-d}{c+d}+\frac{d-a}{d+a}}$$

C. Coşniţă

2886. — Se dă triunghiul ABC şi un punct M pe cercul circumscris. Notăm cu N, P, Q proiecţiile punctului M respectiv pe AB, AC, BC, cu F, E, I proiecţiile vîrfului B respectiv pe MA, NQ, MC. Fie punctele: $R\equiv(BF, MN)$, $D\equiv(BE, AC)$, $L\equiv(BI, MQ)$, $K\equiv(ID, EL)$, $S\equiv(FD, RE)$.

Să se arate că punctele P, K, S şi M sînt colineare.

Emil Lerner, Bucureşti

2887. — Un cerc O de rază R este împărţit în n părţi egale prin punctele de diviziune A_1, $A_2\ldots$, A_n; se ia pe OA_1 punctul B_1 aşa ca $OB_1=\frac{OA_1}{n}$; pe OA_2, punctul B_2 aşa ca $OB_2=\frac{OA_2}{n-1}$; pe OA_3 punctul B_3 aşa ca $OB_3=\frac{OA_3}{n-2}$ şi aşa mai departe. Să se arate că aria poligonului $B_1B_2\ldots B_{n-1}A_n$ este egală cu a n-a parte din aria poligonului $A_1A_2\ldots A_n$

Corneliu Georgescu

2888. — La forarea unui puţ, preţul unui metru de forat este cu 10% mai mare decît forarea metrului precendent forat. Să se afle dacă este mai convenabilă forarea unui puţ de 30 m adîncime sau a trei puţuri a cîte 20 metri adîncime. Cîte puţuri se pot fora cu adîncimea de 10 m, cu preţul forării unui puţ de 40 m adîncime?

C. Ionescu-Ţiu

2889. — Cîţi poli are o maşină de curent alternativ care cu o tensiune la borne de 75 V şi o turaţie de 1650 rot/min alimentează o bobină fără miez de fier cu 500 spire de sîrmă de aluminiu ($(\rho = 0{,}029)$ de diametru 1 mm?. Caracteristicile unei spire: lungimea = 50 cm, diametrul mediu = 20 cm. Forţa electromotoare de autoinducţie este 55, 26 V.

Tiberiu V. Col.baba, student Bucureşti

2890. — Să se calculeze: $\log_{30} 7{,}2$ ştiind că $\log_{30} 5 = a$.

B. Huhulea

2891. — Să se arate că într-un triunghi oarecare există relaţia

$$\frac{a}{\sin A}(b \cos B + c \cos C) = b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C$$

şi încă două relaţii analoage.

I. Stepan, zidar Cobadin

2892. — Pentru o staţie de pompare este nevoie de un electromotor de 100 C.P. Distanţa de la electromotor la uzina electrică este de 1 000 m. Presupunînd că nu se admite decît o cădere de tensiune de 10% şi ştiind că electromotorul funcţionează cu 110 V, se cere:

1. secţiunea firelor de legătură cu uzina, presupunînd că sînt din cupru;
2. Ce tensiune trebuie să dea uzina?

Marin Stoica, absolvent Sibiu

2893. — Capacitatea unui circuit oscilant este de 50 μF. Să se calculeze:

a) inductanţa bobinei şi frecvenţa oscilaţiilor circuitului ştiind că perioada lor este de $25 \cdot 10^{-8}$.

b) lungimea de undă a oscilaţiilor electromagnetice. (se dă viteza luminii C = 300 000 km/s).

Gh. Feremţi, elev Satu-Mare

2894. — Fiind dat triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$) să se determine pe cateta AB un punct M astfel ca $MA + AC = MB + BC$.

M. M. Vişinescu, elev Giurgiu

2895. — Sub ce unghi de emergenţă iese raza din refractometrul Pulfrich construit din sticlă de Crown, care analizează în acel moment o picătură de alcool?

Unghiul aflat fiind unghiul limită la suprafaţa mediului de indice n_1 într-un refractometru Abbé, să se afle valoarea lui n_1. Refractometrul Abbe este confecţionat din aceiaşi sticlă.

Se dă indicele de refracţie al sticlei de Crown 1,52 şi alcoolului 1,363.

Ad. Kleckner, elev Bucureşti

2896. — Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 3x + a = 0$, ştiind că între rădăcinile ei există relaţia $x_1^5 + x_2^5 = 33$.

M. Profirescu, elev Giurgiu

2897. — Să se calculeze sumele:

$$S_1 = 1 + a\cos x + a^2 \cos 2x + \ldots + a^n \cos nx$$
$$S_2 = 1 + a\sin x + a^2 \sin 2x + \ldots + a^n \sin nx$$

O. Nanu, elev Iaşi

2898. — Pentru care valori ale lui x cuprinse între $0°$ şi $360°$ avem: $\sin 2x < \cos x$.

C. Ionescu-Ţiu

2899. — Un obiect liniar AB este aşezat perpendicular pe axul optic al unui microscop la distanţă de $\frac{10}{3}$ cm de obiectiv. Imaginea lui $A'B'$ se formează la o distanţă de 5 cm de ocular. Cunoscund puterea optică a lentilelor de 40 şi respectiv $\frac{50}{3}$ dioptrii, să se determine:

a) distanţa de ocular la care se formează imaginea $A''B''$,
b) grosimentul microscopului,
c) mărimea imaginii cunoscînd $AB = 0{,}25$ cm.
Să se arate mersul razelor în microscop.

Gavrilă Horia, elev Bucureşti

2900. — Fie $SABCD$ o piramidă cu baza un patrat de centru O, vîrful în S şi muchia SA perpendiculară pe bază. Notăm unghiul BSD cu α şi unghiul format de perpendicularele din O pe feţele SBC şi SCD cu β. Să se arate că avem: $\cos\alpha + \cos\beta = 1$.

Simon Şt. Petre

2901. — Să se rezolve ecuaţia trigonometrică:

$$\sin^{14} x + \cos^{14} x = \frac{169}{64}\cos^6 2x.$$

Marius V. Iosifescu

2902. — Dacă $U_0, U_1, U_2, U_3, \ldots$ sînt termenii consecutivi ai şirului lui Fibonacci să se demonstreze că există relaţiile:

$$\frac{U_1}{U_0U_2} + \frac{U_2}{U_1U_3} + \frac{U_3}{U_2U_4} + \ldots + \frac{U_n}{U_{n-1}U_{n+1}} = 2 - \frac{U_{n+2}}{U_n \cdot U_{n+1}}$$

$$\frac{1}{U_0U_2} + \frac{1}{U_1U_3} + \frac{1}{U_2U_4} + \ldots + \frac{1}{U_{n-1}U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{U_n \cdot U_{n+1}}$$

I. I. Cristea

2903. — Fie ABC un triunghi oarecare. Prin vîrfurile B şi C se duc două drepte paralele D_1 şi D_2. Fie M intersecţia bisectoarelor unghiurilor formate de D_1 şi AB şi respectiv D_2 şi AC. Se cere locul M cînd D_1 şi D_2 se rotesc în jurul lui B şi C, iar A descrie cercul circumscris triunghiului ABC.

Radu Petrovici, student Bucureşti

2904. — Fie un triunghi oarecare ABC şi l_a, l_b, l_c bisectoarele interioare ale unghiurilor sale. Notînd cu A_1 şi A_2 proiecţiile vîrfului A pe l_c şi l_a cu B_1 şi B_2 proiecţiile vîrfului B pe l_c şi l_a şi cu C_1 şi C_2 proiecţiile vîrfului C pe l_a şi l_b, să se arate că:

$$AA_1 \cdot CC_2 + BB_1 \cdot AA_2 + CC_1 \cdot BB_2 = r_a(r + r_b + r_c)$$

unde r este raza cercului înscris în triunghi şi r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise ale triunghiului.

Em. Alexandru, elev Bucureşti

2905. — Se consideră un circuit oscilant; perioada unei oscilații complete a circuitului este egală cu perioada de oscilație a unui pendul cu lungimea de 20 cm. Condensatorul din acest circuit are o capacitate egală cu capacitatea unui condensator care are o energie de 24,5 jouli și este încărcat de o sursă cu tensiunea de 49 volți. Se cere inductanța bobinei din circuitul oscilant.

Mihai Rusu, elev Ocna Mureș

2906. — Fiind date un cerc (O) și o dreaptă (Δ) să se ducă dintr-un punct A dat de pe cerc o dreaptă astfel că dacă notăm cu B și C cealaltă intersecție a acestei drepte, cu (O) și respectiv intersecția ei cu (Δ), să avem:

$$\frac{AB}{BC} = h.$$

Onofraș Eugen, profesor Huși

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *

E: 1052. — O gospodărie de stat a însămînțat 1300 ha cu grîu, orz, ovăz și secară, Grîu a însămînțat de 3 ori mai mult ca orz, iar orz a însămînțat de două ori mai mult ca ovăz, iar ovăz s-a însămînțat de 4 ori mai puțin decît secară. Să se afle suprafețele însămînțate cu fiecare cultură în parte (soluție artimetică).

N. Chișcaru, elev Tecuci

E: 1053. — Un automobil a consumat în prima cursă 30% din benzina pe care o avea în rezervor; în cursa a doua pe care a făcut-o a consumat 45% din rest.

După cele două curse i-a mai rămas în rezervor cu 1,105 litri benzină mai multă decît benzina consumată în prima cursă. Să se afle cîți litri de benzină au fost inițial în rezervor, cîtă benzină a consumat în prima cursă, în a doua și cîți litri au mai rămas.

B. V. Fărcaș, Zălău

E: 1054. — Să se arate că produsul a cinci numere consecutive este un multiplu de 120.

I. Strătescu, elev Călărași

E: 1055. — Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9}$$

Al. Necșoiu, elev București

E: 1056. — La o gospodărie zootehnică de stat, pentru 120 vaci mulgătoare și 45 iepe de prăsilă se dădea zilnic cîte 1365 kg furaje. Mărindu-se rația de furaje pentru iepe cu 20% și pentru vaci cu 25% s-au dat zilnic cîte 1686 kg.

Cîte kg furaje a fost rația pe zi pentru o vacă și cîte pentru o iapă.

B. Baieră, profesor Păunești

E: 1057. — Un funcționar primește salariul de 1120 lei din care 672 lei îi întrebuințează pentru a cumpără: o cămașă, o cravată și un costum de haine. Știind că diferența dintre

---

* La E: 1052 — E: 1066 se primesc soluții pînă la data de 1 aprilie 1958; însă nu de la elevii claselor IX, X, XI și nici de la studenți.

costul cămăşii şi al cravatei este 28 lei, iar raportul dintre costul costumului şi cel al cămăşii este 8, se cere să se afle costul cămăşii, al cravatei şi al costumului şi cît i-au rămas necheltuiţi.

Fl. Brezeanu, elev Tîrgovişte

E: 1058. — Să se arate că dacă m şi n sînt fără soţ, expresia $E = m^2 (m^2 + 1) + n^2 (n^2 + 1) - 3 m^2 n^2 - 1$, se divide cu 8.

Florea Dorel, elev Slatina

E: 1059. — Să se arate că diferenţa dintre un număr alcătuit din cinci cifre consecutive şi răsturnatul lui este întotdeauna 41976.

* * *

E: 1060. — Cît costă zugrăvitul unei camere avînd lungimea de 10 m, lăţimea de 6 m, iar înălţimea de 5 m, dacă pentru 0,5 m^2 zugrăvitul se plăteşte 0,9 lei, iar camera are 5 ferestre de dimensiuni $2 \times 1{,}5$ m^2?

D. Tomoiagă, elev Sighet

E: 1061. — Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd un unghi ascuţit şi distanţa între picioarele înălţimii şi bisectoarei duse din vîrful unghiului drept pe ipotenuză.

R. Roăşcanu, elev Bucureşti

E: 1062. — La naşterea, sorei tata avea vîrsta pe care o am eu cu fratele meu împreună, fratele avea de două ori vîrsta pe care o aveam eu; iar eu aveam $\frac{1}{4}$ din vîrsta pe care o avea tata. Ştiind că împreună totalizam 70 de ani, să se afle ce vîrstă avem fiecare.

Stan C. Dumitru, student Bucureşti

E: 1063. — A îi spune lui B: eu am odată şi jumătate vîrsta pe care o aveai tu acum un an şi jumătate. Şi cînd vei avea tu vîrsta pe care o să o am eu peste un an şi jumătate vom avea împreună 64 ani şi 6 luni. Cîţi ani are fiecare?

Slt. Constantin Aurel, Bucureşti

E: 1064. — Dacă $xy + yz + zx = a$ şi $x + y + z = b$, să se arate că

$$(xy - a)^2 (x + z)^2 (y + z)^2 + (yz - a)^2 (y + x)^2 (z + x)^2 + \\ + (xz - a)^2 (x + y)^2 (z + y)^2 = (b^2 - 2a) (xy - a)^2 (zy - a)^2 (xz - a)^2$$

C. I. Ţ.

E: 1065. — Într-un triunghi oarecare ABC bisectoarea din vîrful A întîlneşte cercul circumscris în A_1. Pe înălţimea AA_2 se ia punctul D la distanţa $AD = R$, unde R este raza cercului circumscris. Să se demonstreze că patrulaterul $OADA_1$ este un romb.

C. I. Ţ

E: 1066 — Două echipe de pionieri lucrînd împreună pot strînge spicele de pe terenul unei gospodării agricole colective în 6 zile. Echipele lucrează în comun 4 zile şi apoi o echipă se mută pe terenul altei gospodării. Pentru a termina strîngerea spicelor cealaltă echipă lucrează singură încă 5 zile. Să se afle în cîte zile ar fi putut strînge spicele fiecare echipă lucrînd singură.

(Admiterea în cl. VIII-a, Ploeşti, 1957)

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

pînă la 15 august 1957 s-au evidențiat ca rezolvitori de probleme din Gazeta Matematică și Fizică seria B, după cum urmează

Popescu Paul R. (Fac. electronică), *Tîrtan Gabriel* (absolvent Găiești), *Vîrgolici Virgil* (Fac. Instalații București), *Iftimie Cristea* (absolvent Rădăuți), *Bătireanu Gheorghe* (absolvent Buzău), *Kim-Yan-Su* (cl. X s.m. 3 Iași), *Bergtaler Cristian* (cl. IX Petroșani), *Vișinescu Mihai* (cl. X s. m. 1 Giurgiu), *Gheorghe A Cezar* (cl. VIII Buzău), *Popescu O. Radu* (cl. VIII Giurgiu), *Motoargă Dumitru* (cl. IX lic. mil. « D. Cantemir » Breaza), *Căsăndroiu C, Tudor* (cl. X Ploiești), *Mihăilescu Viorel* (cl. VIII s. m. 1 Caracal), *Tudor M. Gheorghe* (s. m. 13 « D. Cantemir »,) *Tomescu Ion* (cl. VIII s. m. 1 Ploești), *Glasberg Vladimir* (cl. IX s. m. 12 București), *Ciobanu N. Marin* (absolvent Giurgiu), *Pițigoi Gheorghe* (absolvent R. Vîlcea), *Rusu Constantin* (cl. IX s. m. 1 Turnu Severin), *Cîrnu Mircea* (cl. X s. m. 3 Tîrgoviște), *Moise Mihail* (cl. VIII Tîrgu-Ocna), *Strătescu Ion* (absolvent Călărași), *Cosmuță Ion* (absolvent Dej), *Constantinescu Mihai* (cl X-a. Școala medie Nr. 3. București) *Delibaș Constantin* (cl. X Ploiești), *Pupăzan V. Nicolae* (absolvent Sibiu), *Dascălu Dan* (cl. VIII s. m. 1.București), *Lupaș Laurențiu* (s. m. 1 București) *Timuș M. Dan* (cl. VIII s. m. 1 Ploești), *Constantin A. Radu* (absolvent București), *Ioachim Alexandru* (cl. IX s. m. 1 București), *Schiopulescu Dan* (absolvent București), *Schiop Alexandru* (cl. X s. m. 1 Oradea), *Colinian M.* (cl. IX s. m. 3 Ploești), *Perianu Dan* (cl. VIII Reșița), *Olteanu Stoica Ștefan* (s. m. 17 București), *Ardeleanu Romulus* (absolvent Oradea), *Petrescu Virgil* (cl. VIII s. m. 1 Ploești), *Baltac Vasile* (cl. X. s. m. 1 Ploiești), *Grecu Anton* (cl. IX Roșiorii de Vede), *Tudor Gheorghe* (cl. VIII Moreni — Ploești), *Moflic Emilian* (cl. VIII Moreni), *Nicolescu Basarab* (cl. VIII s. m. 1 Ploești), *Cotîrlea Ion* (student Cluj), Stan C. *Dumitru* (A. T. M. București), *Isbășescu E. Mircea* (cl. VIII s. m. 8 București), *Ștefănescu V. Rodica* (cl. VIII s. m. 1 Ploești), *Ghenea R. Anghel* (absolvent Slatina), *Neaga C. Constantin* (Drăgășani, R. Vîlcea), *Rădescu Eugen* (cl. IX Focșani), *Ixaru Gr. Lucian* (cl. IX Găești), *Gherlan Vasile* (absolvent Sărmășag șag), *Trandafir Mircea* (absolvent Călărași), *Panaitescu G. Aureliu* (cl. VIII Turnu Măgurele), *Antoniu Sorin* (cl. X s. m. 11 « D. Cantemir »), *Iordănescu Radu Sorin* (cl. IX s. m. 20 « Gh. Șincai »), *Butoiu Octavian* (cl. VIII Moreni), *Dorobanțu Valeriu* (absolvent Slatina). *Anițescu Nicolae* (cl. X s. m. 1 « Tudor Vladimirescu » Tîrgu Jiu), *Grosescu Radu* (cl. VIII lic. mil. « D. Cantemir » Breaza), *Stoian N. Gheorghe* (c. VIII s. m. 13 București), *Stepan Ionel* (zidar, Cobadin) *Dolteanu Temistocle* (absolvent Huși), *Cristea Paul* (absolvent București) *Zorapapel Tiberiu* (cl. X s. m. 20 « Gh. Șincai » București), *Bucu P. Paul* (absolvent Buzău), *Nanu Octavian* (cl. VIII s. m. 3 Iași), *Pop Corneliu* (cl. X. s. m. 1 Oradea), *Spinei Fănică* (cl. IX Roman), *Brezeanu I. Florin* (cl. VIII s. m. 3 Tîrgoviște), *Isbășescu Mihai* (cl. IX s. m. 1 București), *Oprică Mihai* (s. m. 17 București), *Bîrsan Romanel* (cl. X Cluj), *Anghel Constantin* (absolvent Constanța), *Murăreci Fănică* (cl. X Curtea de Argeș), *Lăscuțoiu Virgil* (absolvent Ghelaru-Hunedoara), *Profirescu D. Marcel* (cl. IX s. m. 1 Giurgiu), *Mîrlogeanu Florea* (cl. X s.m. 1 Giurgiu), *Gervescu M. Ioan* (cl. IX Piatra Neamț), *Bică I. Constantin* (cl. IX Pitești), *Rășcanu Radu* (cl. VIII s. m. 1 București), *Kleckner Adrian* (cl. X s. m. 1 București), *Rădulescu D. Constantin* (cl. X s. m. 4 București), *Eftimie Z. Radu* (cl. IX s. m. 18 București), *Drăgănescu Cornel* (cl. VIII s. m. 1 Cîmpina) *Grigoraș Vasile* (clasa IX s.m.m. Breaza) *Nicolau C. Virgil* (cl. IX s.m. 4 București *Stamatoiu Petre* (clasa X. s. m. 4. București). *Matei Ion* (Vaslui)

Pînă la 15 august 1957 s-au primit probleme rezolvate, note, articole, probleme propuse date asupra cercurilor de matematici și fizică, recenzii asupra materialelor recent publicate informații, propuneri, cereri și diverse, după cum urmează:

ALEXANDRIA. Cl. X. Nicolae Ion (2539, 67, 606, 07, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 33, 49, 68, 69, 72, 75).

ANINA (Reg. Timișoara). Cl. IX. Damian Dumitru (2539, 67, 79, 87, 606, 11, 13, 19, 21, 23, 24, 25), Voia Iacob (2539, 54, 67, 78, 79, 80, 610, 11, 13, 14, 21, 24, 25).

ARAD. s. m. « Ion Slavici », cl. VII. Saur Florica (E: 949, 51, 52, 63, 64, 72, 73); cl. VIII. Tănase Despina (2549, 67, 623, 24, 66, E: 935, 36, 42, 43, 49, 50, 51, 54, 60); cl. IX. Beștea Cătălin (2539, 54, 65, 68, 69, 72, 74, 78, 79, 84, 85, 88, 90, 91, 603, 07, 10, 11, 13, 16, 19, 21, 23—27). Abs. Sipoș Maria (2610—16, 19—26, 28—30).

ADJUD. (Reg. Bacău). Cl. VII. Grigoraș Didi (E: 944, 46, 49, 52, 60, 67, 68); cl. IX. *Grigoraș Vasile* (2541, 42, 49, 58, 93, 94, 99, 603, 06, 15, 16, 27, 28, 33, 34, 37, 39, 40, 46, 49, 53, 56, 57, 64—66, 68, 72, 74, 75, 78).

S. m. 7 *ani Păunești*. Cl. VI. Novac Felicia (E: 949—52, 57, 58, 60, 65), Ștefan Felicia (E: 949—52, 57, 58, 60, 65). Cl. VII. Pintilie Florica (2560, 620, 24, 25), E: 927, 43, 44, 49, 50—52, 54, 58, 60), Vasilache Zarafina (2560, 620, E: 941, 49, 50—52, 54, 57, 58, 60, 61).

BACĂU. cl. VIII. Mirțu Dan (2610, 11, 33, 34, 66, E: 892, 951, 54, 60—63, 72, 75, 76, 80), Vigder Armand (2567, 78, 79, 615, 16, 21, 25, 28, 67, 68, 69, 75, E: 935); cl.IX. Sîrbu Mihai (2553, 85, 88, 89, 94, 99, 606, 07, 10, 11, 13—16, 19—21, 27, 30, 40). Abs. Pelin Adrian (2555, 60, 87, 606, 08, 20—27, 30).

BAIA MARE. Cl. VIII. Atanasiu Moise (2589, 610, 12, 23, 25, 64, 66—72, E: 955, 60, 61, 64, 68), Bota Zenobiu (2610, 11, 20, 21, 23—25, 27, 72, 74, E: 949—52, 54, 60—64), Fazakas Anton (2664, 66, 72, 74, 77, E: 964—68, 71, 73), Lauran Augustin (2555, 78, 610, 24, E: 935, 36, 43, 47—49, 51, 52, 54). Cl. IX. Moisă Marin (2555, 78—80, 89, 610, 24, 25, 33, 34, 72), Pop Dumitru) (2503, 04, 23, 32, 33, 39, 49, 68, 79). Pop Gheorghe (2588, 93, 98, 99, 610, 11, 20, 21, 23—26, 28, 29).

BAIȘ (Craiova). Cl. IX. Croitoru D. Constantin (2539, 72, 79, 80, 88, 613, 19—21, 23, 25).

BEIUȘ. Cl. VIII. Bodeanu Corneliu (2589, 610—12, 23—25, 33, 49, 72, E: 955, 66—68).

BISTRIȚA. Funcționar OCL, Verveagă Titus (2584, 88—90, 602, 06, 07, 10, 13, 15, 16, 19—26, 28—32).

BÎRLAD. Cl. X. Nargong Hilda (2562, 79, 80, 88, 611, 13, 72, 74, 77).

BLAJ, Cl. VIII. Popescu Victor Horia (2634, 72, 79, E: 935, 46, 49 51, 60, 64, 67, 68, 72).

BOLINTINUL DE VALE (București), Cl. V. Stoian Marin (E: 964, 67, 68, 72, 73). Cl. VIII. Răduț Apolodor (2633, 34, 49, 57, 64, 66, 68, 72, 78 Cl. X. Alexandru St. Titu (2578, 79, 96, 610, 11, 20, 21, 23, 25, 46, 66, 75).

BOTOȘANI. S. m. 1. Cl. VIII. Nucuță N. Adrian (2579, 80, 610, 33, 38, 72, E: 935, 36, 40—43, 46—55, 58—62, 67). Cl. IX. Croci H. Zigu (2539, 65, 71, 72, 79, 607, 21—25).

BRĂILA. Cl. X. Mihalcea C. Mihail (2550, 54, 67, 77, 79, 608, 10, 19, 20, 21—25, 30, 33, 41, 68, 72, 75, 76).

BREAZA. Lic, mil. « Cantemir ». Cl. VIII. *Grosescu Radu* (2539, 42, 49, 52, 54, 65, 67, 76, 78, 79, 88, 89, 91, 98, 600, 07, 10, 11, 19—21, 23—27, E: 935, 42, 46, 47, 48, 50—52); cl. IX. *Motoargă Dumitru* (2503—05, 07—09, 11, 13, 15, 18, 19, 21, 23, 28—30, 36, 38, 39, 49, 52, 54, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 75, 76, 79, 80, 82, 84, 87—89, 98, 600, 03, 04, 06, 07, 12—14, 19, 20, 21—27, 29, 30, 32), Ștefănescu Dumitru (2539, 79, 88, 620, 23—25, 33, 37, 49, 72, 74); cl. X. Anișca Ion (2545, 49, 50, 51, 54, 60, 65, 68, 73, 77—80).

BUCUREȘTI. *Studenți*: Iorgulescu Alexandru (I.P.B.) (2465, 67, 79, 500, 17, 19, 22, 23, 31, 33, 34, 71, 72, 76, 84, 90, 91, 611, 35, 41), Manea Sabina (2539, 50, 69, 70, 76, 610, 11, 16, 19—25, 30, 33, 41, 42, 46, 49, 63, 68, 69, 72—75), *Popescu Paul R.* (Fac. Electronică) (2540, 53, 67, 69, 71, 73, 74, 82, 87, 88, 91, 95, 98, 600—02, 05, 06, 10—12, 15, 17—19, 23, 26, 28—30, 34—37, 39, 43—46, 49, 54, 56—72, 74—79, 88, 93—95, 700, 01, 02, 04, 06—08, 13—17, 20—22, 25, 28, 31, 32, 34—36), *Stan C. Dumitreu* (A.T.M.) (2539, 40, 41, 49, 52—54, 58, 65, 68, 70—73, 77, 78, 82, 84, 88, 90, 98, 602, 04, 06, 11—13, 15, 16, 19—26, 32), *Virgolici V. Virgil* (Fac. instalații) (2633—45, 47, 49, 51—57, 59—77, 86—704, 06—11, 13—22, 24, 26, 28—36).

Absolvenți: Antonier Mircea (2528, 29, 50, 54, 67, 70, 75, 79, 80, 89, 606, 11, 13, 20, 21, 24), Ciohodaru Lucia (2606, 08, 10, 11, 14—16, 20—26, 30, 32), *Constantina Radu* (2539, 40, 42, 49, 52, 54, 55, 62, 65, 67—70, 72, 75, 78, 79, 81, 89, 94, 2607, 10—13, 15, 16, 20, 21, 24—27, 34—36, 38, 57, 58, 65, 68, 83), *Cristea Paul* (2539—44, 48, 49, 50, 52—56, 58, 60—65, 67—74, 77—79, 81), *Hœrmata Mihai* (2544, 83, 99, 613, 19—21, 24, 26, 27, 35, 37, 45, 46,3 58, 63, 66, 68, 78—80), Ionescu Mihai (2549, 84, 87, 611, 15, 20, 23, 25, 33, 40, 42, 46, 72), Lungulescu Mitică (2587, 607, 15, 16, 30, 33, 34, 40, 42, 46, 47, 49, 58, 68, 70, 72, 74, 75), Niculescu Ștefania (2550, 67, 68, 72, 77—79, 815, 16, 20, 21, 25).

Școala medie nr. 1 « *N. Bălcescu* ». Cl. V. Grigorescu I. Șerban (E: 964 967, 68, 72, 73). Cl. VII. Nemeș George (E: 2623, 24, 66, 74, 77, 936, 47, 51, 54, 55, 58, 60). Cl. VIII. Cocîrlan Paul (2589, 610, 11, 12, 21, 22, 24, 33—35, 37), *Dascălu Dan* (2539, 49, 54, 55, 60, 68, 78, 86, 89, 91, 604, 07, 10, 11, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 64, 73, E: 935—37, 41, 46—52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 62, 65, 72, 73), Ghelmeziu V. Nicolae (2359, 49, 60, 68, 78, 610, 11, 12, 19, 21, 23,) Iordănescu Șerban (2503, 23, 32, 33, 38, E: 920—30, 32—34), *Lupaș Laurențiu* (2539, 61, 62, 67, 68, 74, 78, 79, 88, 94, 607, 10, 11, 19—21, 23—26, 28, 29, E: 935, 36, 38, 41—44, 46—55, 58, 59, 60, 61), Panaite M. Dorin (2610, 20—23, 24, 77, 78, E: 963, 67), Petrescu Lucian (2588, 89, 91, 611, 20, 21, 38, E: 946—52, 54, 56, 67, 68), *Răşcanu Radu* (2539, 42, 54, 55, 64, 65, 69, 74, 91, 602, 07, 13, 16, 20, 23, 26, 33, 68, 72, 75, 76, 85, E: 941, 44, 46, 65, 66, 68, 71—73). Cl. IX. Cocora Dan (2538, 53, 71, 73, 79, 80, 604, 15, 20, 89, 91, 98, 99, 600, 02, 04, 06, 07, 13, 20, 27, 34, 25, 37, 38, 45, 56, 58, 64—66, 68, 71 75, 77, 82), *Isbăşescu Mihai* (2507—09, 11—13, 15, 18—21, 23, 25, 28—30, 32—43, 48, 49, 52, 54, 55, 58, 60—63, 65, 67, 68). Cl. X. *Klecner Adrian* (2507, 09, 10, 11, 26, 62, 70, 89,

91, 602, 07, 10—16, 33, 41, 49, 64—67, 69, 72—75, 77), Lupan Mircea (2503—05, 07, 11, 15, 18—20, 23, 25, 28, 38), Martin Traian (2542, 50, 54, 65, 79, 616, 20, 21, 23—25, 33, 34, 37, 40, 41, 45, 46, 49, 58, 68, 72, 75), Popa Morcea (2611, 16, 19—21, 23—26, 33, 35, 49), Velicu Vasile (2503, 05, 07, 09, 15, 21, 23, 30, 33, 36, 38, 39, 41, 42, 54, 55, 65, 67, 68, 71—73, 74, 77—79).

S. m. 3. Cl. 10. *Constantinescu Mihai* (2633—35, 39, 41, 42, 45, 47, 58, 59, 62—65, 67—69, 72, 74, 75, 86, 91, 92, 94, 701, 06, 07, 13, 16, 28, 32—36)

S. m. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Cl. IX. Constantinescu Remus (2518, 23, 39, 76, 79, 87, 610, 21, 23, 24, 33, 49, 72). Cl. IX. *Nicolau Cornel Virgil* (2505, 83, 88, 93, 610, 11, 13, 15, 16, 20, 21, 23—25, 33—37, 40, 41, 49, 58, 59, 63—65, 68, 69, 72, 74—77). Cl. X. *Rădulescu D. Constantin* (2500, 01, 05, 17, 25, 38, 84, 88, 90, 605, 06, 15, 33, 35, 37, 40—42, 45—46, 49, 64, 68, 69, 72, 74, 75, 77, 87, 731, 34), *Stamatoiu Petre* (2500, 01, 05, 17, 38, 39, 84, 88, 90, 605, 15, 31, 33, 35, 37, 40, 41, 45, 46, 49, 64, 68, 69, 72, 74, 75, 77, 87, 731, 34).

S. m. 7 « *I. L. Caragiale* ». Cl. X. Gavrilă Georgeta (2539, 54, 67, 70, 74, 78, 79, 84, 90, 607, 13—15, 24, 25). Absolvent Bălescu O. Dan (2567, 69—71, 78, 610, 11, 16, 20, 21, 24, 25, 33).

S. m. 8. Cl. VIII. Danchiv Alexandru (2539, 49, 54, 55, 60, 67, 68, 78, 79, E: 942, 43, 45, 46, 48, 97), *Isbăşescu E. Mircea* (2538, 39, 49, 54, 65, 68, 69, 78, 88, 91, 98, 600, 07, 10—12, 19—21, 23—26, E: 938, 54—58, 60—63, 65, 66, 71—73), Soceanu V. Alexandru (2539, 49, 67, 78, 79, 88, 600, 07, 10, 11, 20, 21, 24, 26, 33, 49, 72, E: 935, 36, 42, 46, 47—50, 54, 55, 58, 60, 73).

S. m. 10 Cl. VII. Apostolina Gabriela (2656, 72, 87, E: 964, 65, 76, 68, 72, 75, 80). Constantinescu Marin (2563, 80, 88, 607, 10, 56, E: 935, 36, 43, 48, 49, 54, 55). Cl. VIII. Bărbulescu Lucia (2539, 55, 67, 68, 78, 79, 98, 607, 10, 11, 21, 29, 24, E: 935, 36, 38, 42, 43, 46—49, 51, 54, 55), Butercea Ecaterina (2563, 80, 88, 607, 10, 56, 935, 36, 43, 48, 49, 54, 55), Predoiescu Marieta (2610, 12, 29, 24, 33, 57, 72, 82, E: 949—51, 60, 61). Vişan A. Graziella 2633, 34, 49, 56, 66, 68, 72, E: 965, 75, 81). Cl. IX Apostolina Teodora (2539. 71, 89, 606, 10, 11, 13—15, 23—25, 72, 83). Cl. X. Repciuc Rodica (2633—35, 37—39, 41, 42, 47, 53, 72). Stepănescu Aurelia (2689, 97, 708, 13, 15, 20, 22, 31, 32, 59, Absolventă Wagenberg Fanny (2591, 610, 11, 15, 16, 21, 25, 30, 33, 37, 40, 46, 49, 59, 66, 68, 72).
71, 89, 606, 10, 11, 13—15, 23—26, 72, 83). Cl. X. Repciuc Rodica (2633—35, 37—39, 41,

S. m. 11 « D. Cantemir ». Cl. VII. Giannini Emanuel (2620, 26, E: 912, 46, 47, 51, 52, 57, 58, 60, 61, 64, 67, 68, 72 73). Cl. VIII. Antoniu I. Andrei (2620, 24, E: 949—52, 56, 61, 64, 67, 68, 72), Stoicescu Cristian (2539, 68, 78, 79, E: 920, 23, 25, 36, 38, 42, 43, 45—49, 51, 52, 54, 57, 58, 61, 62, 65, 66). Cl. X. *Antoniu I. Sorin* (2583, 84, 88, 91, 98, 99, 604, 06—08, 10, 11, 13—15, 19—23, 27, 29, 32, 33, 41, 49, 58, 64—66, 68, 69, 72, 74, 77). Absolvent *Schiopulescu Dan* (2565, 72—74, 79, 85, 88, 89, 91, 98—600, 602, 06, 07, 11—15, 18—27, 56, 58, 64—66, 68, 72, 74—78).

S. m. 12. Cl. VIII. Dobrescu N. Dan (2610—12, 20, 23, 24, 72, E: 949, 51, 63), Iovănescu Ruxandra (2607, 10, 11, 72, E: 935, 40, 43, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 55, 60, 68, 78, 79, 80) Cl. IX. *Glasberg Vladimir* (2539, 40, 42, 49, 50, 52, 54, 60, 61, 62, 67—72, 74—76, 78, 79, 81, 84—89, 91, 93, 98, 99, 503, 04, 06, 08, 10, 11—13, 15, 16, 19—21, 23—25, 28, 30), Mazilescu Virgil (2539, 40, 60, 68—72, 78, 79, 91), Necşulea Dan (2539, 49, 65, 68, 72, 78—80, 89, 606, 10, 11, 15, 9—21, 23—25, 33, 38, 49, 58, 64, 68, 72, 74, 77), Cl. X. Tureanu Aurel (2400, 58, 61, 71, 78, 99, 515, 18—21, 23, 50, 54, 60, 67, 71, 72, 79, 90, 610, 15, 16, 20, 21, 24, 25, 72).

S. m. 13. Cl. VIII. Dinu Ştefan (2580, E: 935, 36, 42, 45—49, 51, 54, 60, 79), Firescu D. Ştefan (E: 935, 36, 40, 41, 44, 46—49, 51, 52, 56—58, 60—65, 67, 68, 72, 73), Grigorescu G. Mihaela (2612, 23—25, 27, 949—51, 54, 60), Mereuţă Dan (2549, 54, 68, 69, 78, 605, E: 935, 36, 38, 40—54, 57, 58, 60, 61), *Stoian M. Gheorghe* (2539, 49, 52, 67, 78, 79, 607, 10—13, 21, 23, 25, 27, 33, 49, 65, 72, E: 935, 41, 43, 46—52, 60, 63, 64, 67, 68). Cl. IX. Bănică Dan (2590, 91, 610, 11, 13, 19, 24—26, 58, 72, 74, 77), Cl. X. *Tudor M, Gheorghe* (2558, 89, 90, 602, 05—08, 10—14, 16, 17, 21, 23—26, 28, 30, 33—37, 39—41, 45, 46, 49, 52, 53, 55, 58—65, 67—73, 75, 76).

S. m. 15. Cl. X. Ionescu Sorina (2539, 40, 49, 54, 65, 69, 70, 72, 74, 607, 12, 13, 16, 18, 20, 23—27).

S. m. 17 « *Matei Basarab* ». Cl. V. Dincescu Vasile (922, 28, 31, 33—35, 40, 41, 44), Ganea Cristian (921, 22, 23, 35, 40, 41, 44, 49, 50, 52, 58, 64, 67, 68, 72, 73), Cl. VIII. *Olteanu Stoica Ştefan* (2588, 89, 604, 10, 11, 19—27, 29, 38, 64—66, 69, 72, 74, 75, 77, E: 949—54, 56, 58, 60—65, 68, 72, 73), Panait Nicoleta (2602, 08, 34, 66, 72, 74, 77, E: 949, 53, 56—58, 62, 75—78, 80). Cl. IX. Fuhrman Justin (2567, 72, 74, 79, 619—21, 23—25), *Oprică Mihai* (2474—77, 83—85, 88—91, 94, 96, 97, 99, 500, 501, 03, 05, 07, 09, 11—13, 15, 18—21, 23, 28—30). Cl. X. Paşa Florin (2633, 34, 41, 49, 56, 64—66, 72—77).

S. m. 18. « *Mihail Eminescu* » Cl. VIII. Enişteanu N. Nicolae (2579, 607, 66. E: 948, 50, 52, 57, 58, 60, 64), Nicolau A. C. (E: 960, 61, 63, 69). Cl. IX. *Eftimie Z. Radu* (2539, 68, 89, 91, 98, 600, 04, 07, 10, 11, 13, 14, 19—26, 28—30, 32, 38, 56, 64, 66, 68, 72, 74). C. X. Popescu Criveanu Şerban (2584, 85, 88, 98, 600, 04, 13, 15, 16, 19, 20, 23—26, 58, 64, 66, 68, 72, 74, 76, 97).

S. m. 20 *Gheorghe Şincai* ». Cl. IX. Enulescu C. Alexandru (2539, 42, 61, 68, 74, 78, 79, 84, 611, 13, 16, 19, 21—23, 25, 26). Cl. X. *Iordănescu Radu Sorin* (2540, 41, 58, 61, 63—65, 69, 72, 73, 75, 78—80, 85, 87, 606, 10—12, 15—20, 23—25, 33, 41, 58, 55, 61—63), Nicolau Mihai (2598, 99, 604—07, 10, 12, 15, 21, 23—25, 27, 33, 34, 37, 45, 56, 58, 65, 66, 68, 72, 75—77), *Zorapapel Tiberiu* (2540, 48—51, 53, 54, 62—65, 67, 68, 71, 73, 74, 76—79, 81, 82, 610—15, 37, 39, 40, 41, 63).

S. M. 22 « *Gheorghe Lazăr* ». Cl. VIII. Chirilă Rodica (2578, 79, 89, 607, 10—12, E: 942, 45, 47), Irimescu Gheorghe (2539, 64, 67, 78, 79, E: 935—38, 40—43, 45—48), Negulescu Petre (2610, 16, 20, 23—25, 33, 35, 63, 68, 72, 75). Cl. IX. Ciorănescu N. Ioana (2539, 40, 610, 19, 26, 27, 64, 66, 72, 74).

S. m. 23. Cl. IX. Revin S. Eugen (2539, 67, 68, 71, 78, 79, 84, 89, 604. 06, 11, 13—15, 21, 25, 33—35, 39, 58, 59, 65, 68, 72, 76).

S. elem. nr. 5. Cl. IV. Florea Gh. Alexandru (E: 935, 41, 46).

S. elem. nr. 119. Cl. VII. Mirea I. Eugen (E: 950, 51, 57, 58, 2588, 89, 94, 604, 12, 20—23, 25).

S. elem. nr.1 22. Cl. V. Barbu M. Cornel (E: 913, 19, 21, 28, 31, 35, 46, 47, 49).

S. elem. nr. 148. Cl. VII. Oprică Serban (2568, E: 935—37, 39, 41—43, 45, 47—49).

S. elem. nr. 179 Bucureştii Noi. Cl. VII. Rădulescu D. Mihai (935, 36, 42, 47, 49, 51, 52, 60, 62, 65, 71—73, 75, 79, 80).

S. elem. nr. 185. Cl, VII. Dumitrescu Gh. Cornelia (2623, 24, E: 925, 36, 41, 42, 46—51).

BUHUŞI (Reg. Bacău). Cl. IX. Dunca Ion (2500, 01, 40, 46, 48, 49, 54, 55, 58, 60, 62, 67, 70—75, 77—81).

BUZĂU, Cl. VIII. *Gheorghe A. Cezar* (2539, 42, 45, 46, 48—50, 53, 54, 60—65, 67, 68, 70—74, 76—81, 83—91, 93—95, 97, 98, 602—07, 10—16, 19, 21, 23, 30, 32), Absolvenţi: *Bătireanu Gh.* (2583—85, 87—91, 93—95, 97—600, 03, 05—27, 29, 30, 33—37, 39, 43, 45, 46, 48—51, 53, 56, 58, 59, 60, 63—65, 67—73, 78—81), *Bucu P. Paul* (2539, 42, 49, 50, 54, 65, 68, 69, 70, 73—75, 78, 79, 606, 08, 10, 11, 13, 14, 16, 19—30).

CĂLĂRAŞI. S. m. « Nicolae Bălcescu ». Cl. X. Chiriacescu Sergiu (2539, 49, 72, 73, 78, 79, 88, 607, 11, 18, 20—26, 64). Absolvenţi: *Strătescu Ion* (2545, 65, 83, 91, 601, 03, 06, 07, 08, 17, 18, 32—40, 42, 43, 45—47, 53, 55, 57, 58—72, 74—77), *Trandafir Mircea* (2539—48—52, 54—56, 58, 60, 65, 67—70, 72, 74, 76, 78, 79, 610, 11, 13, 15—17, 20—25).

CALAFAT. Cl. VIII. Iordache Cornel (2610, 23, E: 949—52, 58, 60, 65, 68—70, 73), Petrescu F. Gh. (2539, 65, 67, 76, 600, 19, 21, 23—25, 27, 63, 72, E: 938, 40, 50, 60, 61, 65, 71, 72), Cl. IX. Radu Ileana (2560, 76, 78—80, 613, 15, 20, 21, 24, 25, 28), Stoenică A. Ion (2539, 49, 55, 65, 70, 71, 84, 87—89, 600, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 21—26).

CARACAL. S. m. 1. Cl. VIII. Sterie Florina (2555, 78—80, 607, 10, 11, 20, 21, 24, 27, 33, E: 935, 36, 42, 47—49, 51, 52, 58, 60, 64, 65, 67, 67, 72). Cl. IX. Dincă George (2515), Georgescu C. Mircea (2505, 15, 18, 19, 23, 28, 39, 54, 67, 72, 78—80, 610, 11, 14, 15, 19, 20, 21, 23—26, 33, 72, 74, 77), *Mihăilescu Viorel* (2573, 74, 85, 88, 89, 94, 606, 07, 10—16, 19—27, 29, 33, 34, 37, 40, 47, 49, 51, 53, 58—60, 63—66, 68, 72—75, 77, 79, 83, 86, 87, 97, 700, 02, 04), Neda St. Marin (2588, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 21, 23—26, 28, 33, 49, 66, 72, 74, 77). Rădulescu N. Victor (2539, 42, 49, 50, 51, 67, 71, 72, 78, 79, 88, 600, 04). Cl. X. Madan Constantin (2556, 65, 70, 72, 74, 76, 79).

S. elem. REDEA. Cl. VII. Mihăilescu I. Stelian (2610, 20, 23, 24, 66, 74, E: 949, 51, 52, 67, 68, 74, 80, 81).

CÎMPINA. S. m. 1 « Nicolae Grigorescu ». Cl. VIII. Tudose Florin (2539, 55, 79, 80, E: 935, 40, 41, 43, 44, 46, 47). Cl. IX. *Drăgănescu Cornel* (2540, 54—56, 58, 60, 61, 63, 68, 72, 73, 77—79, 81, 84—86, 89, 94, 604, 11—15, 20, 21, 23—25). Student Burghiu D. Victor (A — Radiaţia corpului negru).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Lic. Militar. Cl. X. Vaida C. Cornel (2610, 11, 13, 20, 21, 23—25, 33, 40, 58, 59, 64, 66—69, 72, 74, 77).

CÎMPULUNG MUSCEL (Reg. Piteşti). S. m. 1. Cl. VII. Savin Alexandru (E: 937—48, 53—58, 60, 61, 66, 67, 69), Cl. VIII. Simionică I. Traian ((2539, 49, 52, 55, 60, 67, 68, 78, 79, 89, 98, 607, 10, 11, 19—23, 25—27, 30, E: 935—38, 41, 61), Cl. IX. Văluţă Mihai (2562, 72, 89, 611, 13, 15, 20, 21, 24, 25, 33, 58, 72). Şcoala pedagogică. Cl. VIII. Băscăpoi Georgeta (2610—12, 19, 23, 24, E: 935—37, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 51, 52, 54, 61, Cl IX. Vasilescu V. Mihail (2572, 613, 15, 20, 21, 24, 25, 33, 58, 72, 75).

CLUJ. Student. *Cotîrlea Ion* (2539, 42, 49, 50, 51, 53, 54, 57, 65, 68, 71—75, 77—79, 81, 610, 11, 15, 16, 19, 21, 23—26, 31, 32, 40—42, 68, 71, 72, 74, 75).

S.m.4. Cl. VIII. Lungu S. Şerban (2539, 49, 91, 621, 24, 25, 27, 33, E: 940, 44—60), Micu Radu (2539, 49, 610, 11, E: 935, 36, 42, 47, 48) Cl. IX. Chisăliţă Adrian (2588, 606, 07, 11—15, 19, 21, 23—26, 33, 34, 37, 39, 41, 49, 57, 65, 68, 72, 74). Cl. X. *Birsan Romanel* (2616, 17, 33—35, 37, 38, 40, 41, 46, 47, 49, 56—72, 74, 75, 77), S. m. 5. Lelijak Ambrozie (2541, 42, 47, 55, 73, 77, 610, 11, 12, 13—25).

S. M. 6. Cl. IX. Pamula Adrian (2565, 72, 73, 79, 83, 87—89, 94, 98—600, 04, 07 13, 34, 58, 59, 66, 68). Sbăgnean Framcis (2539, 54, 65, 68, 78, 613, 20, 23, 25, 26, 47, 66, 68, 72), Cl. X. Corda Ioan (2542, 50, 67, 71, 77, 78, 98, 621, 24, 25, 75, 80, 84).

S. ped. 2. Anul IV. Indoleanu Ion (2619, 33, 37, 49, 59, 64—69, 72, 74, 75, 77) E: 958, 60, 64, 65, 67, 68, 72, 73).

COBADIN (Reg. Constanţa), Zidar *Stepan Ionel* (2502, 09, 10, 15, 39, 42, 49, 56, 65, 67, 68, 81, 98, 600, 07, 10—13, 15, 16, 20, 21, 24—28, 33, 49, 68, 69, 72, 76).

CONSTANŢA. S. m. 1. « Mircea cel Bătrîn ». Cl. VIII. Anghel Lucia (2610—12, 19—26, E: 935, 43, 47, 49, 51, 79). Cl. X. Ianuş Stere (2541, 44, 53, 55, 58, 60, 63, 69, 82, 84, 89, 91, 611, 12, 14, 20, 27, 33, 35, 37, 39, 40, 46, 63, 65, 72, 75). S. m. 2. Cl. XIII. Manole Mihai (2610, 11, 64, 66, 72, 74, E: 962, 65, 67, 72, 73), Rădulescu Mircea (2549, 67, 68, 78, 88, 89, 620, 33, 56, 64, 66, 68, 72, 74, 77, 82) E: 939, 45, 46, 50, 56, 57, 63, 65, 67, 71, 73). S. m. 3. Cl. VIII. Coman Dragoş (E: 921—24, 28, 33—36, 41, 46, 63), Ionescu Mihai (2539, 68, 79, 621, 23—25, E: 936, 42, 46, 61), Teodorescu V. (922, 28, 33—36, 47, 49, 63, 51). Cl. X. Abduhaim Aiten (2550, 51, 53, 54, 65, 67, 68, 70, 77—80, 87, 99, 606, 08, 10, 11, 16, 17 18, 25). Absolvent *Anghel Constantin* (2539, 41, 52, 53, 55, 70, 80, 84, 88, 89, 91, 605—08,10—16, 18—21, 23—26, 29, 30, 32).

CORABIA. Cl. VII. Rădulescu C. Răzvan (2552, 78, 610, 21, 23, 24, 64, 66, 74, 79, E: 942, 46—49, 51, 52, 60, 61, 63, 65, 66, 68, 72, 73). Cl. VIII. Dolana I. Florea (2539, 64, 68, 79, E: 935, 41, 46, 47, 49—52, 60—62, 72), Văleanu R. Constantin (2579, 67, 611, 66, E: 936, 45, 46, 48, 52, 66). Cl. X. Truică Marin (2542, 44, 78, 89, 600, 12, 13, 25, 33, 72, 88).

CRAIOVA. S. m. 1. « Nicolae Bălcescu ». Cl. X. Bacria N. Vasile (2656, 58, 64, 66, 72, 74, 76, 77, 79). Absolvent Tăriţă Ion (2539, 42, 79, 612, 13, 27, 29, 30, 32, 34, 35, 38—41, 64—69, 72—77). S. m. 2 « Fraţii Buzeşti ». Cl. VIII. Grama Nicolae (2578, 89, E: 935—37, 39—41, 43, 46—52, 54, 58, 60, 61). Cl. X. Piscati I. Sorin (2633, 41, 46, 49, 59, 67, 68, 72, 75). Absolvent Bărbulescu I. Ion (2588, 89, 610, 13, 16, 19—27, 30), Staicu N. Ştefan (2616, 20, 21, 23—25, 33, 41, 49, 51, 63, 68, 69, 74, 75). S. m. 3. Cl. VIII. Cetăţeanu Rodica (2589, 610, 11, 23, 24, 33, 68, 72, E: 949, 51, 60, 61, 63, 65, 67—70, 75), Ilaş Violeta (2607, 11, 19, 23, 29, 33, 34, 64, 66, 68, 72, 74, 77, E: 951—53, 55, 60—64, 67, 68, 72). Cl. X. Vasiloiu Georgeta (2589, 604, 07, 10, 16, 46, 58, 59, 63, 69, 72), Absolvent Dinuţ Teodor (2584, 94, 614, 27, 33—35, 40—42, 45—49, 65—70, 72—76, 78, 79, 85), Rădulescu Ecaterina (2611, 16, 24, 25, 51, 68, 72—75), Staicu N. Ştefania (2539, 42, 49, 61, 54, 69, 71, 78, 85, 88, 89,600, 06—08), Toder Emil (2523, 25, 31, 69, 78, 80, 88, 706, 08, 11, 15, 16, 19—21, 25, 26).

S. elem. 10. Cl. VI. Dumitriu Mihai (2674, E; 949, 52, 68—70, 72, 73, 78, 80).

CURTEA DE ARGEŞ. Cl. VII. Manea Aurel (E: 935, 36, 42, 45—49, 51, 52, 54—56, 60, 61, 64, 65, 68, 72). Cl. X. *Murărecl Fănică* (2584, 605, 06, 12, 14, 18, 22, 30, 32—37—39, 41, 42, 45, 49, 54, 58, 63—69, 72, 74, 75, 77, 84).

DEJ (Cluj). Cl. VII. Coste Gheorghe (2623, E: 935, 41, 46, 49—52, 60, 61). Absolvent *Cosmuţă Ion* (2539, 65, 70, 72, 608, 11, 13, 14, 16, 19—21, 23—26, 30, 33, 40—59, 64, 66—69, 72, 74, 75, 77).

DEVA. Cl. X. Ionescu A. (2566, 616, 45, 50, 67—69, 76, 80, 84), Absolvent Florincaş Gelu (2550, 54, 67, 68, 74, 78, 610, 11, 19).

DOROHOI (Suceava). S. m. 1. Cl. VIII. Corneanu Corneliu (2539, 49, 67, 78, 79, 89, 610, 11, 19—21, 23, 24, 26. E: 935, 39, 41, 42, 46, 47, 48). Stoica Maria (2588, 89, 610, 11, 12, 21, 23—25, 33, 49, 66, 68, 72, E: 949, 51, 52, 60, 61, 68, 72, 73).

DRĂGĂŞANI (R. Vîlcea). Absolvent Dumitru I. Mircea (2604, 06, 07, 1, 11, 12, 14, 16, 19—21, 23, 25, 30, 40, 63, 64, 68), *Neaga C. Constantin* (2539, 43, 49—52, 55, 65, 67, 68, 70, 78, 79, 87, 88, 98—600, 06—08, 10—14, 18—26, 29, 30).

DARABANI (Rădăuţi). Absolvent Popa Gheorghe (2588, 606, 08, 19—21, 23—25, 30).

FĂGET (Timişoara). Absolvent Antones Petru (2591, 611, 16, 20—26, 30) Bolintoni Gheza (2646, 48, 58, 59, 68, 74).

FOCŞANI (Galaţi). Cl. VII. Pantelimon A. (2568, 604. 19, 20, 23, E: 935, 41, 46—52, 54, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 72, 73). Cl. VIII. Popa D. Nicolae (2553, 82, 91, 605. 10, 11, 18, 20, 21, 23—27, 29, 33, 34, 37, 39, 49, 64, 66, 68, 69, 72, 74, 77, E: 962, 65, 66). Cl. IX. Ghiuş I. Viorel (2588, 89, 91, 606, 07, 10, 11, 13, 19, 21, 23—26, 32). Munteanu Valeria (2528, 39, 49, 53, 54, 60, 68, 71, 78, 79, 611, 13, 15, 19, 21—25, 30, 33, 49, 64, 68, 72—74,

77), *Rădescu Eugen* (2541, 55, 60, 64, 76, 84, 85, 88, 89, 90, 98, 99, 604, 06, 07, 10, 11, 15, 16, 20, 24, 25, 33, 37, 40, 58—60, 65, 66, 68, 72—74, 79, 82, 83), Cl. X. Chirilă Ioan 2567, 78, 79, 87, 606, 07, 10, 11, 13, 25, 68, 69, 72).

GALAŢI. S. m. 1. Cl. X. Carp Gelu (2610—12, 18—25, 29), Epureanu P. Alexandru (2587, 605, 33, 41, 51, 38, 63, 65, 66, 68, 72, 74—76, C). Absolvent Gavăt Cornelia (2610, 21, 22, 67, 70, 72, 78, 79), Mazarachi C. (Cele patru operaţii cu aproximaţie), Huhulea Viorel (P)

GĂEŞTI. Cl. IX. *Ixaru Gr. Lucian* (2474, 81, 84, 86, 92, 97, 99—501, 503—16, 18, 20—26, 28—30, 78, 85, 93, P). Absolvent *Tîrtan M. Gabriel* (P, 2466, 67, 69—71, 73, 78, 79, 81, 82, 84, 85, 98, 500—05, 17, 19, 11—13, 15—17, 22, 23, 27, 32, 33, 37, 38, 40, 46, 48, 55, 57, 59—63, 83—85, 87—91, 94, 95— 97—602, 05—11, 13—30, 33—35, 37).

GHELAR (Hunedoara). Cl. VII. Radu Gelu (2620, E: 949, 52, 60, 71, 74—82). Absolvent *Lăscuţoiu Virgil* (2500, 01, 42, 49, 51, 65, 73, 79, 80, 88, 98, 613, 16, 19—25, 27, 33, 35, 40, 49, 64, 68, 69, 72, 74, 75, 76, P).

GIURGIU. S. m. 1. Cl. VIII. Lăzărescu A. Gheorghe (2578, 79, 633, 34, 66, 72, E: 935, 40, 41, 47, 49, 60, 51, 54, 55, 60, 61, 62, 65, 73) Perşoiu I. Titus (2539, 54, 67, 68, 71, 79, E: 935, 40, 41, 42, 44, 46, 47, 48, P). Popescu M. Cristian (2554, 623, 25, 33, 34, 64, 68, 68, 72, E: 961, 64, 65, 71, 72, 73, P). *Popescu O. Radu* (2554, 88, 89, 91, 98, 607, 10, 11, 12, 14, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 33, 34, 49, 56, 57, 64, 66, 68, 72, 74—78, 80, 81, 82 86, 87, E: 947, 49, 50—52, 54—56, 60—66, 68, 71—76). Profirescu D. Rodica (2624, 67, 68, 73, 78, 79, E: 935, 47). Rădoi G. Mihai (2588, 89, 91, 600, 02, 07, 10, 13, 20, 21, 23—27), Cl. IX. Caraconcea Emanoil (2549, 62, 72, 78, 79, 88—90, 600, 11, 13, 15, 19—26, 33, 46, 58, 64, 66, 68, 72, 74—77), Drăgan Petre (2566, 73, 88, 610—15, 19—21, 23—27, 29,33, 40, 49, 56, 58, 64, 66, 68, 72—75), *Profirescu D. Marcel* (2509, 12, 25, 39, 42, 49, 52, 54, 65, 67, 68, 70, 72, 73—74, 78, 79, 90, 610, 11, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 23—27, 32, P). *Vasilescu Florian* (2583, 87, 93, 96, 610, 11, 13—15, 19, 21—28, 33, 35, 39, 40, 46, 58—60, 68,72, 74, 75, 77). Cl. X. *Mîrlogeanu Florea* (2555, 67, 88, 89, 607, 10—15, 19—21, 23, 24, 26, 27, 29, 33, 35, 40, 49, 56, 68, 64, 66, 68, 72—75). Şerban Aurel (2555, 67, 75, 85, 89, 604, 06, 11, 15, 16, 18, 23—25, 30, 32, 40, 46, 58, 65, 68, 71, 72, 74,P), *Vişinescu M. Mihai* (2539, 43, 55, 62—64, 600, 02, 05, 08, 34, 35, 37, 38, 40, 45—57, 49, 50, 56—60, 63—66, 68, 69, 71, 72, 74—84, 86—88, 93,95, 702, P).

S. m. 2. Cl. VII. Popescu Gh. Adina (E: 935, 36, 38, 40—58, 60, 61), Cl. VIII. Videanu I. Maria (2589, 610, 11, 19, 21, 23—25, 64, 66, 72, 74, 77), E: 949—53, 60, 61, 63—65, 68, 72, 73), Absolvent *Ciobanu N. Marin* (2545, 55, 89, 96, 98, 600, 04—08, 11—14,16, 19—26, 30, 32—34, 40, 41, 46, 49, 57—59, 65, 67—69, 72—76, 78—80, 81, 83, 84).

HÎRLĂU (Iaşi). Merchez Constantin (2589, 607, 16, 19, 20, 21, 23—27, 33, 38, 40, 41, 49, 56, 57, 59, 64, 66, 68, 72, 74, 77).

HOREZU (Ptieşti). Cl. IX. Voinescu N. Emilian (2525, 39, 68, 610, 13, 19, 20, 21, 23—25, 72, 79). Absolvent Rădescu Nicolae (P, 2550, 79, 88, 607, 08, 16, 20, 21, 24, 25, 46, 63).

HUNEDOARA. Cl. VIII. Zabunov Sndire (2539, 49, 52, 55, 79, 88, 600, 72, 74, 78). Cl. IX. Oberlender Horst (2539, 41. 48, 49, 52, 53, 55, 60, 62, 67, 68, 71—75, 78, 79, 610, 11, 13, 15, 20, 21, 23—25, 27), tehnician Dobabs Daniel (2539, 44, 65—69, 72, 77—79, 83, 84, 600, 16, 17, 20—22),

HUŞI (Iaşi). Absolvent *Dolleanu Temistocle* (2540, 49, 53, 55, 60, 67, 73, 74, 77, 79, 87, 95, 605, 11, 15, 21, 25, 28, 33, 34, 40, 46, 49, 58, 59, 63, 68—70, 72—75, 77).

IANCA (Galaţi). Cl. VII. Vlad G. (E: 935, 46—48).

IAŞI. S. ml. « Mihail Sadoveanu ». Cl. VIII. Alănuţă Laurenţiu (E: 935, 36, 40, 44, 48, 51, 52, 67, 68, 72), Gălăţeanu Mihai (2674, 82, E: 949, 51, 52, 72), Simovici Dan (P, E: 956, 58, 63—65, 72, 73, 75—77, 80; 2591, 600, 11, 18, 26, 33, 37, 63, 72, 76—78), Vaisbuch Smuil (2539, 67, E: 941, 47—51, 53, 57, 58). Cl. IX. Arhip Doina (2613, 19—21, 23—25, 64—66, 72, 74, 77), Steckerman Salom (2539, 49, 58, 68, 78, 79, 620,—26). Cl. X. Manoliu Corneliu (2568, 78, 88, 611, 19—26). Absolvent Cuşmaru Ilie (2554, 65, 67, 70, 72, 74, 78, 606, 07, 11, 13, 14, 20—25, 27, 30, 33, 68, 69, 72, 75), Şor Liber (2554, 65, 70 72, 74, 78, 613, 16, 20—25, 27, 30, 33, 49, 56, 67—69, 72, 75).

S. m. 2. Cl. IX. Anghel Mariana (2549, 60, 89, 91, 98—600, 19, 23—26, 29, 33—35, 37, 38, 49, 69, 64—66, 68, 72, 74—78). Absolventă Costinescu Anca (2539, 42, 49, 50, 65, 67—70, 79, 82, 610—13, 16, 18—25, 27).

S. m. 3 « Costache Negruzzii ». Cl. VII. Mărculescu Sorin (2542, 78, 89, 610, 20, 23, 24, 26, 28, 72, E: 935, 36, 46, 47, 49—52, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 65—69). Cl. VIII. Homutescu Virgil (2539, 610, 11, 20, 24, E: 935—38, 40—42, 44—61). Vasiliu Mihai (E: 951, 53—55, 58, 60, 61, 65, 73, 77, 80, 81). Cl. IX. Barbu Viorel (2540, 48, 55, 60, 84, 85, 87, 89, 91—94, 604, 07, 39, 47, 52, 53, P) Onofrei Valentin (2549, 55, 67, 72, 79, 610, 20, 21, 24, 25), Purice Gheorghe (2549, 67, 88, 610, 11, 13, 20, 21, 23—26, 49), *Nanu Octavian* (P, 2539, 40, 46, 49, 57, 64, 74, 77, 87—89, 98, 601, 03, 12, 14, 16, 35—37, 39—41, 44, 45, 47, 58—60, 63,

66, 72), Somnea Constantin (2509, 12, 15, 18—21, 23, 32, 36, 39, 65, 71, 72, 78, 79, 610, 21, 24, 25, 27), Cl. X. Brînzei Dan (2633, 34, 37, 38, 47, 53, 55—59, 64, 65, 68, 69, 72, 74, 75, 77), Diţu Emil (2564, 67, 72, 77, 87, 88, 607, 10—13, 20, 24, 25, 32), *Kim-Ian.Su* (2588—90, 91, 94, 600, 03, 04, 08, 10—21, 23, 25—30, 33—35, 37, 39—42, 44—47, 50, 51, 54—73, 75, 77—82, 84, 85, 87). Popescu Claudia (2587—79, 606, 07, 10—13, 16, 19—21, 23—35, 27, 30), Solomon Lender (2509, 18, 21, 23, 39, 68, 78, 79).

S. m. 6. Cl. VIII. Botez Gheorghe (2539, 40, 67, 78, 79, 610, 12, 19, 21, 23—25, E: 935, 40, 42, 46—49, 51, 52, 54, 57, 58, 60).

S. pedagogică. Anul II. Grigore J. Mihai (2588, 610, 19, 20, 23—27, E: 937, 40, 42, 44, 47—49, 51—53, 57).

LUGOJ. Şcoala tehnică de contabili agricoli. Anul II. Serdeşliuc Aurel (P. 2588, 613, 19—24 ,E: 935, 36, 38, 42, 45—53, 56, 60, 61).

MEDIAŞ. U. m. Olteanu Constantin (2507, 19, 20, 33, 34, 41, 64—66, 68, 69, 72—75, 77, 84, 93, 98).

MORENI. (Ploeşti). Cl. VIII. *Butoi Octavian* (2539), 49, 54, 55, 65, 67, 68, 78, 79, 89, 91 607, 10, 11, 19, 21, 23, 25, 27, E: 935, 36, 38, 40—43, 46—53, 61), *Tudor Gheorghe* (2539, 49, 54, 55, 65, 67, 68, 73, 78—80, 89, 91, 607, 10—12, 19, 21, 23—25, 27, E: 935, 36, 38, 40—43, 45—53, 54, 60, 61), *Moflic Emilian* (2539, 49, 53—55, 65, 67, 68, 73, 72, 78, 80, 91, 607, 10—12, 19, 21, 23—25, 27, E: 935, 36, 38, 40—43, 45—52, 54, 60, 61).

OLTENIŢA. Şerban C. Florian (2553, 64, 65, 67, 71, 72, 75, 77, 79, 80).

ORADEA. S. m. 1. «Em. Gojdu». Cl. VIII. Gherman Ecaterina (2539, 67, 610—12, 20, 21, 23, 24, E: 935, 41, 44, 48, 49—52, 56, 57, 60, 61). Cl. IX. Sîrbu Pavel (2610, 13—15, 20, 21, 25, 33, 58, 67, 68, 72, 74), Cl. X. *Pop Corneliu* (2500, 01, 15, 21, 28, 29, 33, 36, 39, 49, 53, 54, 67, 68, 80, 72, 78, 79, 610, 12—15, 19, 20—26, 72, 75), *Şchiop Alexandru* (P. 2520, 33, 36, 67, 72, 78, 79, 84, 89, 98, 600, 07, 11, 13—15, 19—25, 33, 25, 40, 45, 49, 55, 58, 59, 64, 65, 68, 69, 72—77, 83). Absolvent *Ardeleanu Romulus* (2539, 42, 49, 50, 67, 68, 70, 78—80, 88, 98, 600, 04, 06, 08, 11, 12, 15, 20, 21—125, 30, 33, 34, 40, 49, 50, 64, 65, 67—69, 72, 74, 75, 78, 83), Fălcuşan Gheorghe (2539, 50, 68, 78, 79, 88, 600, 08, 11, 18, 20—24). Student Guiaşu Siviu (Ce este trigonometria patratică). S. m. 2. Cl. VIII. Gall Iuliana (2612, 13 20, 21, 23, 24, 26, 78, 82, 88, E: 933, 34, 49).

ODOBEŞTI. Cl. VIII. Mironescu G. Viorica (2539, 49, 78, 79, 610, 20, 23, 24, 26, 66, 72, E: 935, 46, 47, 51, 52).

OCNA MUREŞ (Cluj). Absolvent Diamanstein Martin (2487, 97, 99, 519, 20, 28—30, 33, 36, 39, 51, 54, 67, 70, 71, 77—78, 89, 607, 11, 12, 14, 23—25, 65—68, 74).

ORAŞUL STALIN. S. m. 5. Cl. VIII. Negoţ Marietta (2539, 68, 79, 89, 610, 23, 24, 26, E: 935, 39, 41, 43, 46, 47, 49, 51, 61). Cl. X. Cristofor Lucia (2585, 88, 89, 91, 607, 11, 19—21, 23—25, 29). Absolvent Cenţu Ion (2585, 87—89, 91, 98, 99, 602, 04, 06—08, 10—13).

ORĂŞTIE. Cl. VIII. Micluţia Natalia (2579, 610, 23, 24, 72, E: 935, 44, 47—49, 51, 65). Cl. IX. Costescu Ioan (2539, 49, 54, 67, 68, 71—73, 78, 79).

PIATRA OLT (Piteşti), Cl. VII. Florea Doina (E: 935, 36, 38, 40—42, 46—60, 65, 67—71).

PIATRA NEAMŢ. Cl. IX. *Gervescu M. Ioan* (2505, 23, 30, 36, 39, 49, 52, 68, 73, 74, 78, 85, 88, 89—600, 02, 04, 0,6 12, 13, 19—27, 29, 30), Cl. IX. Regneac Cornelia (2614, 33, 37, 58, 59, 64, 66—68, 72). Cl. X. Iliescu Eleonora (2588, 603, 33, 34, 49, 59, 64, 66, 68, 72, 75).

PETROŞANI (Hunedoara). S. m. 1. Cl. VIII. Păsculescu Mihai (2539, 54, 67, 71, 78, 79, 623, E: 947, 48), Popescu I. Mircea (2579, 610, 68, 74) E: 923, 32, 33, 42, 45, 47, 57, 58, 60). Cl. IX. *Bergtaler Cristian* (2546, 55—59, 61—63, 68, 69, 77, 81, 82, 84—93, 98, 600, 02, 07, 10—30, 32, 34—41, 45—47, 49, 53, 55—59, 61—69, 71, 72, 74, 75, 77—79), Crutarciuc Corneliu (2539—41, 49, 53, 54, 64, 67, 68, 71, 72, 74, 76, 78, 79).

PITEŞTI. S. elem. 4. Cl. VI. Tomescu R. Titus (2619, E: 941, 47, 49, 52, 54, 55, 57, 64, 72). S. ml. Cl. VIII. Mitulescu M. Ioan (2539, 54, 68, 71, 72, 613—15, 23, 58, 59, 72). Cl. IX. *Bica I. Constantin* (2589, 604, 06, 10, 12, 13, 15, 20, 21, 23—28, 37—45, 54, 58, 65, 66, 72, 74, 77, 83). Absolvent Ghiţulescu Iulian (2600, 40, 65, 67—69, 72, 78—81, 87, 701, 04), Moşoiu Constantin (2539, 50, 65, 67, 77—79, 600, 08, 10, 13, 15, 19, 21—25, 27, 33, 49, 72, 75). S. m. 2. Cl. VII. Pupezescu I. Mihaela (E: 949, 50, 52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 65, 67—70, 73). Cl. IX. Nanu Rodica (2578, 79, 606, 11—15, 20—25, 30, 32, 58, 60).

PLOEŞTI. S. m. 1. Cl. VIII. Ene P. Dumitru (2567, 78, 89, 607, 12, 19, 25, 33, 49, 61, 64, 66, 68, 72, 74, 77) E: 944, 62—68, 72, 73), Iacomi Mircea (2567, 78, 79, 610, 18, 20, 21, 23, 24, E: 936, 39, 40—43, 45—48). Muşat Paul (2539, 67, 79, 610—12, 19—21, 23, E: 935, 42, 46—48), *Nicolescu Basarab* (P. 2555, 68, 604, 07, 12, 19, 21, 23, 26, 33—35, 38, 41, 45, 49, 54, 58, 63—66, 68, 72, 74, 77, 78, 82, E: 944, 62, 63—68, 71—73), *Petrescu Virgil*

(2539, 91, 98, 600, 08, 10, 11, 19—21, 23, 24, 26, 27, 29, 33, 49, 66, 68, 72, 74, 77, E: 935, 36, 39, 41—43, 45—56, 59, 60, 61, 63—68, 72, 73), Prelipceanu Miruna (2539, 49, 78, 79, 610, 11, 20, 21, 23—26, 66, 72, 74, 77, E: 935, 46, 47, 49, 51, 52, 61, 62, 71), Rosenberg Teodor (2539, 49, 78, 79, 88, 91, 98, 700, 02, 10, 11, 19—21, 23—24, 26, 27, E: 939, 41 43, 45, 49, 50—53, 55, 56, 60, 61) Spătaru Bellio (2539, 55, 607, 10, 23, 24, 27, 38, 64, E: 935, 36, 41, 43, 46—51, 54, 55, 60, 61, 64, 65, 72), *Ştefănescu V. Rodica* (2560, 79, 89, 91, 602, 07, 10—12, 16, 19, 20, 21, 23—27, E: 935, 38, 41—44, 46—56, 58, 60, 61), *Timuş M Dan* (2509. 23, 39, 49, 55, 60, 67, 68, 78, 89, 610, 21, 23—25, E: 921—23, 25, 27, 28, 30, 32—36, 40, 41, 43, 44, 46—52, 54, 58—61), *Tomescu Ion* (2539, 49, 54, 55, 60, 67, 68, 78—80, 89—91, 602, 07, 10—12, 16, 19—21, 23—25, 27—29, E: 931. 35—55, 58, 60, 61), Verbancu Smaranda (2579, 91, 602, 10, 24, E: 935, 42, 46—52, 61). Cl. IX. Constantinopol Aleandxru (2539, 49, 65, 68, 71—75, 78, 79), Taga S. Mihail (2539, 42, 49, 52, 54, 62 65, 67, 68, 70, 71—74, 78, 79, 88, 91, 606, 10, 11, 13, 19—26, 29) Cl. X. Apostolescu Mihail (2611, 13, 16, 17, 19, 21—25, 33, 41, 49, 59, 65, 67—69, 72, 74, 75), *Baltac Vasile* (2546, 60, 91, 95, 601, 02, 14, 16, 33—43, 45—47, 53, 55, 58-72, 75, P), *Căsăndroiu C. Tudor* (2554, 55, 57, 58, 65, 70—75, 79,87, 89, 603, 05—08, 10—26, 20—30, 33, 34, 36, 37, 39, 49, 55, 68, 72), *Delibaş Constantin* (2584, 85, 87, 89—91, 94, 603, 05—08, 10, 12—17, 19, 21, 23—25, 27, 30, 33, 34, 39—41, 45—47 55, 58, 61, 63—69, 72, 75).

S. m. 2. Cl. VIII. Ciortan Stanca (2588, 602. E: 949, 51—54, 56—58, 60, 61), Grigore C. Sonia (2539, 49, 68, 87, 607, 10, 21, 23, 24, 26, 27, E: 963, 41—43, 45, 47, 49, 50, 52).

S. m. 3. Cl. VII. Tomescu A. Alexandru (E: 935, 36, 43, 47, 49, 50—52, 54, 56, 66, 69, 70, 73). Cl. IX. *Colinian M.* « 539, 42, 43, 49—52, 68—70, 78, 79, 88—600, 06, 08, 11, 19—26, 29, 33, 49, 56, 64, 66, 69, 72, 74—77, 81, 84, 85). Absolventă Dobrişan Marina (2539, 42, 49, 50, 52, 54, 65, 68, 70, 71, 72, 74, 79, 82).

S. m. 4. Cl. X. Negru Vasile (2539, 54, 62, 74, 79, 88, 610, 11, 13, 19—21, 23—25, 33, 41, 72, 74, 77).

S. elem. 14. C.VII. Gheorghiu A. Nicolae (E: 925, 26, 38, 39, 42, 43, 46—48).

PUCIOASA. S.m. 1. Cl. VIII. Erhan Constantin (2610, 23, 24, 33, E: 930, 32—36, 47—49, 51, 52, 62), Niculescu Simona (2539, 57, 623, 24, E: 935, 36, 38, 40, 60, 61).

PREDEAL. Cl. IX. Olteanu I. Ilie (2550, 65, 72, 79, 607, 10, 11, 13, 21, 23, 24, 35, 40, 63, 72, 75).

RĂDĂUŢI. Cl. IX. Carpiuc Tiberiu (2568, 74, 78, 88, 613, 19, 21, 22, 25, 64, 74), Ioneşi Gheorghe (2589, 91, 606, 10, 16, 19, 20—25). Cl. X. Juravlă Ilie (2587, 88, 608, 11, 16, 20, 21, 23—25, 28, 30, 41, 67—69, 72, 75, 80, 84). Absolvent *Iftimie Cristea* (2539—50, 52—55, 57, 58, 61—82, 84—91, 94, 97—608, 10—28, 30, 32).

REŞIŢA. Cl. V. Bozu Petru (E: 935, 41, 49, 51, 52, 57, 58, 64, 67, 68, 72, 73), Foioşanu Mariana (E: 935, 47, 49, 52, 57, 58, 67, 68, 72, 73), Foral Iosif (E: 921, 22, 33, 34, 35, 41, 44, 46, 49, 52, 57, 58, 64, 67, 68, 72, 73), Lefter Elena (E: 935, 40, 44, 46, 49, 52, 57, 58, 67, 68, 72), Tindrea Doina (E: 933—35, 41, 44, 46, 49, 52, 57, 68, 72). Cl. VIII. Jumanca Rodica (2523, 679, E: 921—23, 27, 28, 32—36, 42, 45, 47), *Perianu Dan* (2534, 62, 79, 93, 600, 02, 05, 10, 11, 19—21, 23, 25, 66, 68, 72, 74, 77, 82, 78, E: 935, 36, 42, 45, 47, 49—52, 54, 56, 60, 61, 63—65, 67, 68, 71—73).

RÎMNICU SĂRAT. S.m. 1. Cl. VIII. Popescu C. Cornel (2503, 79, 607, 10, 25, 41, 72, E: 944, 46, 73, 67, 68), Vlaicu Viorel (2578, 610, 39, 66, 68, E: 936, 42, 47, 62, 65). S.m. 2. Cl. VII. Asunache Horia (E: 921, 28, 35, 36, 44, 47, 49—51, 60).

RÎMNICU VÎLCEA. S.m. 1. Cl. VII. Chiriţă Rodica (2579, 610, 11, 33, 34, 49, E: 936, 47, 48, 57, 62). Cl. VIII. Costin V. Valerică (2589, 607, 10—12, 24, 25, 57, 68, 72), Parlapan Florin (2539, 49, 55, 78, E: 935,—37, 41, 46—48). Cl. IX. Constantinescu I. Ion (2554, 72, 78, 79, 613, 15, 20, 23—25, 72). Absolvenţi: *Piţigoi I. Gheorghe* (2553—56, 58, 66, 67, 69, 71, 74—78, 81, 84, 88, 89, 98, 600, 06—08, 10, 11, 13—16, 19—24, 26—28, 30, 32, 33, 40, 41, 48, 49, 58, 67, 68, 75, 78), Văcărescu Nicolae (P. 2540, 50, 54, 55, 60, 67, 68, 71, 72, 78, 79, 611, 16, 20, 21, 24, 27, 43, 63).

S.m. 2. Cl. IX. Andrei Georgeta (2526, 79, 613—15, 20, 23—25, 33, 49, 64, 72).

ROMAN. Cl. IX. *Ilioi C. Constantin* (2539, 49, 67, 68, 72, 78—80, 83, 84, 88, 91, 93, 98, 99, 600, 07, 10—15, 19—21, 23—26, 29). Cl. X. *Spinei Fănică* (2584, 88, 89, 91, 94, 98, 604, 07, 08, 10, 11, 13, 15—17, 19—25, 30, 40, 45, 47, 58, 63, 68, 69, 72, 74, 75).

S.m.t. maistri. Anul II. Niculăiasa Vasia (2619, 22, 30, 33, 49, 64, 68, 69, 74, 76, 77, 81, 85).

ROŞIORII DE VEDE c. Cl. VIII. Ciobanu T. Gheorghe (2539, 49, 55, 68 78, 79, 610—12, 19—21, 23—27, 29) E: 935, 36, 38, 41, 44—48), Nelu Iosif (2579, 80, E: 911, 12, 14, 21, 23, 30, 32—35, 42, 48). Cl. IX. *Grecu Anton* (2428, 39, 72, 78, 81, 2529, 30, 39, 49, 65, 67, 68, 70, 74, 78—80, 98, 600, 10, 11, 13, 19, 21, 23, 25, 30, 33, 34, 39, 49, 58, 61—66,

68, 72, 75), Lebedencu Iulian (2539, 49, 55, 67, 68, 72, 78, 79, 607, 10, 11, 15, 19—21, 23, 25). Cl. X. Neagu Alina (2578, 621—25, 34, 35, 37—41, 45, 46, 53, 72, 75).

SATU MARE. Absolvent Ferenţi Gheorghe (2542, 49, 50, 52, 65, 70, 72, 76, 79, 87, 608, 16, 30, 40, 45, 80, 84, P).

SARMAŞAG (Oradea). Absolvent *Gherlan Vasile* (2584, 85, 87—89, 91, 93—95, 97, 602—07, 10—16, 18—26, 28—32).

SIBIU. Cl. V. Carp Cristian (E: 949—53, 56—59), Erdely Eugen (E: 921, 22, 28, 34). Cl. VI. Scurtu Ionel (E: 949, 52, 54, 73). Cl. VIII. Gheorghiţă Ion (2539, 49, 55, 67, 79, E: 946—48). S.m.a. Anul III. Alexa Ioan (2540, 50, 54, 58, 60, 64, 65, 70, 71, 76, 79, 85, 89, 94, 604, 07, 08, 10, 11, 20, 21, 24, 25, 68, 69, 74, 75), *Pupăzan V. Nicolae* (2584, 85, 89, 90, 94, 604, 05, 07, 19—23, 26, 28, 30—42, 45—47, 54, 55, 57, 58, 64, 65, 67—72, 74, 76, P). Stoica Marin (2574, 78—80, 613, 20—25, 33, 49, 72, P). Absolvent Zimmermann Nicolae (2539, 51, 68, 74, 600, 02, 08, 13, 26, 27, 29, 32, 34, 35, 39, 41, 56, 64—66, 78, P).

SIGHET. Cl. VIII. Tomoiagă M.D. Dorin (2620, 23, 72, 74, E: 952, 60, 61,65—68, 73, P).

SIGHIŞOARA. S.m. 1. Cl. VIII. Filip Ioan (2591, 98, 64, 82, E: 949, 52, 54, 60, 62, 64—68, 73).

SLATINA. Absolvent Cătănoiu M. Marin (2642, 45, 46, 59, 65—69, 72, 74—77, 81, 84, P), *Dorobanţu Valeriu* (2540, 96, 607, 32, 33, 37, 40—43, 45—46, 49, 51, 58, 59, 63, 68, 72—76, 79, 82, 84—87, 91, 95, 701—04, P, Despre magnetism), Florea Dorel (P, 2557, 77, 90, 11, 616, 28, 33, 35, 37, 39, 40, 43), *Ghenea R. Anghel* (2554—56, 77, 89, 98—600, 06—08, 10, 11, 15, 16, 18—27, 30, 33, 41, 58, 64, 66—69, 72, 74, 75, 78)

SUCEAVA. S.m. « Ştefan cel Mare ». Cl. IX. Marchitan Gheorghe (2538—40, 54, 55, 60, 65, 67, 70, 72, 78, 88, 89, 91, 610, 12—16, 10—27, 30). Absolvent Robilă V. Ioan (2539, 42, 49—51, 61, 65, 68. 71, 77, 81, 88—90, 94, 98, 99, 602, 04, 06—08, 20, 21 ,24—26).

TECUCI. S.m. 1. Cl. IX. Teodoru Georgeta (2613—15, 19—21, 23—25, 58), Vidraşcu Traian (2507, 15, 18, 36, 39, 49, 55, 56, 74, 78—80, P), Tudose Traian (2540 55, 615, 30, 33, 34, 45, 53, 56, 63, 66, 72). Cl. X. Surugiuc Silvia (2605, 12, 24, 25, 34, 37, 53, 54, 57, 73, E: 935, 40, 44, 47, 49, 58, 60, 62, 67, 68). S.m. 2. Sl. VII. Lehăduş Elena (E: 922, 23, 28, 32—34, 49, 69, 70). Cl. VIII. Bradea Ioan (2578, 634, 72, 74, E: 942, 54, 62—65, 67—68, 71, 73), Costea Marin (2567, 610, 20, 928, 38, 41, 42, 46—51, 60, 61). Cl. IX. Marin Liviu (2539, 49, 72, 613, 19, 21, 64), Cl. X. Chişcaru Marin (P); absolvent Paltin Ion (2588, 89, 96, 600, 05—08, 10, 37).

TIMIŞOARA. Absolvent Grăjdeanu Stelian (2542, 44, 79, 50, 54, 608, 11, 21, 23—25, 30, 67, 68, 75).

S.m. 1. Cl. VIII. Cioca Radu (2674, 77, E: 913, 49, 50, 51, 61, 63, 67). Cl. IX. Stoicoiu Dumitru (2589, 606, 10, 13, 15, 19—21, 23—25, 27, 28, 30, 32)., Toma Corneliu (2539, 54, 65, 67, 68, 72, 74, 88, 610—15, 19—21, 23—27, 29). Cl. X. Ionescu Alexandru (2539, 67, 69, 78, 88, 89, 606, 07, 10, 11, 14, 10—21, 23—30, 33—66, 68, 74, 75, 77, 79).

S.m. 5. Cl. VIII. Neagu Mihai (2579, 91, 619, 20, E: 935, 36, 41, 42, 48, 49, 51, 58, 61). Cl. IX. Rîtă Teofil (2538, 41, 49, 60, 69—72, 87, 88, 91, 98, 602, 06).

TIRGOVIŞTE. Absolvent Dumitru G. Petre (2555, 67, 68, 70, 72, 78, 79, 88, 94, 600, 08, 10, 11, 13, 16, 21, 22, 24, 26, 30). S.m. 2. Cl. VIII Bîrloiu St. Virgil (2484, 504, 23, 39, 49, 55, 89, 91, 610—12, E: 920, 25, 27, 30). S.m. 3. Cl. VIII. *Brezeanu I. Florin* (2610, 11, 19, 20, 23, 24, 26, 33, 37, 45, 58, 65, 68, E: 949—53, 57, 59, 60—69, 71—73, P). Cl. IX. Popescu S. Dan (2448, 50, 52, 57, 71, 88, 92, 97, 503, 04, 15, 18, 19, 21, 23, 25, 32, 36). Cl. X. *Ctrnu Mircea* (2435, 57, 72, 73, 512, 22, 31, 39, 42, 49, 50, 53, 54, 61, 63, 67, 68, 70—73, 75, 76, 78, 79, 82, 84, 88, 91, 603, 04, 06, 08, 10, 11, 15, 16, 19—27, 29, 30), Dumitru Gheorghe (2554, 65, 79, 607, 11, 14, 15, 10—21, 23—26). Cl. X. seral. Cănuţă G. Constantin (2550, 65, 73, 91, 608, 15, 19, 33, 40, 41, 72).

TÎRGU JIU. Absolvent Mărgineanu Gr. Constantin (2539, 42, 49, 50, 54, 67—73, 76, 78, 79, 610, 11, 13, 16, 19—21, 23—27, 30).

S.m. 1 « Tudor Vladimirescu ». Cl. VII. Cancer Anca (2540, 54, 82, 623, 24, 25, 72, 74, E: 949—58, 60—68, 71, 73). Cl. VIII. Berca Constantin (2607, 34, 41, 49, 72, 74, 77, E: 949, 52, 60, 62, 65, 68, 72, 74, 77, E: 949, 52, 60, 62, 65, 68, 72). Cl. VIII. Berca Eugen (2558, 89, 91, 600, 12, 20, 25, 27, 33, 64—66, 68, 72, 73, 82, E: 950, 51, 56, 61—68, 71—73), Davidoiu C. Gheorghe (2600, 10, 11, 19—21, 23, 24, E: 949, 51, 52, 61). CL. X. *Aniţescu Nicolae* (2540—43, 50, 51, 71, 74, 75, 77, 82, 85, 90, 93, 95, 98—600, 05, 08, 10—14, 16, 27, 30, 41, 68, 69, 72, 74—76). S.m. 2. Cl. VIII. Budianu Constantin (2539, 54, 72, 79, 80, 91, 602, 27, E: 935, 36, 38, 44—48, 58). S.m. 3. Cl. VIII. Vîlceanu Sabin (2539, 49, 78, 80, 607, 10, 11, 19—21, 23—27, E: 935, 36, 42, 44, 46—52, 57, 58, 60).

TÎRGUL MUREŞ. Cl. VIII. Antoniuc Bogdan (2610, 12, 22, 29, E: 956, 57, 59, 64, 65, 72). Cl. X. Peterfi Attila (2616, 21—30).

TÎRGU NEAMŢ. Cl. VIII. Cosma I. Emil (2539, 55, 67, 68, 78—80, 88—89, 607, 10, 19, 21, 23, E: 925, 36, 41—43, 47—49, 51, 55, 56, 60, 61).

TÎRGU OCNA (Bacău). Cl. VIII. Ceauşelu Vasile (2578, 600, 07, 10, 11, 19—21, 23—25, 33, 34, 49, 54, 66, 72, 74), *Moise Mihail* (2539, 49 52, 54, 55, 60, 62, 65, 67—69, 78, 79, 88, 89, 91, 98, 600, 02, 07, 10—12, 19—21, 23—26, 29, 33, 34, 37, 38, 41, 45, 49, 56, 63—66, 68, 72, 74, 77, 78).

TRUSEŞTI (Suceava). Cl. VIII. Rauliuc P. Teodor (P. 2633, 49, 72, 74 E: 941, 49, 51, 52, 60—63, 66, 72). Cl. X. Mocanu H. Ovidiu (2587, 606, 10, 11, 13, 14, 16, 20, 21, 24, 25, 30, 40, P).

TURNU MĂGURELE. Cl. VIII. *Panaitescu G. Aureliu* (2539, 79, 612, 24, 23, 64, 74, 77, E: 935—37, 40—42, 44—52, 54, 55, 60—63, 65—68, 71—73).

TURNU SEVERIN. « S. m. 1. Cl. VIII. Atanasie Elena (2607, 12, 20, 21, 24—26, E: 928, 35, 43, 46—49, 51, 54, 55, 60, 64, 72, 73), Băran D. Gheorghe (2610, 23, 24, 72, 74, E: 949, 51, 52, 68, 71—73, 75, 76, 80), Ionăscuţ N. Dan (E: 921, 23, 24, 33—35, 49, 51, 52, 60), Roată G. Radu (2539, 67, 79, 610—12, 21, 23—25, E: 935, 36, 38, 40, 42—45, 47—49). Cl. IX. Demetrescu A. Alfons (2621, 22, 24, 25, 30, 33, 49, 69, 72, 75, 77). Absolvent Carangioiu Mircea (P. 2622, 23, 40, 41, 45, 65, 65, 68—70, 72—76, 84, 761), Petre I.Titus (2539, 49, 54, 56, 67, 68, 74, 78, 88, 89, 94, 96, 605, 13, 16, 19—26, 31, 32), *Rusu Constantin* (2588, 91, 606—08, 10—13, 15, 15 18—26, 29, 30, 33—35, 37—41, 46, 49, 51, 54, 56, 68, 63—70, 72—76).

VASLUI. *Matei V. Ioan* (2539, 65, 72, 78, 606, 07, 10, 11, 14, 15, 21 23, 24, 27, 33, 34, 38, 39, 47, 53, 55, 65, 69, 72, 74, 77, 78, 81—84).

VIDELE (Roşiorii de Vede). Absolvent Iancu D. Petre (2584, 89, 90, 606, 08, 10, 12, 15, 20, 21, 24, 30).

VRANCEA (Galaţi). Cl. IX. Tutoveanu Emil (2539, 49, 74, 79, 606, 13, 21—23, 25, P).

ZALĂU. Absolvent Andruşcenco Paul (2588, 600, 06—08, 10—12, 16, 18—27, 29, 64, 66, 68, 69, 72, 74, 75, 77, 78, 80, 84), Farkaş V. Beniamin (2570, 607, 10, 11, 15 16, 23, 25, 67—69, 75, P).

TABLA DE MATERII

A « GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE » — Seria B, Anul VIII (1957)

I. ARTICOLE

		Pag.
1.	*Atanasiu Virgil*, lector univ. Bucureşti: Reactorul nuclear	119
2.	*Boinagiu D. D.*, inginer Bucureşti: Maşini de calcul pe bază de circuite electronice	567
3.	*Constantinescu G. G.*, prof. univ. Bucureşti: Asupra rezolvării ecuaţiilor algebrice iraţionale	289
4.	*Ciocănel Al.*, cercetător Bucureşti: Razele X şi cîteva din aplicaţiile lor în ştiinţă şi tehnică	466
5.	*Ionescu V. D.*, prof. univ. Cluj: Cîteva teoreme despre triunghiuri	113
6.	*Ionescu V. D.*, prof. univ. Cluj: Teoreme echivalente cu teoremele lui Menelaus şi Ceva	534
7.	*Ionescu-Ţiu C.*, inginer, profesor, Bucureşti: Cîteva corelaţii în matematicile elementare	561
8.	*Krinov L. E.*, URSS: Meteoritica — un nou domeniu de sine stătător al ştiinţei	510
9.	*Marinescu Achim*, lector univ. Bucureşti: Giroscopul şi aplicaţiile sale	68
10.	*Maurer Iuliu*, lector univ. Cluj: Aspecte istorice asupra dezvoltării teoriei atomului	183
11.	*Mircea Iorga*, ing. Bucureşti: Un nou procedeu pentru stabilirea vizibilităţii în epură a unei drepte	237
12.	*Neagu G. Florea*, student Leningrad: Sisteme de numeraţie şi mijloace de calcul	394
13.	*Negulescu Angela*, prof. Bucureşti: Atracţia universală	350
14.	*Olivotto Ivanca*, prof. Bucureşti: Din istoria trigonometriei	130
15.	*Orşivski Claudiu*, prof. Tecuci: Descoperirea şi proprietăţile particulelor elementare noi	402
16.	*Petrescu Gh.* prof. univ. Bucureşti: Anul geofizic internaţional. Participarea Observatorului din Bucureşti	1
17.	*Rădulescu D. N.*, prof .Bucureşti: Mişcarea oscilatorie rectilinie	176
18.	*Schein M.*, prof.: Leonhard Euler — 250 de ani de la naşterea sa	449

Pag.

19. *Simionescu D. Gh.*, conf. univ. Bucureşti: Involuţia 57
20. *Stănescu N.*, conf. univ. Bucureşti: Examenul de fizică la concursul de admitere în institute şi facultăţi 337
21. *Suvorov G. S.*, URSS: Lumina ca formă de existenţă a materiei (prelucrare)..... 225
22. *Saichin A.*, conf. univ. Bucureşti: O aplicaţie în fizică a numărului « e ». Ecuaţia barometrului 362
23. *Toth Alexandru*, conf. univ. Cluj: Din istoria calculelor elementare..... 10
24. *Turcu V.*, prof. Timişoara: Parcelări de arii 455
25. *Wiszmek Carol*, conf. univ.: Contribuţiile fizicienilor ruşi şi sovietici la dezvoltarea fizicii 524
26. *Udrescu Valeriu*, student matematici Bucureşti: Teorema lui Clairaut 402
27. *Vişa Eugen*, Asupra unor cazuri de egalitate şi de asemănare a triunghiurilor oarecare 619
28. *Fedorov K. E.* şi *Skuridin A. G.*, Rachetele şi sateliţii artificiali ai pămîntului .. 625

II. EDITORIALE

1. « 1 Mai » ziua solidarităţii internaţionale a celor ce muncesc..... 169
2. Pentru interzicerea experienţelor cu arma atomică şi cu hidrogen 281
3. « 23 August 1957 » 393
4. La cea de-a 40-a aniversare a Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie 505
5. A 10- a aniversare a Proclamării R.P.R..... 617

III. PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

1. Albinele şi geometria, de *Kiss Elemer*, prof. Tg. Mureş 76
2. Construcţia poligoanelor regulate cu rigla şi compasul de *Gh. Buicliu* 170
3. O relaţie între numere întregi neprime şi progresiile aritmetice de prof. univ. *Iulius Voicu*, Bucureşti 407
4. Teorema lui Clairaut de Valeriu Udrescu, student Bucureşti 241

IV. NOTE MATEMATICE

1. Asupra teoremei lui Ptolomeu 28
2. Asupra problemei 1925 de *Marius Stoka*, Bucureşti 81
3. O generalizare a problemei lui Ptolomeu de *Gh. I. Stoian*, student Bucureşti 82
4. O însumare prin recurenţă de ing. *Fl. Nedelcu* 83
5. Relaţii între bisectoare şi laturi într-un triunghi, de *Marin Zigulescu*, student Bucureşti 86
6. Asupra fasciculelor de cercuri, de *Cezar Coşniţă*, conf. univ. Bucureşti 190
7. Demonstrarea unor teoreme folosind arii, de *Corneliu Georgescu*, prof. Craiova 194
8. Asupra teoremei lui Euler, de *Cezar Coşniţă*, conf. univ. Bucureşti 249
9. Asupra problemei 1548, de *N. Teodorescu*, elev Bucureşti..... 310
10. Generalizarea problemei 2221, de *Gh. I. Bercea*, student Timişoara..... 311
11. Generalizarea problemei 2267, de *Florin Constantinescu*, student Cluj 312
12. Asupra însumării unor forţe concurente, de *Gh. I. Stoian* student Bucureşti 373
13. Asupra patrulaterului convex şi teorema lui Ptolomeu 480
14. O demonstraţie geometrică a formulei lui Mollweide de *A. Năbădan*..... 574
15. Generalizarea problemei 2540 de *C. Bulucea* 575
16. Cîteva calcule elementare privitoare la satelitul artificial, de *Alexandru Stoenescu*.. 637
17. O generalizare a teoremei bisectoarei..... 641
18. Generalizarea problemei 2470 de *C. Bulucea* 642

V. SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII, MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

1. Aparat pentru producerea undelor staţionare pe cale electrică de prof. *N. Rădulescu*, Bucureşti 33
2. Experienţe cu telescopul, de *A. I. Helfgat*, RSS Bielorusă 140
3. Dispozitiv de termostatare la o temperatură superioară temperaturii mediului ambiant, de conf. univ. *Virgil Pavlu* 301
4. Construirea unui transformator 576

VI. CALEIDOSCOP MATEMATIC ŞI FIZIC

1. Caleidoscop fizic..... pag. 30, 196, 304, 411, 579
2. Caleidoscop matematic ..... pag. 252, 307, 366

Pag.

VII. NOUTĂŢI DIN ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ

1. Metale fibroase, perspective de realizări în URSS. Sursă luminoasă deosebită. Antiparticule, de *V. Atanasiu* 200
2. Sincrofazotronul de la Institutul unificat de cercetări nucleare. Semiconductori. Helicopterele, de *V. Atanasiu* 313
3. Phytotronul, aport preţios al fizicii în domeniul agrotehnicii de conf. univ. *Virgil Pavlu*, Bucureşti 409

VIII. DIVERSE

1. Cărţile acordate bibliotecilor şcolilor medii premiate 87
2. Pentru cunoaşterea energiei atomice (fisiunea) 138
3. Premiile Gazetei matematice şi fizice, seria B pe anul 1956 143
4. Conferinţa pe ţară a S.S.M.F. 145
5. Olimpiada de matematică şi fizică 1957 282
6. Institutul Pedagogic din Timişoara, de *Const. Popa* 316
7. Profesorul Nicolae Ciorănescu, de *M. N. Roşculeţ* 319
8. Două articole de matematici elementare ale lui Traian Lalescu 344
9. Rezultatul Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957 385
10. Poşta redacţiei 167, 496
11. Regulamentul Olimpiadelor de matematică şi fizică 1958 644
12. Regulamentul Olimpiadei micilor matematicieni şi fizicieni 603
13. Programa cu repartizarea materiei pe etape la Olimpiadele de matematică şi fizică 1958 648
14. Problemele pentru etapa pregătitoare a Olimpiadei micilor matematicieni şi fizicieni 1958 605
15. Asupra activităţii extraşcolare la matematică la S. m. 1 R. Vîlcea 643

IX. CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Subiecte date la proba scrisă la admiterea în facultăţi în sesiunea august 1956 .. 49
2. Subiecte date la admiterea în institute şi facultăţi în sesiunea august 1956 103
3. Probleme date la admiterea în institute şi facultăţi 1956 160
4. Subiecte date la Olimpiada de matematică, etapa locală din 17 februarie 1957 215
5. Subiecte date la Olimpiada de matematică, etapa regională din 31 martie 1957.... 266
6. Probleme date la Olimpiada de matematică, etapa finală (pe ţară) din 3 mai 1957 (2686—2704) 323
7. Probleme de examen (2728—2736) 383
8. Subiecte date la examenul de maturitate în iunie 1957 în Bucureşti (2794—2800).. 492
9. Subiecte date la examenul de maturitate în regiunea Timişoara (2801—2806) 493

X. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

1. Probleme propuse: nr. 2465—2499 (pag. 45), 2500—2538 (p. 100), 2539—2582 (p. 157), 2583—2632 (p. 211), 2633—2685 (266), 2686—2704 (p. 323), 2705—2736 (p. 380), 2737—2771 (p. 432), 2772—2806 (p. 489), 2807—2834 (p. 551), 2835—2882 (p. 582), 2883—2906 (p. 653).
2. Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani: nr. E: 910—919 (p. 50), 920—934 (p. 105), 935—948 (p. 162), 949—961 (p. 218), 962—973 (p. 271), 974—983 (p. 327), 984—1012 (p. 436), 1013—1024 (p. 494), 1025—1035 (p. 554), 1036—1051 (p. 601), 1052—E: 1066 (p. 656).
3. Rubrica rezolvitorilor de probleme: pag. 51, 106, 164, 220, 273, 329, 388, 439, 497, 555, 608, 667.
4. Redactarea soluţiilor: Nr. 1, nr. 2, nr. 2, nr. 4, nr. 5, nr. 6, nr. 7, nr. 8, nr. 9—coperta III.
5. Premierea rezolvitorilor 143
— Rezultatul Olimpiadei de matematică şi fizică 1957 — etapa finală, pe ţară 287
— Rezultatul Olimpiadei tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957 385

XI. EVIDENŢIAŢI *

1. *Adam I. Gheorghe*, cl. VII Tg. Jiu (107), 2. *Alexa Ion*, an III s.m.a. Sibiu (497) 3. *Ancuţoiu I. Gheorghe*, cl. X R. Vîlcea (52, 106, 273), 4. *Anghel Constantin*, cl. X a. m. 1

* Între paranteze este trecut numărul paginii unde a fost evidenţiat rezolvitorul respectiv.

Constanţa (164, 439, 497, 656), 5. *Aniţescu N. Nicolae*, cl. IX Tg. Jiu (51, 439 497), 6. *Antoniu Sorin*, cl. X s. m. 11 (656), 7. *Apostolescu Mihail*, cl. X. Ploeşti (273), 8. *Ardeleanu Romulus* absolvent Oradea (656), 9. *Baltag Vasile*, cl. X s. m. 1 Ploeşti (52, 107, 164, 273, 388, 555, 610, 656), 10. *Basturescu Mugurel* (cl. IX Caracal (497, 610), 11. *Bărbuică C. Nicolae*, student A.T.M. Bucureşti (51), 12. *Bărbulescu Marcel*, absolvent Slatina (52, 610), *Banică Radu*, cl. X Ianca (107, 273, 610), 14. *Bădoiu Gh.*, cl. X Curtea de Argeş (273), *Batireanu Gheorghe*, absolvent Buzău (388, 497, 555, 656), 16. *Berdan Margareta*, cl. X Bacău (164), 17. *Belinger Dumitru*, absolvent Bucureşti (273), 18. *Becupeanu Teodor*, cl. X Tîrgu Neamţ (388), 19. *Berca Eugen*, cl. VIII Tg. Jiu (497, 610), 20. *Bencovici Ion.* cl. VIII Tg. Jiu (497), 21. *Berghthaler Cristian*, cl. IX Petroşani (497, 555, 656), 22. *Bejenaru Ion*, cl. X Truşeşti-Suceava (555), 23. *Bejenaru Maria*, cl. X Truşeşti-Suceava (555), 24. *Bica Constantin*, cl. IX s. m. 1 Piteşti (555, 656), 25. *Birzan Romanel* cl. X s. m. 4 Cluj (106, 656), 26. *Bozdog Ion*, cl. IX s. m. 2 Tg. Jiu (439, 610) 27. *Boiangiu Nic.*, cl. X Ploeşti (497), 28. *Brînzei D.*, cl. IX s. m. 3 Iaşi (610), 29. *Brezeanu I. Florin*, cl. VIII s. m. 3 Tîrgovişte (656), 30. *Bucurenciu Sorin*, cl. X Ocna Mureş (52) 31, *Bulucea D. Constantin*, cl. X R. Vîlcea (106, 164, 329, 439, 608), 32. *Bunea Teodor*, cl. VII R. Sărat (329), 33. *Buşilă A. Ioana*, cl. X s. m. Bucureşti (388, 439), 34. *Butulescu Ion*, cl. X Tg. Jiu (497), 35. *Bucu P, Paul*, absolvent Buzău (656), 36. *Butoi Octavian*, cl. VIII Moreni (656), 37. Caracoti Stere, cl. X Ianca — Galaţi (106, 273), 38. *Calu Radu*, cl. X s. m. 2 Brăila, 39. *Cancer Anca*, cl. VII, Tg. Jiu (388), 40. *Calinoiu Oprea*, cl. X Brăila (107), 41. *Căsăndroiu C. Tudor*, cl. X Ploeşti (273, 497, 656), 42. *Cernau Rodica* cl. VIII Dej (497), 43. *Chiriac Dumitru*, cl. VIII s. m. 1 Bacău (273, 388, 555, 608), 44. *Tudor M. G.* cl. X s. m. 13 Bucureşti (497), 45. *Ciortan Vasile* cl. IX Ploeşti (52, 439), 46. *Ciobanu N. Marin*, absolvent Giurgiu (273, 497, 656), 47. *Cipere I. Lucian*, cl. X s. m. 1 Bucureşti (273), 48. *Ciobanu Valeriu*, cl. IX s. m. 1 Ploeşti (439), 49. *Ciobanu Traian*, absolvent Roman (497), 50. *Ciorăscu Virgil*, cl. VIII Botoşani (497), 51. *Cîrnu Mircea*, cl. IX Tîrgovişte (52, 107, 388, 497, 656) 52. *Cîrnu Lucian*, cl. VII Tîrgovişte (164), 53. *Costinescu Anca*, cl. X Iaşi (106, 164, 388, 497), 54. *Constantin Radu*, absolvent Bucureşti (497, 656), 55. *Costin Valerica*, cl. VIII R. Vîlcea (555), 56, *Costoiu Dorel*, cl. VIII s. m. 2 Tg. Jiu (555), 57. *Co checi Nicolae*, cl. IX s. m. 2 Tg. Jiu (555), 58. *Cotîrlea Ion*, student Cluj (656), 59. *Cosmuţă Ion*, absolvent Dej (656), 60. *Constantinescu Mihai*, cl. X s. m. 3 Bucureşti (656), 61. *Colinion M.* cl. IX s. m. 3 Ploeşti (656), 62. *Cristea Paul*, cl. X s. m. 1 Bucureşti (52, 656), 63. *Creţu Mihai*, cl. X s. m. 3 Iaşi (164, 610), 64. *Croitoru Florica* ,cl. X s. m. 2 Focşani (497), 65. *Cuşmaru Olic*, cl. X Iaşi (107), 66. *Dascălu Dan*, cl. VIII, s. m. 1 (Bucureşti 656), 67. *Delibaş Constantin*, cl. X Ploeşti (106, 272, 555, 656), 68. *Demaio Adriana*, cl. VIII s. m. 20 Bucureşti (497), 69. *Diamantstein Martin*, absolvent Ocna Mureş (52), 70. *Dinuţ Teodor*, absolvent Craiova (107, 497, 610), 71. *Dinca Gheorghe*, cl. IX s. m. 1 Caracal (439, 610), 72. *Diţu Emil*, cl. X s. m. 2 Iaşi (439), 73. *Dimitriu Gh.*, cl. X lic. mil. Galaţi (497), 74. *Dorobanţu Valeriu*, absolvent Slatina (107, 439, 494, 656), 75. *Doniga Nicolae*, cl. X s. m. 1 Bucureşti (273, 555), 76. *Dobre Ion*, student electrotehn. Bucureşti (388), 77. *Dolteanu Temistocle*, absolvent Huşi (656), 78. *Draica Constantin*, cl. X s. m. 4 Bucureşti (329), 79. *Drăgan Petre*, cl. VIII Giurgiu (388, 497), 80. *Drăgănescu Cornel*, cl. VIII s. m. 1 Bucureşti (656), 81. *Eftimie Z. Radu*, cl. IX s. m. 18 Bucureşti (656), 82. *Enişteanu N. Nicolae*, Cl. VIII s. m. 18 Bucureşti (107), 83. *Enescu Nicolae*, facult. mecanică Bucureşti (273), 84. *Enescu Cornelia*, cl. X s. m. 15 Bucureşti (329, 610). 85. *Ene P. Dumitru*, cl. VIII Ploeşti (610), 86. *Epureanu C. Alexandru*, cl. X s. m. 1 Galaţi (273), 87. *Florea Dorel*, cl. X Slatina (107, 439, 610), 88. *Georgescu P. Adrian*, cl. X s. m. 1 Ploeşti (329), 89. *Gervescu Ion*, cl. IX Piatra Neamţ (439, 656), 90. *Gherman Ecaterina*, cl. VIII Oradea (52), 91. *Ghenea Anghel*, absolvent Piatra Olt (388, 656), 92. *Gheorghe A. Cezar*, cl. VIII Buzău (388, 439, 555, 656), 93. *Gherlan Vasile*, absolvent Sărmaşag (656), 94. *Giovani Azzola*, cl. VIII Caransebeş (610). 95. *Glasberg Vladimir*, cl. IX. s. m. 12 Bucureşti (164, 497, 656), 95. *Grigoraş Vasile*, cl. VIII Bacău (52, 656), 97. *Grecu Anton*, cl. IX Roşiorii de Vede (52, 329, 656), 98. *Grigore Mihai*, anul II şc. pedagogică Iaşi (497), 99. *Grosescu Radu*, cl. VIII lic. mil. Breaza (497, 656), 100. *Harmata L. Mihai*, student Bucureşti (106), 101. *Homutescu Adrian*, cl. X s. m. 3 Iaşi (164), 102. *Ianuş Stere*, cl. X Constanţa (53, 164, 388, 497, 610), 103). *Iftimie Viorel*, cl. X Rădăuţi (51, 106, 329, 397, 656), 104. *Ilioi I. Constantin*, cl. IX Roman (656), 105. *Indoleanu Ion*, anul IV. şc. pedagogică nr. 2 Cluj (273, 388). 106. *Iorgulescu Alexandru*, student Bucureşti (106, 273), 107. *Ioan T. Nicolae*, cl. X s. m. 1 Cîmpina (329), 109. *Ionescu V. Marian*, cl. VII Gălăţeni-Bucureşti (329), 109. *Iordanescu Sorin*, cl. X s. m. 20 Bucureşti (329, 555, 656), 110. *Ionescu Mircea*, cl. X. s. m. 4 Bucureşti (329), 111. *Ioniţă Tudor*, student Oraşul Stalin (388), 112. *Ionescu Dan*, student electronică Bucureşti (439), 113. *Ionavetz Rudolf*, cl. IX Ploeşti (497), 114. *IoachimAlexandru*, cl. IX. s. m. 1 Bucureşti (656), 115. *Isbăşescu Mihai*, cl. IX, s. m. 1 Bucureşti (439, 497, 656), 116. *Isbăşescu Mircea*, cl. VIII s. m. 8 Bucureşti (656), 117. *Ixaru Gr. Lucian*, cl. IX

Gaești (610, 656), 118. *Jianu Ion*, cl. X s, m, 2 București (388), 119. *Jilăveanu S. Gheorghe* absolvent Mediaș (329, 497, 610), 120. *Kim-Ian.Su*, cl. X s. m. 3 Iași (656), 121. *Klecner V.* Adrian, cl. X s. m. 1 București (273, 439, 656), 122. *Landmann Alexandru*, facultatea energetică București (52, 273, 439), 123, *Lăscuțoiu Virgil*, absolvent Ghelar-Hunedoara (273, 497i 656), 124, *Lungu Liviu*, absolvent Ploești (52, 164, 439), 125, *Lupu V. Dumitru*, aaslvent Vaslui (106), 126, *Lucan Mihai*, al.X s. m. 3 Iași (164), 127. *Lupaș Laurențiu*, cl. VIII s. m. 1 București (43S, 555i 656), 128. *Lupescu Constantin*, cl.X Tg. Jiu (497), 129. *Mavromatis Alexandru*, cl. VI s. m. 18 București (52) 130. *Mazilu G. Luminița*, cl. VIII s. m. 7 București (52, 106), 131. *Mavrmomatis Euripide*, cl. VII s. m. 18 București (52), 132. *Mărțiș Gh. Ioan*, cl. IX s.m. 4 București (293, 497, 610), 133. *Matei Didina*, cl. IX s. m. 3 Tg. Mureș (273), 134. *Matei V. Aurel*, absolvent Tg. Mureș (273, 388, 610), 135. *Manole Corneliu*, cl. IX s. m. 1 Iași (439), 136. *Matei Ion*, cl. IX Vaslui (656), 137. *Mărgineanu Constantin*, absolvent Tg. Jiu (107), 138. *Mărgineanu Ruxandra*, cl. VII Filiași (107), 139. *Mihăileanu Alexandru*, cl. VIII s. m. 1 Timișoara (52) 140. *Mihăileanu Constantin*, cl. X s. m, 1 Timișoara (388) 141. *Mihalache Adrian*, cl. X s. m. 3 Iași (164, 439, 610), 142, *Mira Eugen*, cl. VII sc. elem. 119 București (273), 143. *Mihai M. Gheorghe*, absolvent Craiova (329), 144. *Mihăilescu I. Viorel* cl. IX s. m. 1 Caracal (329, 555, 656) 145. *Mititelu Ștefan*, cl. IX Călărași (497, 610), 146. *Mihăiță Gheorghe*, cl. X Tg. Jiu (497), 147. *Mirlogeanu Florea*, cl. X Giurgiu (273, 497, 656), 148. *Mocanu Ovidiu*, cl. X Trusești-Suceava (555), 149. *Motoargă Dumitru*, cl. IX lic. mil. Breaza (656), 150. *Moflic Emilian*, cl. VIII Moreni (656), 151. *Moise Mihail*, cl. VIII Tg. Ocna (656), 152. *Mușat Mihai*, cl. VIII, s. m. 4 București (555) ,153. *Murăreci Fanică*, cl. X Curtea de Argeș (610, 656), 154. *Nanu Octavian*, cl. IX. s. m. 3 Iași (555, 656), 155. *Nasturică Iulian*, cl. IX s. m. 2 Tg. Jiu (555), 156. *Nerodea Tiberiu*, student Timișoara (273), 157. *Neagu Viorel*, cl. VIII s. m. 1. Ploești (439), 158. *Neaga Constantin*, Drăgășani (656), 159. *Nicolau Virgil*, cl. VIII s. m. 4 București (52, 656), 160. *Niță Georgeta*. cl. VIII s. m. 22 București (107), 161. *Nicolau T. Smaranda*, cl. IX s. m. 10 București (164), 162. *Nicolescu A. Basarab*, cl. VIII Ploești (273, 388, 610, 656), 163. *Niculescu Stelian*, cl. X Caracal (329, 497, 610), 164. *Olteanu Stoica Ștefan*, cl. VIII s. m. 17 București (656), 165. *Oprica Mihai*, cl. IX s. m. 17 București (273, 555, 656), 165. *Panaitopol Laurențiu*, clasa X Giurgiu (51, 107, 164, 388), 167. *Paulescu N. Dan*, student București (273), 168. *Panțuru T. Dumitru*, șc. aviație Mediaș (329), 169. *Panait Nicoleta*, cl. VIII s. m. 17 București (610), 170. *Panaitescu G. Aureliu*, cl. VIII Turnu Măgurele (656), 171. *Păunescu R. Sorin*, student fac. electr. București (329), 172. *Pancescu Florin*, cl. X s. m. 1 Ploești (329), 173. *Păbușca C. Pavel*, cl. VIII Ploești (610), 174. *Peterffi Attila*, cl. X Tg. Mureș (107, 329, 388, 555), 175. *Petre Gheorghe*, cl. X Giurgiu (497), 176. *Petrescu Virgil*, cl. VIII s. m. 1 Ploești (656), 177, *Perianu Dan*, cl. VIII Reșița (656), 178. *Pițigoi I. Gheorghe*, cl. X R. Vîlcea (273, 610, 656), 179. *Ploeșteanu Ion*, cl. X Alexandria (497, 610), 180. *Pejga Constantin*, cl. X R. Vîlcea (51), 181. *Popescu R. Paul*, fac. electr. mec. București (51, 106, 273, 439, 608), 182. *Popa D, Doina*, cl. VIII, s.m.15 București (52, 388), 183. *Popescu Claudiu*, cl. X s.m.3 Iași (164), 184. *Popescu Victor*, cl. X s. m. 1 București (164, 439), 185. *Popescu S, Dan*, cl. IX Tîrgoviște (329), 185. *Popescu Eugen*, cl. X Ploești (329, 610), 187. *Popescu Cristian*, cl. VIII Giurgiu (497), 180. *Popescu Constantin*, cl. X. Ploești (497). 189. *Popescu Sorin*, cl. X Tg. Jiu (497), 190. *Popescu Radu*, cl. VIII Giurgiu (656), 191. *Pop Corneliu*, cl. X s. m. 1 Oradea (656), 192. *Profirescu D. Marcel*, cl. IX Giurgiu (51, 273, 656), 193. *Precupeanu Teodor*, cl. X Tg. Neamț (610), 194. *Pupăzan V. Nicolae*, șc. artil. Sibiu (52, 106, 329, 497), 195. *Rășcanu Radu*, cl. VIII s. m. 1 București (52, 107, 164, 439), 196. *Rădulescu D. Marin*, cl. X Pitești (164, 439), 197. *Rădescu Eugen*, cl. IX s. m. 1 Focșani (164, 555, 656), 198. *Rădulescu D. Constantin*, cl. X s. m. 4 București (388, 439, 497), 199. *Răileanu Gheorghe*, s. m. av. Tecuci (497), 200. *Rădulescu Mircea*, cl. VIII Constanța (610), 201. *Rotaru Constantin*, student Inst. Polit. Iași (329), 202. *Rusu Constantin*, cl. X Turnu Severin (497, 656), 203. *Rusu Mihai*, cl. X Ocna Mureș (329, 439), 204. *Savin Alexandru*, cl. VI Cîmpulung Muscel (52), 205. *Șaganai A. Nusfet*, Fac. mecanică București (273), 206. *Schein Teodor*, cl. X s. m. 1 București (107, 273, 329), 207. *Șchiopulescu Dan*, absolvent București (656), 208. *Schiop Alexandru*, cl. X s. m. 1 Oradea (656), 209. *Șerban Ligia*, cl. VII Paunești Adjud (52), 210. *Serdeșniuc Aurel*, anul II șc. contabili Lugoj (107), 211. *Șerbănescu Florin*, cl. X *Giurgiu* (164), 212. *Șerbulescu Vasile*, cl. X s. m. 2 Tg. Jiu (439, 497), 213. *Șerban Viorel*, cl. VIII Tg. Jiu (497), 214. *Sgăvîrdea Dumitru*, absolvent Timișoara, (106, 273), 215. *Sin C. Alexandru*, Facult. Construcții București (273), 216. *Sorescu D. Ghgeorghe*, cl. X s. m. 13 București (52, 329), 217. *Spinei Fanica*, cl. IX Roman (656), 218. *Stănciulescu M. Mihai*, student Facult, mecanică București (51), 219. *Strătescu Ion*, cl.X. Călărași (51, 439,555, 610, 656), 220. *Stoian I. Gheorghe* Fac. matematică București (51), 221. *Stepan Ionel*, cl. X Constanța (52, 106, 388, 497, 555), 222. *Ștefănescu Florica*. cl. VIII Pitești (164, 656), 223. *Stan N. Dumitru*, absolvent Pucioasa (273, 555, 656), 224. *Stan C. Dumitru*, A.T.M. București (273), 225. *Stoian Mircea*, cl. IX

s. m. 1 Oraşul Stalin (388, 555), 226. *Stănculescu Adrian*, student Craiova (388), 227. *Stoica Horia*, cl. IX, s. m. 4 Cluj (439), 228. *Stoica Dan*, cl. VIII s. m. 26 Bucureşti (497), 229. *Stamatoiu Petre*, cl. X s. m. 4 Bucureşti (555), 230. *Stratan Gheorghe*, cl. IX Caracal (610), 231. *Stoian M. Gheorghe*, cl. VIII s. m. 13 Bucureşti (656), 232. *Şufană Constantin* cl. IX Lugoj (610), 233. *Taga Mihai*, cl. IX Ploeşti (497), 234. *Tănase Constantin*, cl. X Slobozia (388), 235. *Tărîţa Ion*, absolvent Craiova (610), 236. *Teodorescu Nicolae*, cl. X s. m. 2 Bucureşti (52, 164, 273), 237. *Timuş M. Dan*, cl. VIII Ploeşti (52, 656), 238. *Ţibuleac Florin*. cl. X. s. m. 2 Iaşi (52)m 239. *Tîrlan Gabriel*, cl. X Găeşti (610, 656), 240. *Tofan Liliana*, prof. Codlea, reg. Stalin (273, 439), 241. *Tomescu Ion*, cl. VIII s. m. 1 Ploeşti (656), 241. *Trandafir Mircea*, absolvent Călăraşi (656), 243. *Tudor N. Constantin*, fac. mat. Bucureşti (52, 273), 244. *Tudorache Mihai*, cl. X s. mil. Galaţi (164, 610), 245. *Tudor Gheorghe*, cl. X s. m. 13 Bucureşti (164, 329), 246. *Tudose Traian* cl. X Tecuci (164, 329, 555), 247. *Tuicu Valeria*, c. X Giurgiu (273), 248. *Tudor Mircea*, cl. X Cîmpulung Moldovenesc (273), 249. *Tudor Gheorghe* cl. VIII Moreni (656), 250. *Vasiliev Lucia*, cl. X s. m. 2 Constanţa (329), 251. *Vasilescu Florian*, cl. IX Giurgiu (497, 656), 252. *Velicescu Mircea*, cl. VIII Tg. Jiu (497, 610), 253. *Verveagă T.* absolvent Bistriţa (497), 254. *Virgolici Virgil*, fac. instalaţii Bucureşti (273, 656), 255. *Vişinescu N. Mihai*, cl. IX s. m. 1 Giurgiu (329, 439, 497) 253. *Zamfirescu H.*, cl. X s. m. 18 Bucureşti (610), 257. *Zorapapel Tiberiu*, cl.asa X, Bucureşti (107 273, 656),

XII. PROBLEME PROPUSE REPARTIZATE PE AUTORI

Albuleţ C. (2747), Alexandru Emanoil (3000), Alexandru Emil (2778), Anitescu N.N. (2776), Bazacov Gh. (2634, 2657, 2689, 2740), Baltag V., (2739, 2789), Băghină V. (2812), Bărbulescu Marcel (2652, 2744), Bercea I. Gh. (2513, 2597, 2767), Boldescu Petre (2660), Brezeanu Ioanin (2645), Buicliu Gh. (2484, 2505, 2647, 2765, 2786, 2819, 2837, 2838, 2884), Bulucea C. (2605, 2755, 2849), Cotfas Constantin (2756), Călugăriţa Gh. (2515), Ciolac I. (2741), Ciomu C.N. (2510), Ciorănescu Ioana (2468, 2503, 2589), Costăchescu V.C. (2487, 2602, 2646, 2718m 2759m 2810), Colibaba V. Tiberiu (2524, 2566, 2723, 2889), Cocea Gh. Teodor (2541, 2761, 2826), Coşniţă Cezar (2751, 2773, 2854, 2885), Cristea I.Ion (2841, 2902), Dascălu H. (2636, 2769), Deac Iuliu (2832), Demeny Zoltan (2472), Delighioz Chiril (2748, Dobrotescu Gh. (2466, 2594, 2842), Dorobanţu Valeriu (2815), Dragu V. (3750), Emanoi, Alexandru (2548), Farcaş V.B. (2829), Ferenţi Gh. (2893), Gavrilă Horia (2835, 2889), Georgescu Corneliu (2716, 2738, 2836, 2887), Gheorghiu Olimpia (2665, 2698), Goga I. Florian (2643), Grecu Anton (2746), Hodîrcă I. (2604, 2644, 2763, 2775), Huhulea B. (2890), Hulubei T.V. (2467), Iacob St. Eugen (2469, 2768), Iorgulescu Alexandru (2766, 2839), Ionescu Radu (2814, 3000), Ionescu-Ţiu C. (2473, 2500, 2501, 2540, 2584, 2591, 2612, 2633, 2649, 2656 2657, 2686, 2687, 2704, 2707, 2737, 2772, 2807, 2817, 2843, 2856, 2888, 2898), Ionescu-Bujor C. (2845), Iosifescu Marius (2901), Istodor Valentin (2770), Kiss Elemer (2471, 2483 2782), Klecner Adrian (2895), Landmann Alex. (2828), Lepădatu I. (2662), Lerner E. (2719, 2886), Linder Francisc (2653), Marică Ştefan (2764), Mastan I. (2509), Mateescu I. (2654, 2779, Marinescu Achim (2609), Mănescu L. (2485, 2824), Mărculescu Stelian (2465, 2545, 2818), Năbădan Al. (2511), Nedelcu Fl. (2559, 2820), Necşoiu C. (2474, 2705, 2749) Nicolae Dumitru (2675), Nicolae St. Alex. (2833), Onofraş Eugen (2555, 2830, 2855, 2906) Orşivski Claudiu (2834), Pamfil Simion (2504), Panu C.D. (2601), Pătraşcu Florica (2667) Petrovici Radu (2903), Petrescu Ştefan (2671), Piţigoi Gh. (2852), Popescu Gh. (2777), Pastolache V. (2508) Popescu Paul (2512, 2546, 2603, 2651, 2758), Popilov Herman (2726) Profirescu M.(2896), Rădulescu N.(2506), Rusu Mihai (2905), Saganai Nusfet (2811), Saichin A. (2659, 2671, 2676, 2688, 2694, 2695), Sachter O. (2688, 2752), Schein Theodor (2507), Simionescu D. Gh. (2661, 2690, 2692), Simion St. Petre (2539, 2781, 2827, 2900), Stoenescu Alexandru (2840, 2883), Stăncescu N. Emil (2787), Stănciulescu M. (2595, 2816), Stepan Ionel (2839, 2851, 2891), Stănescu Emil (2648), Stoica Marin (2892), Stoica Gh. (2655, 2809), Stoka Marius (2516), Stroe Radu (2547, 2760), Teodorescu N. (2788), Tudor N.C. (2821), Vişinescu Mihai (2894), Voinea I. Alex. (2486, 2650), Wessely Tiberiu (2470) Zorapapel Tiberiu (2587, 2757).

XIII. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI REPARTIZATE PE AUTORI

Baieră B. (929, 941, 964, 978, 985, 986, 1025, 1028, 1049, 1056, 1052), Brezeanu Fl. (1047, 1057), Bulucea C. (918, 965, 1039, 1045), Căsăndroiu T. (916), Chişcaru N. (1052), Constantin Aurel (1063), Cochinţoiu I. (917), Corbu Ion (999), Costăchescu V.C. (959), Coşniţă C. (1033), Dobrotescu Gh. (910, 934, 1021), Domide Leontin (1017, 1023), Donescu St. (942)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA 1883

Emanoil Alex. (998), Fărcaş V.B. (921, 1038, 1053), Florea Dorel (1058), Ghelmeziu N.N. (972), Goicu N. (913, 926, 1037, 1046), Grecu Anton (894), Grigoraş V. (945), Grosu I. (1030), Iacob Eugen (915, 927, 967, 968), Ionescu Mircea (946), Ionescu-Ţiu C. (940, 966, 969, 970, 983, 993, 994, 1001, 1008, 1014, 1018, 1042, 1064, 1065), Iorgulescu A. (1012), Mateescu Ion (982), Marica Ştefan (953), Mărculescu Stelian (920, 1051), Mecea Petru (962), Munteanu N.I. (949, 956, 963, 974, 976, 980, 1011), Murăreci Z. (990), Necşoiu C. (1020, 1036), Necşoiu Dan (1002, 1055), Nica C. (1043), Popescu R. Paul (930, 939), Raliuc Th. (1050), Răşcanu Radu (1003, 1061), Rus A.Ioan (981), Şaganai Nusfet (911), Săndulache Const. (944), Schein Theodor (931), Serdeşniuc A. (960), Simion Pamfil (924), Simon St. Petru (935, 1000), Simovici Dan (1041), Stoian I. Gh. (914, 938, 925, 977), Strătescu Ion. (937, 992, 1034, 1054), Stan C. Dumitru (1062), Stepan Ionel (1035), Teodorescu N. (1005) Tomoiagă Doru (919, 923, 971, 975, 996, 1040, 1060), Zamfirescu Tudor (961).

XIV. PROBLEME REZOLVATE LA PAGINA INDICATĂ ÎNTRE PARANTEZE

1400 (320), 1548 (310), 1602 150, (321), 1789 (150), 1915 (35), 1924 (321), 1925 (81) 1959 (415), 1978 (35), 1994 bis (36), 2000 bis (36), 2009 (36), 2017 (415), 2018 (38), 2027 (38), 2028 (88), 2029 (375) 2023 (377), 2031 (378), 2039 (39), 2059 (39), 2063 (40), 2078 (40), 2082 (41), 2084 (89), 2087 (41), 2091 (42), 2100 (90), 2102 (90), 2014 (43), 2140 (44), 2159 (379), 2160 (379), 2166 (416), 2170 (416), 2199 (91), 2200 (91), 2201 (151), 2203 (151), 2215 (152), 2218 (153, 417), 2219 (418), 2221 (155, 311), 2221* (483), 2228 (154), 2229 (92) 2231 (155), 2232 (93), 2236 (93), 2237 (419), 2239 (156), 2241 (256), 2242 (257), 2243 (94), 2244 (420), 2245 (94), 2246 (202), 2250 (202), 2264 (203), 2266 (421), 2267 (312), 2268 (203) 2271 (203), 2275 (204), 2276 (312), 2268 (203), 2271 (203), 2275 (204), 2276 (257), 2279 (258) 2280 (45), 2286 (259), 2287 (261), 288 (161), 2290 (262), 2292 (422), 2295 (423), 2297 (423) 2299 (424), 2303 (424), 2306 (425, 484), 2315 (426), 2317 (426), 2321 (427), 2323 (428), 2329 (95), 2334 (486), 2335 (487), 2336 (429, 488), 2337 (541), 2338 (489), 2339 (429), 2341 (542), 2348 (544), 2349 (545), 2351 (545), 2354 (582), 2355 (545), 2356 (205), 2357 (545), 2359 (206), 2360 (207), 2361 (207), 2363 (205, 546), 2364 (584), 2365 (208), 2368 (204), 2370 (546) 2371 (547), 2372 (548), 2374 (549), 2382 (549), 2383 (585), 2384 (585), 2385 (586), 2387 (429) 2390 (587), 2392 (588), 2395 (589), 2396 (589), 2397 (590), 2399 (590), 2401 (208, 592), 2402 (96), 2403 (593), 2411 (209), 2418 (593), 2421 (210), 2426 (651), 2427 (652) 2430 (210), E; 775 (211), 788 (211), 289 (99), 827 (97), 830 (97), 843 (98), 852 (429), 855 (430) 856 (98), 861 (98), 866 (430), 915 (652), 916 (653).

ERATĂ: La problema propusă 2841 se va înlocui primul semn „ = " prin semnul „ + ".

„OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ“ 1958

În atenţia tineretului din şcoli

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează «*Olimpiadele de matematică şi fizică* 1958» la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice, profesionale şi tehnice de maiştri.

Olimpiadele se vor desfăşura în trei etape:

— *etapa locală* (raională în Bucureşti), va avea loc pentru matematică la 2 martie, pentru fizică la 9 martie 1958;

— *etapa regională* va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 30—31 martie 1958;

— *etapa finală* va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta la matematică şi la fizică. Probele scrise (eliminatorii) şi orale au loc între 3 şi 6 mai 1958.

Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

„OLIMPIADA MICILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1957 — 1958“

La «Olimpiada micilor matematicieni şi fizicieni» (OMMF) pot participa elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a ale învăţământului elementar.

Olimpiada se va desfăşura în trei etape:

— *Etapa pregătitoare* (prin corespondenţă) are loc în primul şi al doilea trimestru al anului şcolar. În acest timp participanţii la OMMF vor răspunde la întrebările puse şi vor rezolva problemele publicate în «Gazeta matematică şi fizică» seria B sau în «Matematikai és fizikai lapók».

— *Etapa locală* se va desfăşura duminică 23 martie 1958 între orele 9 — 12, în fiecare oraş regional, raion sau pe centre de comune.

— *Etapa reigonală* se va desfăşura la 11 mai, în fiecare reşedinţă de regiune.

Elevii evidenţiaţi în ultima etapă vor primi diplome şi premii.

C. 1178. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul